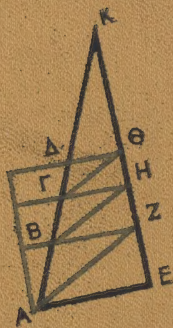


VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com



B. L. VAN DER WAERDEN

ONTWAKENDE WETENSCHAP

**EGYPTISCHE, BABYLONYSCH
EN GRIEKSE
WISKUNDE**

P. NOORDHOFF N. V. — 1950 — GRONINGEN

Б.Л. ВАН ДЕР ВАРДЕН

ПРОБУЖДАЮЩАЯСЯ НАУКА

МАТЕМАТИКА
ДРЕВНЕГО ЕГИПТА, ВАВИЛОНА
И ГРЕЦИИ

ПЕРЕВОД С ГОЛЛАНДСКОГО
И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

А Н Н О Т А Ц И Я

Книга представляет перевод сочинения известного голландского математика ван дер Вардена по истории математики древнего мира. Перевод сделан с голландского, однако в настоящем издании учтены исправления и добавления, сделанные при переводах книги на английский и немецкий языки, в особенности это касается подбора иллюстративного материала.

По мысли автора, книга предназначена для широкого круга людей, знакомых с математикой в объеме средней школы.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Авторов, пишущих об истории науки, можно разделить на четыре группы. К первой относятся люди, хорошо знающие свою науку, но не обладающие достаточными сведениями по истории, ко второй, наоборот, те, которые хорошо знают историю, но не являются специалистами в науке (к этому классу принадлежат почти все историки, которым приходится касаться области науки в своих сочинениях по общей истории). К сожалению, довольно многочисленна группа авторов, не знающих как следует ни истории, ни науки, но совсем мало таких, которые хорошо знают и свою науку и вполне понимают значение исторических условий ее развития. Ван дер Варден как раз принадлежит к последней группе авторов. Советским ученым хорошо знакомы его труды по алгебре; вместе с этим он много занимался и историей математических наук; специалистам известны его работы по истории египетской математики, пифагорейской науки и другие.

Отличительные особенности книги «Пробуждающаяся наука» достаточно хорошо описаны самим автором в его предисловии; о достоинствах книги говорит уже тот факт, что вскоре после своего выхода она была переведена на английский и немецкий языки, а теперь мы предлагаем советским читателям ее русский перевод.

Последний выполнен в основном с голландского текста издания 1950 года, но при этом были учтены исправления и дополнения, сделанные в английском и, наиболее позднем, немецком переводах (наиболее существенные разночтения отмечены в тексте квадратными скобками).

Руководствуясь немецким изданием (1956 г.), мы, тем не менее, сочли возможным сделать от него некоторые отступления. Так, предисловие автора «Несколько слов к читателю» дается нами в том виде, какой оно имеет в голландском и английском изданиях; кроме того, опущена имеющаяся только в немецком переводе легенда о том, как Фалес по длине тени определял высоту пирамиды. Относительно приводимых в книге текстов древних авторов мы придерживаемся следующего принципа: если текст ясен, то совершенно безразлично, переводить ли его с подлинника или с хорошего перевода на другой язык (в английском переводе текст дан в переводах Loeb's Classical Library); если же текст не ясен, то его надо давать в том переводе, в каком его дал сам автор. Поэтому с греческого подлинника переведены лишь эпи-

грамма Эратосфена (у автора был дан прозаический перевод) и место из «Послесловия к законам» Платона (в статье о пифагорейской теории музыки, где дан и подлинный греческий текст).

Рассматриваемое сочинение ван дер Вардена, как и всякая другая книга, имеет свои недостатки, и по ее адресу можно сделать ряд критических замечаний.

Автор, как известно, не принадлежит к числу марксистски образованных историков, но вносить в его текст какие-либо исправления в процессе перевода, разумеется, недопустимо. Поэтому мы оставили текст книги без всяких изменений по существу, надеясь, что советский читатель не будет искать феодализма в древней Греции и не станет так переоценивать Платона, как это делает наш автор. Не со всеми положениями и гипотезами ван дер Вардена, высказанными в этой книге, можно согласиться; в частности, мы не можем вполне согласиться с утверждением автора о том, что VIII книга «Начал» Евклида принадлежит Архиту Тарентскому, но не собираемся оспаривать эту оригинальную (и притом исторически возможную) теорию. Но, кроме этого, в книге ван дер Вардена имеются некоторые утверждения, согласиться с которыми нельзя, поскольку они являются исторически или неверными, или невозможными. Ряд мелких ошибок такого рода исправлен в подстрочных примечаниях; возражения более серьезные и требующие большего места вынесены в Послесловие. По существу, таких пунктов всего три: это, во-первых, история происхождения нашей системы счисления (глава II), во-вторых, соотношение между математиками ионийцев и пифагорейцев (глава IV) и, в-третьих, вопрос об упадке греческой математики (глава VIII).

Мы сочли целесообразным приложить к настоящему изданию перевод помещенной в журнале «Гермес» статьи ван дер Вардена «Die Harmonielehre der Pythagoreer», на которую он часто ссылается в своей книге; это было тем более существенно, что на русском языке почти нет работ, касающихся греческой теории музыки и ее связи с математикой.

Английский и немецкий переводы снабжены хорошо подобранными иллюстрациями с очень ценными пояснениями, принадлежащими перу голландского археолога Бейена; русское издание удерживает их, поскольку они и сами по себе представляют большой интерес.

Переводчик выражает свою благодарность писателю С. П. Боброву, свевшему первоначальный текст русского перевода с английским, а также приложившему много сил для того, чтобы русский перевод был понятным и доступным для широких масс советских читателей и хорошо обработанным литературно (в частности, С. П. Боброву принадлежат все имеющиеся в книге стихотворные переводы).

И. Веселовский

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ 1954 ГОДА

Скоро после выхода в свет моей книги «Ontwakende Wetenschap» почувствовалась необходимость в английском переводе. Мы были очень рады найти переводчика, хорошо знакомого как с голландским и с английским языками, так и с математической терминологией. Я очень в долгу перед профессором Дрезденом за великолепно выполненную им работу.

У моего издателя Нордгофа появилась блестящая идея попросить Х. Г. Бейена, профессора археологии в Гронингенском университете, о помощи в выборе хорошего иллюстративного материала. Это было очень трудным делом. Иллюстрации должны быть одновременно и привлекательными, и поучительными; они должны проиллюстрировать как историю науки, так и общий фон древней цивилизации. Так как издатели все время просили нас находить возможно лучшие иллюстрации, то Х. Г. Бейен заказал фотографии почти со всего мира, никогда не теряя ни энергии ни энтузиазма. В высшей степени поучительные подписи г. Бейена помогут читателю найти взаимную связь между бытом, искусством и наукой в древних цивилизациях. Я очень благодарю обоих упомянутых лиц.

Я также обязан благодарностью О. Беккеру, О. Нейгебауэру и другим, которые подсказали мне некоторые добавления и исправили ошибки. В английском издании добавлены разделы об астролябиях, стереографической проекции и об архимедовом построении семиугольника. Были расширены также отделы, касающиеся перспективы и «Анафорика» Гипсикла.

Цюрих, февраль 195 .

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ 1956 ГОДА

Во многих благосклонных рецензиях моей книги «*Ontwakende Wetenschap*», появившейся сперва в 1950 году на голландском языке, было высказано пожелание о том, чтобы моя книга была также переведена и на немецкий язык. Правильный и удобный для чтения перевод был дан Гельгой Хабиخت-ван дер Варден.

Благосклонной критике О. Беккера, О. Нейгебауэра и других внимательных читателей я обязан целым рядом улучшений текста. Добавлены разделы относительно архимедовой конструкции правильного семиугольника, астролябии и стереографической проекции. Расширены разделы, касающиеся перспективы и Гипсиклова «Анафорика», и дополнены литературные указания.

Издательство П. Нордгофа в Гронингене великодушно предоставило в распоряжение издателя немецкого перевода весь очень сильно расширенный иллюстративный материал английского издания с высшей степени поучительными подписями groningenского археолога Х. Г. Бейена. Цюрихское издательство Биркхойзера с готовностью пошло навстречу моим желаниям относительно печати и оформления книги. Я очень благодарю обоих издателей, которые в своей совместной работе сделали возможным появление в свет этого издания.

Б. Л. ван дер Варден

ОТ АВТОРА

Я благодарю гг. д-ра Бринкмана, проф. Фрейденталя и, прежде всего, д-ра Дейкстергейса, которые критически просмотрели эту рукопись и сделали много полезных замечаний. Я благодарю также и многих других, которые помогли мне небольшими замечаниями такого же рода. Я также очень благодарен г. Вейденсу, который при помощи своего великолепного художника г. Буше со свойственной ему тщательностью позаботился о рисунках. Я, наконец, благодарю издателя за истинно щедрый манеру, с которой он шел навстречу моим желаниям.

Автор

НЕСКОЛЬКО СЛОВ К ЧИТАТЕЛЮ

ЗАЧЕМ НУЖНА ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ?

Каждый знает, что мы живем в эпоху техники, но очень редко отдает себе отчет о том, что буквально вся наша техника основана на математике и физике.

Когда вечером мы возвращаемся на трамвае домой, зажигаем электрический свет и включаем радио, то все это действует при помощи искусственных физических приспособлений, в основе которых лежат математические расчеты. Более того, в значительной степени мы обязаны физике не только этими приятными предметами роскоши, но даже нашим хлебом насущным; не говоря уже о том, что хлеб у нас главным образом привозной и его везут к нам на пароходах из-за моря, но даже и наше собственное земледелие давало бы значительно меньшие урожаи без искусственных удобрений. А искусственное удобрение — это химический продукт, а химия опирается на физику.

Впрочем, наука приносит нам не только блага. Всеуничтожающее оружие, с помощью которого современное человечество разрушает собственную культуру, тоже является одним из продуктов, который неизбежно является плодом развития математики и физики.

Математика и техника влияют даже на нашу духовную жизнь и настолько, что мы редко можем представить себе это полностью. Вслед за необычайным взлетом, который пережило в 17-м веке естествознание, последовал неизбежно рационализм 18-го века, обожествление разума, упадок религии. То же самое уже случилось однажды в древней Греции. Подобно этому вслед за триумфами техники 19-го века последовало в 20-м веке обожествление техники. Увы, люди слишком склонны обожествлять все могущественное и ведущее к успеху.

Отсюда ясно, что наука накладывает печать на всю нашу жизнь, материальную и духовную, во всех ее проявлениях как хороших, так и дурных. Наука является важнейшим культурным явлением нашего времени и важнейшей составной частью нашей цивилизации.

Но если это так, то для истории культуры очень важно представить себе, каким образом возникло современное естествознание?

Надо сказать, что в большей части исторических трудов этот вопрос или вовсе не рассматривается, или на него даются совершенно неудовлетворительные ответы. В какой истории греческой культуры можно найти имена Теэтета и Евдокса, двух величайших математиков всех времен? Кто отдает себе отчет в том, что с исторической точки зрения Ньютон является самой значительной фигурой 17-го века?

Каждый естествоиспытатель безусловно согласится, что механика Ньютона есть основа современной физики. Каждый астроном знает, что современная астрономия начинается с Кеплера и Ньютона. И каждый математик знает, что самым значительным и наиболее важным для физики отделом современной математики является анализ, в основе которого лежат дифференциальное и интегральное исчисления Ньютона. Следовательно, труды Ньютона являются основой огромной части точных наук нашего времени.

Именно Ньютон нашел основные законы движения, которым подчиняются как земные, так и небесные тела. Он увенчал дело обновления древней астрономии, начатое Коперником и Кеплером. Он нашел общий метод решения всех дифференциальных и интегральных задач, которые Архимед, величайший гений древности, решил только особо подобранными методами и для частных случаев.

Однако понять труды Ньютона, не зная античной науки, невозможно. Ньютон ничего не творил из ничего. Без огромных трудов Птолемея, дополнившего и завершившего античную астрономию, была бы невозможна и «Новая Астрономия» Кеплера, а вслед за ней и механика Ньютона. Без конических сечений Аполлония, которые Ньютон знал в совершенстве, точно так же был бы немыслимым и вывод закона тяготения. И интегральное исчисление Ньютона можно понять только как развитие архимедовых методов для определения площадей и объемов. История механики как точной науки начинается только с установления закона рычага, определения направленного вверх давления воды и нахождения центров тяжести у Архимеда.

Короче говоря, все сходящиеся к Ньютону линии развития математики, механики и астрономии получили свое начало в Греции.

ИСТОРИЯ ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

От Фалеса до Аполлония прошло четыре века—от 600 до 200 годов до н. э. Еще незадолго до нашего времени первые три из этих веков были покрыты почти полным мраком, так как мы располагали только двумя подлинными текстами, относящимися к этой эпохе,—фрагментом о луночках Гиппократы и фрагментом Архита об удвоении куба. К этому можно добавить еще два кратких фрагмента Архита, несколько разрозненных указаний у Платона, Аристотеля, Паппа, Прокла и Евтокия и, кроме того, ряд противоречащих друг другу пифагоровских легенд. В более старых сочинениях, вроде «Истории математики» Кантора, относительно этого времени мы найдем лишь рассуждения о предметах, которые, в сущности, нам неизвестны, как, например, происхождение «теоремы Пифагора».

Однако за последнее время в эти сумерки начинает проникать много света. Во-первых, благодаря неутомимому усердию Отто Нейгебауэра и его сотрудников мы знаем теперь математические клинописные тексты, которые совершенно по-новому осветили не только теорему Пифагора, но, что еще важнее, древнейшую историю арифметики и алгебры. Следуя по пути Цейтена, Нейгебауэр сумел обнаружить скрытый алгебраический компонент греческой математики и показать ее связь с вавилонской алгеброй. Теперь история алгебры начинается уже не с Диофанта, но двумя тысячами лет раньше, в Месопотамии. А о том, что касается арифметики, Нейгебауэр писал в 1937 году: «То, что в греческом предании называлось пифагорейским, вероятно, вернее называть вавилонским». И действительно, открытый в 1943 году клинописный текст о «пифагорейских числах» полностью доказал справедливость этих слов Нейгебауэра.

Еще один импульс был дан филологическими работами с философским уклоном. Штенцель и Теплиц вместе с Нейгебауэром основали в 1937 году издание «Источников и исследований по истории математики, астрономии и физики» (*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*).

Они ставили себе задачей шире ознакомиться с философией Платона путем тщательного исследования основных понятий греческой математики и совершенно так же, наоборот, исследуя тщательно Платона, ознакомиться ближе с сутью греческой математики. При помощи этого метода Беккер, Рейдемейстер и другие получили в высшей степени ценные результаты. Несколько ранее Ева Сакс вызвала из забвения имя замечательного математика Теэтета.

Очень плодотворным методом оказался анализ «Начал» Евклида. Это произведение, написанное около 300 года до н. э., является, по-видимому, в большей своей части компиляцией различных отрывков математических произведений очень разнообраз-

разной значимости и очень разного возраста. Когда эти отрывки были тщательно разобраны, прекрасно обработаны и отнесены к той математико-исторической среде, в которой они первоначально возникли, удалось получить значительно более ясную картину греческой математики от 500 до 300 годов до н. э.

Все эти вещи никогда еще не излагались вместе в одной книге. Правда, имеется прекрасная книга О. Нейгебауэра о «догреческой математике», существуют также замечательные труды об Евклиде, Аристархе, Архимеде и Аполлонии. Таким образом, относительно этих последних мы можем ограничиться наиболее интересным и самым важным; из их произведений мы можем там и сям вытащить лакомый кусочек и постараться приготовить возможно более вкусное угощение. Но основной целью книги является, как можно яснее показать:

каким образом Фалес и Пифагор, исходя из вавилонской математики, придали ей совершенно другой, специфически греческий характер;

каким образом в школе пифагорейцев и вне ее математика все больше и больше развивалась, удовлетворяя постоянно все более строгим требованиям логики;

каким образом математика трудами Теэтета и Евдокса, друзей Платона, была приведена к той высшей степени совершенства, красоты и точности, которой мы можем подивиться в «Началах» Евклида.

А затем мы увидим, что математические доказательства были образцами как для диалектики Платона, так и для логики Аристотеля.

Историю математики нельзя отделить от общей истории культуры. Математика является частью духовной жизни, глубоко связанной не только с астрономией и механикой, но также с архитектурой и техникой, с философией и даже с религией (Пифагор).

Политические и общественные условия имеют огромное значение для расцвета и характера науки. Это будет ясно показано в VII главе при сравнении александрийской математики с математикой классической эпохи и еще яснее в VIII главе при изучении причин упадка греческой математики.

КАК ПОСТРОЕНА ЭТА КНИГА

Основной целью было сделать книгу научной и вместе с тем понятной. Понятной в том смысле, чтобы каждый учившийся математике в средней школе и интересующийся историей математики мог ее понимать. Научной в том смысле, чтобы она основывалась на самостоятельном изучении источников и для каждого утверждения давала доказательства, так чтобы читатель мог сам судить о значимости аргументации.

Наивный читатель, может быть, подумает, что все это и так само собой разумеется. Но как раз против этого-то и грешили. Сколько утверждений в книгах по истории математики списывалось из других подобных же книг без всякой критики и без изучения источников! Сколько находится в обращении побасенок, которые считаются «общепризнанными истинами»!

Один пример. В девяноста процентах всех таких книжечек можно найти сообщение, что египтяне знали прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 и употребляли его для построения прямых углов. Какую цену имеет это указание? Ровно никакой. На чем оно основано? На двух фактах и одном рассуждении Кантора. Факты таковы: в церемонии при основании египетских храмов участвовали «гарпедонапты», и углы при основании храмов и пирамид большей частью являются действительно прямыми. Кантор на основании этого рассуждает так: прямые углы должны были быть построены гарпедонаптами, а я (Кантор) не могу представить себе никакого другого способа получения прямого угла при помощи натянутых веревок, кроме как посредством трех веревок длиной в 3, 4 и 5, которые образуют треугольник. Отсюда следует, что египтяне должны были знать этот треугольник.

Ведь это почти невероятно. Не то, что Кантор обнародовал однажды такую гипотезу, а то, что после многих переписываний из книги в книгу гипотеза эта сделалась «общепризнанным фактом». И, однако, это было именно так!*)

Для того чтобы избежать подобных ошибок, я неуклонно проверял все утверждения, которые я встречал у современных авторов. Это не так трудно, как кажется, даже если человек (как я) не знает египетского языка, не может читать клинописных текстов и не является филологом-классиком. Почти для всех текстов можно найти надежные переводы. Так, все математические клинописные тексты были переведены и изданы Нейгебауэром. Все египетские математические тексты переведены на английский или немецкий языки. Платон, Евклид, Архимед... — все они прекрасно переведены на французский, немецкий и английский языки. Только в отдельных, сомнительных случаях надо было привлекать греческий подлинник. Вместе с тем читать классиков в полном их тексте (хотя бы и в переводе) гораздо более поучительно, нежели читать их в современных изложениях, да к тому же это и гораздо приятнее. Если моя книга сможет внушить эту мысль

*) Совершенно правильная мысль автора подтверждается неудачным примером. Измерения, произведенные советскими историками архитектуры установили, что египтяне действительно пользовались треугольником «3—4—5». Можно даже приблизительно установить время его возникновения: его нет в ансамбле пирамиды Хеопса, но он уже имеется в ансамбле пирамиды Хефрена. (Прим. перев.)

читателю, то моя цель будет достигнута. Поэтому я настоятельно рекомендую моим читателям: не верьте моим словам, но обо всем рассуждайте сами.

Я старался вообразить себе великих математиков, как живых среди живых людей, и воссоздать впечатление, которое они производили на современников. Из-за скудости источников это не всюду удалось, но, однако, такие выдающиеся личности, как Пифагор, Архит, Теэтет и Архимед, можно было показать в очень ясном свете. Можно, пожалуй, составить себе известное представление о Фалесе, Евдоксе и Эратосфене. Что же касается египетских и вавилонских математиков, то мы не знаем даже их имен.

ЧТО НОВОГО В ЭТОЙ КНИГЕ?

В главе II:

Гипотеза Фрейденталя об индийских цифрах.

В главе III:

Данная Фрейденталем интерпретация одного текста из вавилонского учебника.

В главе IV:

Новое представление о математике Фалеса.

В главе V:

Реконструкция пифагорейской теории чисел по арифметическим книгам «Начал».

Связи между вавилонской и греческой, в частности пифагорейской, математикой.

Доказательство иррациональности у Феодора Киренского.

В главе VI:

Слабая логика Архита Тарентского.

Математика и теория музыки в «Эпиномис»*).

Анализ X книги «Начал» и реконструкция математических работ Теэтета.

В главе VII:

История делийской задачи в действительности и по диалогу «Платоник»**).

В главе VIII:

Причины упадка греческой математики.

*) «Послесловие к Законам» — название одного из диалогов Платона, законченного, по-видимому, после его смерти его последователями (возможно, Филиппом Опунтским; см. в тексте гл. VI). (Прим. перев.)

**) Название одного из диалогов Эратосфена (см. гл. VIII). (Прим. перев.)

ЕГИПЕТСКАЯ И ВАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА





ГЛАВА I

ЕГИПТЯНЕ

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЗОР

<i>Общая история</i>	<i>История культуры</i>	<i>История науки</i>
3000 до н. э. Менес. Древнее царство	Иероглифы. Пирамиды	Счет до 100 000
2000—1800 до н. э. Среднее царство	Литература. Ювелирное дело	Папирусы Ринда и Московский. Звездные календари на крышках гробов
1700 до н. э. Владычество гиксосов		Ахмес переписывает папирус Ринда
1600—1100 до н. э. Новое царство	Новое богословие (Эхнатон). Архитектура. Скульптура	Очень примитивная наука о звездах (могила Сенмута)
300 до н. э.—300 н. э. Эллинизм	Александрия — центр греческого искусства и науки. Появление астрологии	Высший расцвет греческой науки. Египетские арифметика и астрономия остаются очень примитивными

ЕГИПТЯНЕ КАК «ИЗОБРЕТАТЕЛИ ГЕОМЕТРИИ»

Греки вообще считали, что наука появилась в Египте. Аристотель, например, пишет («Метафизика» А1): «По этой причине возникла в Египте наука; именно там жрецы имели необходимое свободное время». Геродот, который лучше знал Египет, смотрел больше на практическую сторону дела: когда Нил заливал участок обработанной земли, то с точки зрения обложения нужно было

установить, сколько земли было потеряно,—«п это было, как мне кажется, начало геометрии, которая оттуда перешла в Грецию (Геродот, II, 109)». А Демокрит писал: «В построении линий с доказательствами я никем не был превзойден, даже так назы-

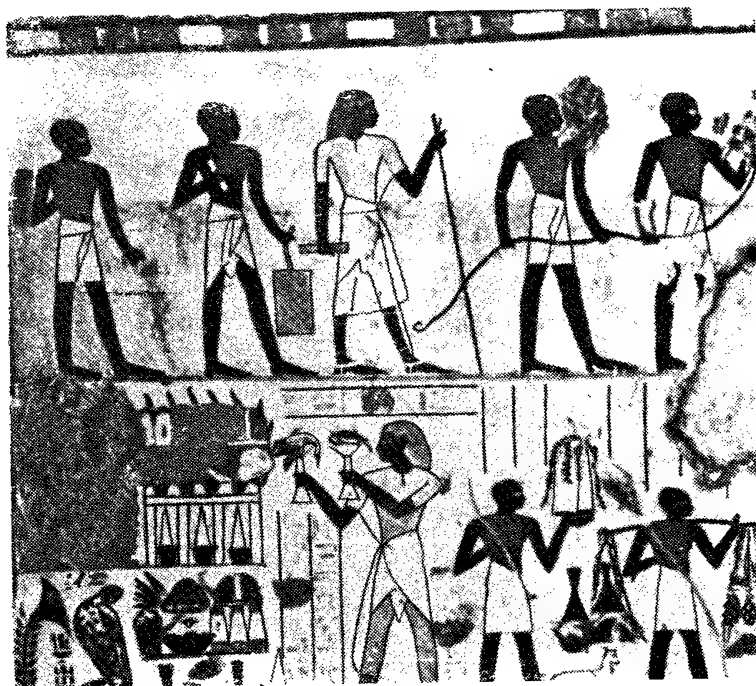


Рис. 1. Изображение на могиле Джесеркере-сонб (№ 38) в Фивах (Верхний Египет). Верхняя часть: межевание. Рисунок относится ко времени Нового царства, 18-й династии (1567—1310 до н. э.). Запоминающаяся практическими вопросами математическая наука египтян идет нога в ногу с формой художественного изображения, пытающегося дать возможно более полное или, скорее, совершенное изображение предметов. Такого рода искусство называется «идеопластическим» потому, что египтянин рисует вещи не так, как он видит их («физиопластически»), но как он знает, чем они в действительности являются. В рельефе и рисунках художник располагает все, насколько возможно, в плоскости, так как это позволяет ему дать наибольшее количество точных данных для реального изображения. В известной степени это искусство требует «чтения». Однако это справедливо лишь до некоторой степени, так как эта «идеопластическая» концепция соединяется с острым наблюдением природы (см. след. рисунок).

ваемыми египетскими гарпедонаптами». Гарпедонапты, на которых здесь указывает Демокрит, были, вероятно, землемерами, наиболее употребительный прибор которых везде представляет туго натянутую веревку*).

Поскольку математические способности египтян так славилась у греков, то было бы очень полезно рассмотреть египетские математические тексты. Самым большим и наиболее известным из них является

*) См. S. G a n d z, *Die Harpedonapten*, Quellen u. Studien, *Gesch. Math.*, B. I (1930), стр. 255.

ПАПИРУС РИНДА

названный так по имени А. Ринда, который купил этот текст в Луксоре и потом передал его Британскому музею*).

Этот папирус был написан в то время, когда над Египтом властвовали гиксосы (около 1800 до н. э.), но, как уверяет его писец Ахмес, он восходит к оригиналу из Среднего царства (2000—1800 до н. э.). Все остальные известные нам тексты математического содержания точно так же относятся к эпохе Среднего царства. Таким образом, мы можем надеяться, что по папирусу Ринда можно будет познакомиться с основными началами математики того времени.

Папирус начинается очень широковещательно: он обещает научить «Совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн...». Но скоро замечаешь, что здесь открывается не происхождение вещей, но только тайны счета и искусства вычислений с дробями, в которые должен быть посвящен читатель на примерах различных практических задач, с которыми приходилось иметь дело чиновникам большого государства, таких, как распределение заработной платы между известным числом рабочих, вычисление необходимого количества зерна для приготовления такого-то количества хлеба или пива, вычисление поверхностей и объемов, перевод одних мер зерна в другие. Среди них находятся, однако, и чисто теоретические задачи для упражнения в трудном искусстве вычислений с дробями.

В связи с этими обстоятельствами возникает вопрос:

Для кого был написан папирус Ринда?

Прав ли был Аристотель, говоря, что жрецы действительно были носителями математического прогресса, ибо они посвящали свой досуг занятиям теоретической математикой, подобно тому как в его время делали греческие ученые? Или ближе к истине были Геродот и Демокрит, полагая, что геометрия была в первую очередь делом людей практики?

В Древнем царстве египтян (3200—2000), а также и в Среднем царстве (2000—1800), т. е. в эпоху создания рассматриваемых текстов, еще не существовало хорошо организованного жреческого сословия, и обязанности жрецов выполняли миряне вместе с их обычной работой. Таким образом, Аристотель исходил из совершенно превратных представлений. И действительно, геомет-

*) См. великолепное издание Пита (Т. Е. Peet, *The Rhind. Mathematical Papyrus*, London, 1923). Хорошие фотографии содержат новое полное издание А. В. Chase.

рические задачи известных нам текстов, насколько мы можем себе представить, были все поставлены практикой. Пока еще не было нужды в доказательствах или построениях, но нужно было вычислить площадь земельного участка, величину уклона или объем зернового амбара. С подобного рода задачами должен был иметь дело землемер или чиновник, которым было поручено построение зернового склада, но не жрец. Вычисления с дробями, которые систематически излагаются в папирусе Ринда, находят свое применение в экономических текстах вроде Кахунского папируса*). Кому же были нужны вычисления подобного рода?

Они были нужны

Сословию царских писцов

Хорошее представление о проблемах, которыми занимались эти чиновники, дает папирус Анастаси № 1, в котором один писец насмехается над неумением другого.

[По-видимому тот, к кому обращено послание, занимает важное положение в армии; он был «военным писцом» и должен был определять, сколько солдат нужно, чтобы выкопать ров, сколько кирпичей надо для построек и пр.]**) Автор письма упрекает своего адресата за неспособность решать эти задачи без его, автора, помощи.

«Я хочу объяснить тебе, что это такое, когда ты говоришь: «Я писец, дающий приказы армии». Тебе поручено выкопать озеро. Ты приходишь ко мне, спрашиваешь о запасах для солдат и говоришь: «Сосчитай мне это». Ты оставляешь свою работу, и на мои плечи сваливается задача — учить тебя, как ее надо выполнить. Я ставлю тебя в тупик, когда приношу тебе повеление от твоего господина, тебе — его царскому писцу... мудрому писцу, поставленному во главе этого войска. Должно сделать насыпь для подъема в 730 локтей длины и 55 локтей ширины; она состоит из 120 отдельных ящиков и покрывается перекладинами и тростником. На верхнем конце она имеет высоту в 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон ее — дважды по 15 локтей, а настил — 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: «Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это для нас поскорей. Смотри, имя твое славится. Сколько же надо для этого кирпичей?»***).

*) F. L. Griffith, *Hieratic, Papyri from Kahun and Gurob*, London, 1898, стр. 15, рис. VIII.

**) Отрывок, заключенный нами в квадратные скобки, взят из немецкого издания. (Прим. перев.)

***) Перевод по Эрману (A. E r m a n, *Die Litteratur der Ägypter*, стр. 281). См. также O. N e u g e b a u e r, *The exact sciences in antiquity*, Princeton, New Jersey, 1952, стр. 79.

Совершенно тот же характер носят и задачи папируса Ринда, которые постепенно делаются все труднее. Ясно, что папирус был предназначен для преподавания в школе писцов.



Рис. 2. Писец. Известняковая статуя из Луврского музея в Париже. Древнее египетское царство, 5-я династия, ок. 2500 до н. э. Статуя полна души и «магической» жизни. Это искусство не является абстрактным в том смысле, что оно не считает важным внешнюю видимость жизни; напротив, это искусство стремится увековечить ее. Это достигается не только пластичностью всего тела, но в особенности также поразительным «реализмом» взгляда. Для того чтобы наиболее близко передать натуру, глаза составлены из различного материала: белый кварц, черное дерево и горный хрусталь.

Позднее мы более внимательно рассмотрим этот папирус. То, с чем мы должны в первую очередь познакомиться и с чего также начинается папирус Ринда, будет

ТЕХНИКА СЧЕТА

Египетская система счисления так же проста и примитивна как римская; она чисто десятичная. В иероглифах это будет:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \text{один}, & \text{III} &= \text{три}, & \text{X} &= \text{десять}, & \text{XX} &= \text{сорок}, \\ \text{C} &= \text{сто}, & \text{K} &= \text{тысяча и т. д.} \end{aligned}$$

При помощи этих знаков, ставя их в ряд один за другим, можно записывать любые числа.

Сложение этих чисел не составляет трудностей, нужно только сосчитать количество единиц, десятков, сотен и т. д. Удвоение представляет частный случай сложения и так же не трудно. Однако совершенно своеобразным является

Умножение

Оно производится при помощи удвоения и сложения полученных результатов. В качестве примера приведем умножение 12×12 по задаче № 32 риндовского папируса сначала в иероглифической записи (которую нужно читать справа налево)*), а затем в современной

$\begin{array}{r} \text{XX} \quad \text{I} \\ 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{I} \\ 1 \end{array}$	1	12
$\begin{array}{r} \text{XXX} \quad \text{XX} \\ 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{II} \\ 2 \end{array}$	2	24
$\begin{array}{r} \text{XXXX} \quad \text{XX} \\ 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III} \quad \diagup \\ 4 \end{array}$	/ 4	48
$\begin{array}{r} \text{XXXX} \quad \text{XX} \quad \text{XX} \quad \text{XX} \quad \text{XX} \quad \text{XX} \\ 441 \quad \text{dmd} \quad 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III} \quad \diagup \\ 8 \end{array}$	/ 8	96 Сумма 144

Учетверение и увосьмерение дают вместе двенадцатикратное увеличение заданного числа 12. Числа, которые надо последовательно сложить, отмечаются косой черточкой справа (в «переводе» — слева). Перед результатом 144, стоит иероглиф dmd, изображающий свиток с печатью.

*) Сам папирус написан не иероглифами, но курсивным иератическим письмом, которое, однако, можно просто перевести в иероглифическое.

Для быстроты счета иногда производится умножение на 10; иногда удесятенное число делится еще и пополам, например

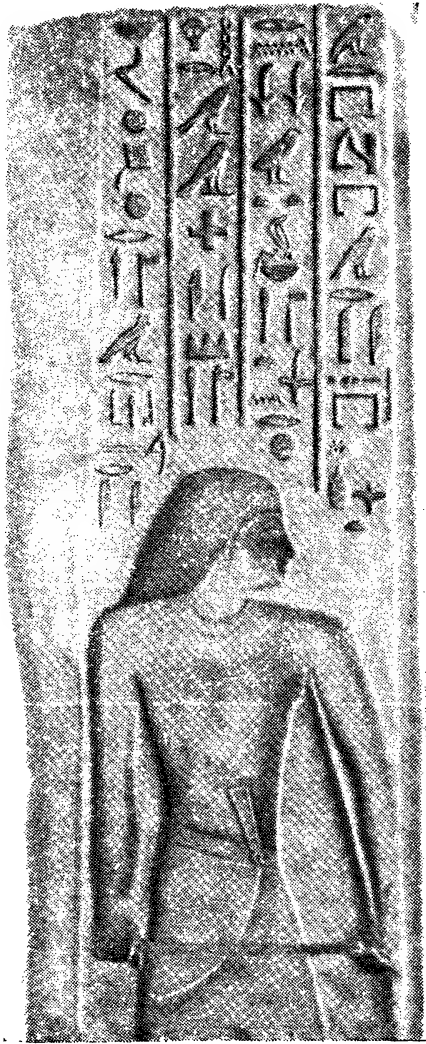


Рис. 3. Египетская стела с иероглифической надписью из мастабы (гробницы) Мери. Луврский музей в Париже. Древнее царство, 4-я династия (ок. 2600 до н. э.).

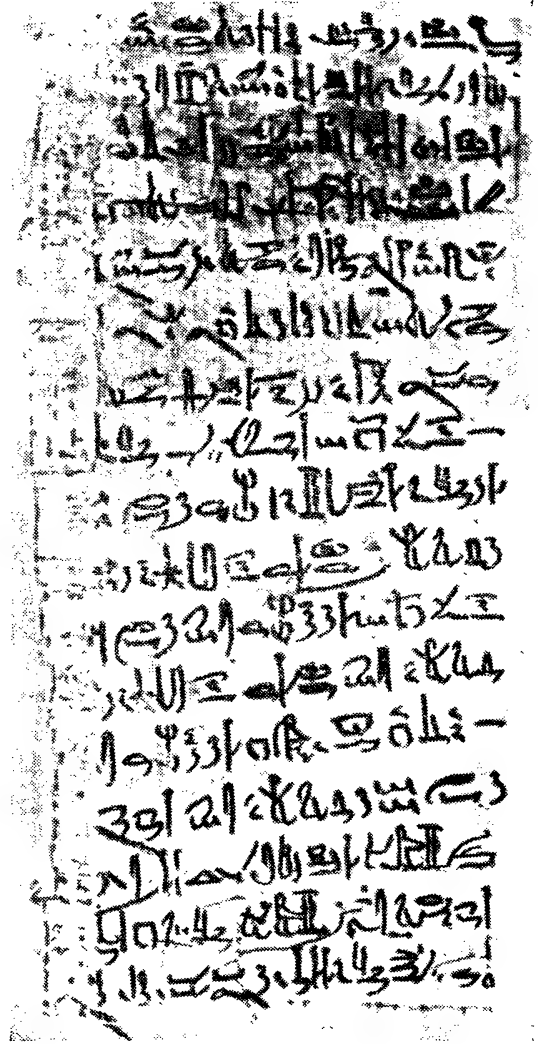


Рис. 4. Иератическое письмо. Папирус из Британского музея в Лондоне (начало 18-й династии, ок. 1480 до н. э.). Иератическое письмо представляет упрощение иероглифического: оно вошло в употребление уже в эпоху Древнего царства.

в № 6 Кахунского папируса, где 16×16 вычисляется следующим образом:

/ 1	1	16
/ 1	10	160
/ 1	5	80
Сумма		256

Этот египетский способ умножения является основой всей техники счета. Он должен быть очень древним, однако в этой форме он удержался до эллинистической эпохи и в греческих школах назывался «египетским счетом». Еще даже в средние века «duplatio» (удвоение) считалось самостоятельным действием. После него изучали деление пополам или «mediatio».

Деление

у египтян также представляет своего рода умножение, но только в обратном направлении: «Умножай 80 (буквально: складывай, начиная с 80), пока не получишь 1120» стоит в № 69 Ринда, и действие производится совершенно так же, как при умножении:

	1	80
	/ 10	800
	2	160
	/ 4	320
Сумма		<u>1120</u>

Мы должны записать этот результат как $1120 : 80 = 14$. У египтян, однако, результатом считается 1120, и это также отмечается иероглифическим знаком «свитка».

Для полного понимания дальнейшего необходимо в совершенстве овладеть египетским способом деления. Благосклонный читатель должен взять карандаш и выполнить несколько умножений по египетскому способу. Для этого ему понадобится немного времени, а затем ему будет гораздо легче стать на точку зрения египтянина.

Что же, однако, делал египтянин, когда у него деление не выходило? Тогда, точно так же как и мы, он прибегал к дробям.

Натуральные и основные дроби

В египетской науке не было дробей с числителем и знаменателем, как у нас. Существует, прежде всего, ограниченная область «натуральных» дробей, которые встречаются в повседневной жизни и для которых имеются особые названия.

Мы почти не употребляем других дробей, кроме $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, и дробей, выражаемых в процентах. На бирже еще считают с восьмыми и шестнадцатыми долями процента. Во Франции существуют еще специальные названия для трети (tiers). В древнем Египте натуральными дробями были $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, для ко-

торых имелись специальные термины. Можно также причислить к натуральным дробям еще $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$.

По мере того как техника счета совершенствовалась, область дробей распространилась на *основные дроби* (дроби с числителем, равным единице). Никаких других дробей, кроме этих, египтянин не мог написать.

Замечательно словесное выражение для $\frac{2}{3}$, которое буквально значит «две части». Дополнение «двух частей» до полной единицы называлось «третьей частью».

Так же говорили и в Греции:}

две части — $\frac{2}{3}$, третья часть — $\frac{1}{3}$,

три части — $\frac{3}{4}$, четвертая часть — $\frac{1}{4}$.

Это можно наглядно себе представить: три части и еще одна четвертая часть образуют вместе целое*). Аналогично можно объяснить наши выражения: третья, четвертая, пятая и т. д. части. В таком понимании пятая часть представляет последнюю часть, которая вместе с четырьмя другими образует полную единицу. Говоря буквально, бессмысленно говорить о «двух пятых», так как имеется только одна пятая часть, а именно последняя, подобно тому как имеется только один «третий человек».

Египтяне не допускали таких словесных непоследовательностей. Из-за этого, однако, у них не было удобного способа для записи неосновных дробей. Когда им надо было написать основную дробь, они записывали знаменатель, сопровождая его специальным знаком r = часть ():

$$\text{r} = \frac{1}{12},$$

а остальные дроби сводили к основным, например

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Только $\frac{2}{3}$ не надо было сводить к основным, потому что $\frac{2}{3}$ имели свое собственное название «две части» и собственный иероглиф . Древний значок для $\frac{3}{4}$ позднее был заменен

*) См. K. Sethe, *Von Zahlen und Zahlwörtern bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist*, Schriften Wissensch. Ges. Strassburg, 1916.

разделенным:

$$\overline{\text{X}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Если вместе с Нейгебауэром*) мы хотим понять египетское исчисление дробей, как они их понимали, то необходимо ввести письменное обозначение дробей, которое не напоминало бы нашего — с числителями и знаменателями, но было основано на египетских обозначениях. Поэтому мы будем писать вместе с Нейгебауэром $\overline{n}$ вместо $\frac{1}{n}$ и $\overline{3}$ вместо $\frac{2}{3}$.

Вычисления с натуральными дробями

производятся очень просто, если усвоить несколько простых формул, которые сами собой получаются при обозначении дробей, как, например, три следующие, находящиеся в лондонском «кожаном свитке»**):

$$\begin{aligned}\overline{6} + \overline{6} &= \overline{3}, \\ \overline{6} + \overline{6} + \overline{6} &= \overline{2}, \\ \overline{3} + \overline{3} &= \overline{3}.\end{aligned}$$

Отсюда выводятся дальнейшие соотношения, которые в папирусе Ринда применяются постоянно, как, например,

$$\overline{3} + \overline{6} = \overline{2}, \quad (1)$$

$$\overline{2} + \overline{3} + \overline{6} = 1. \quad (2)$$

Если в (1) прибавить к обеим частям по $\overline{6}$, то получится очень важная формула:

$$\overline{3} = \overline{2} + \overline{6}. \quad (3)$$

Если еще раз прибавить по $\overline{6}$ и после этого поменять местами обе части, то получатся два эквивалентных выражения для $\frac{5}{6}$:

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{3} + \overline{6}. \quad (4)$$

*) O. Neugebauer, *Arithmetik und Rechentchnik der Ägypter*, Quellen u. Studien [B] 1 (1930), стр. 301.

**) См. рис. 5, а также A. B. Chase, *The Rhind. Mathematical Papyrus*, Ohio, 1929.

Наконец, если к обеим частям (2) прибавить $\bar{6}$, то получится:

$$\bar{3} + \bar{2} = 1 + \bar{6}. \quad (5)$$

Таковы правила счета с половинами, третями и шестыми, которые каждый египетский счетчик должен был знать наизусть. В папирусе Ринда они все время употребляются без особых ука-

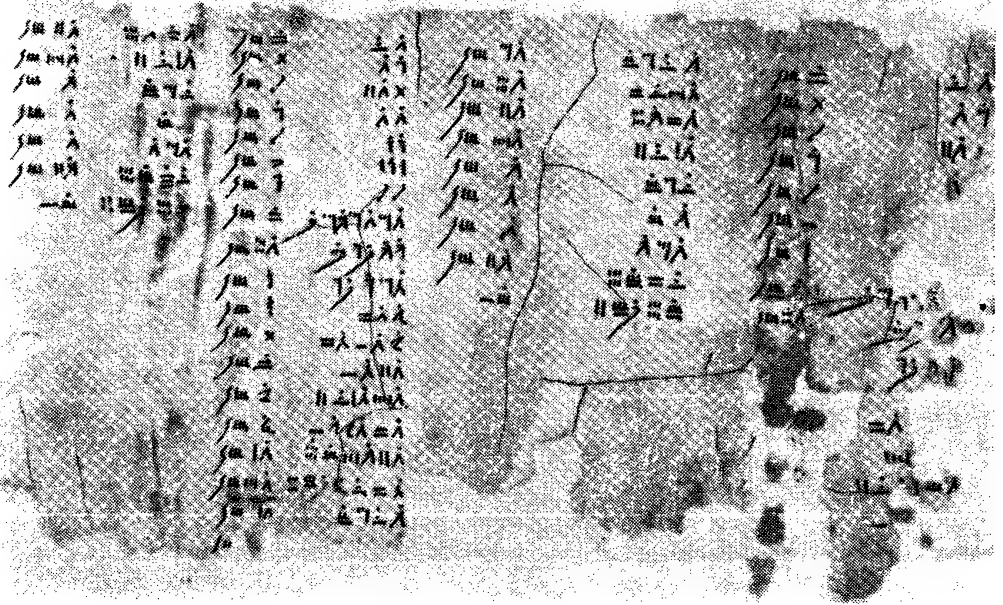


Рис. 5. Кожанный свиток Британского музея (ВМ 10250), содержащий простые соотношения между дробями. Известно, что этот свиток вместе с папирусом Ринда был найден вблизи заупокойного храма Рамзеса II в Фивах. Он датируется приблизительно 1700 до н. э. Развертывание затвердевшего свитка было очень искусным делом современной химии. Его содержание вызвало первоначально разочарование: каждая строчка содержала простые соотношения между дробями вроде $9+18=\bar{6}$, $5+20=\bar{4}$ и т. д. Однако этот кожаный свиток оказался очень ценным, так как он дал ключ к пониманию первых стадий вычислений с дробями. См. R. K. Glanville, *The mathematical leather roll in the British Museum*, *Journal Egypt. Archaeol.* 13 (1927), стр. 232 и B. L. v. d. Waerden, *Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung*, *Quellen u. Studien Gesch. Math.* [B] 4, стр. 359.

заний. Например, когда в первой фазе деления $2 : 41$ нужно образовать половину от $13 + \bar{3}$, то вместо $6 + \bar{2} + \bar{3}$ согласно (4) ставится $6 + \bar{3} + \bar{6}$. Или когда в № 31 папируса Ринда надо удвоить сумму $4 + \bar{3} + \bar{4}$, то не пишется сначала $8 + \bar{3} + \bar{2}$, но на основании (5) прямо $9 + \bar{6}$.

Формула (3) прежде всего употребляется тогда, когда нужно получить две трети от основных дробей. Например, в № 61 папируса Ринда стоит:

$$\bar{3} \text{ от } \bar{11} \text{ будет } \bar{22} + \bar{66}.$$

Дальнейшие соотношения между дробями

получаются из (1) — (5), если разделить эти равенства на 2, 3 и т. д. Так, при делении (3) на 2 получается формула кожного свитка:

$$\bar{3} = \bar{4} + \bar{12},$$

а также из (1)

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{4}.$$

То, что египтяне систематически применяли этот метод, показывает следующий ряд из кожного свитка, который получается из (1) делением на 3, 4 и т. д.

$$\bar{9} + \bar{18} = \bar{6},$$

$$\bar{12} + \bar{24} = \bar{8},$$

$$\bar{15} + \bar{30} = \bar{10},$$

$$\bar{18} + \bar{36} = \bar{12},$$

$$\bar{21} + \bar{42} = \bar{14},$$

$$\bar{24} + \bar{48} = \bar{16},$$

$$\bar{30} + \bar{60} = \bar{20},$$

$$\bar{45} + \bar{90} = \bar{30},$$

$$\bar{48} + \bar{96} = \bar{32},$$

$$\bar{96} + \bar{192} = \bar{64}.$$

Тот же самый способ дает возможность удваивать основные дроби, знаменатель которых делится на 3. Действительно, если мы перепишем соотношение (3) в виде

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$$

и разделим дроби на 3, 5 и т. д., то получится:

$$\bar{9} + \bar{9} = \bar{6} + \bar{18},$$

$$\bar{15} + \bar{15} = \bar{10} + \bar{30},$$

$$\bar{21} + \bar{21} = \bar{14} + \bar{42} \text{ и т. д.}$$

Это

Удвоение основных дробей

является в высшей степени важным для египетского счетчика. Ведь умножение для него всегда сводится к удвоению.

Для дробей с четным знаменателем удвоение производится очень просто, нужно только разделить знаменатель пополам. Вслед за этим научились удваивать дроби, знаменатель которых делится на 3, а именно, как указано, по примеру равенства

$$\bar{9} + \bar{9} = \bar{6} + \bar{18}.$$

По этому поводу может быть кто-нибудь из читателей спросит: почему же не оставить просто $\overline{9} + \overline{9}$?

Причина этого станет ясной, если подумать о значении указанной записи для дальнейшего вычисления. Если еще раз удвоить $\overline{9} + \overline{9}$, то получится $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$, а при третьем удвоении мы должны будем иметь $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$. Подобное бессмысленное накопление основных дробей приносит мало пользы. Египтяне считали так:

1	$\overline{9}$
2	$\overline{6} + \overline{18}$
4	$\overline{3} + \overline{9}$
8	$\overline{3} + \overline{6} + \overline{18}$.

Получаются только такие выражения, с которыми удобно обращаться и в которых вместе с такими натуральными дробями, как $\overline{3}$, $\overline{6}$, порядок которых легко обозрим и счет с которыми весьма удобен, только очень редко встречаются основные дроби с большими знаменателями.

Далее можно было бы еще возразить, что египтяне могли бы придумать для $\overline{9} + \overline{9}$ и $\overline{9} + \overline{9} + \overline{9} + \overline{9}$ более простые обозначения вроде нашей записи с числителем и знаменателем.

На это мы должны ответить, что египтяне нимало не походили на современных ученых, которые для каждого часто встречающегося выражения сразу вводят сокращенное обозначение. Они были в высшей степени консервативны и крепко держались древних традиций и укоренившихся письменных обозначений. В египетских документах, например, в течение тысячелетий постоянно говорилось об «обоих царствах», хотя Верхний и Нижний Египты уже давно слились в единое царство.

Что же делалось, когда знаменатель не делился ни на 2 ни на 3? Чтобы понять это, мы должны рассмотреть

Еще раз деление

Вот взятые из папируса Ринда три примера делений, которые «не выходят».

(№ 24)	19 : 8	(№ 25)	16 : 3	(№ 21)	4 : 15
	1 8		/ 1 3		1 15
	/ 2 16		2 6		$\overline{10}$ 1 + $\overline{2}$
	$\overline{2}$ 4		/ 4 12		/ $\overline{5}$ 3
	/ $\overline{4}$ 2		$\overline{3}$ 2		/ $\overline{15}$ 1
	/ $\overline{8}$ 1		/ $\overline{3}$ 1		Частное 5 + $\overline{15}$
	Частное 2 + $\overline{4}$ + $\overline{8}$		Частное 5 + $\overline{3}$		

В № 24 нужно «считать с 8, пока не получится 19». Удвоение 8 дает 16, теперь остается еще 3. После этого 8 делится пополам и еще раз пополам. Четвертая и восьмая доли вместе как раз и дают недостающие 3.

Вместо приведенного здесь ряда дробей $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{8}$ большей частью употребляется другая последовательность $\bar{3}$, $\bar{3}$, $\bar{6}$. Так делается в № 25, где сначала производится удвоение и учетверение, а затем берутся $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ от 3.

Особенностью египетских счетчиков является то, что они не сразу берут $\bar{3}$, но сначала должны написать $\bar{\bar{3}}$. Последовательность дробей $\bar{\bar{3}}$, $\bar{3}$, $\bar{6}$..., очевидно, освящена крепкой традицией.

В № 21 — может быть, для более быстрого получения малых чисел — сначала берется $\frac{1}{10}$, затем она удваивается и, наконец, к ней прибавляется еще $\frac{1}{15}$. Таким изящным способом получается требуемая сумма $3 + 1 = 4$.

Может быть, читатель захочет сам решить при помощи этого метода задачи №№ 3—6 из папируса Ринда? Задачи таковы: разделить 6, 7, 8 и 9 хлебов между 10 людьми. Египетские ответы: каждому $\bar{2} + \bar{10}$, каждому $\bar{\bar{3}} + \bar{30}$, каждому $\bar{\bar{3}} + \bar{10} + \bar{30}$, каждому $\bar{\bar{3}} + \bar{5} + \bar{30}$.

ТАБЛИЦА (2 : n)

Поставленный выше вопрос об удвоении дробей вроде $\bar{5}$ и $\bar{7}$ получает ответ в таблице (2 : n), стоящей в начале папируса Ринда.

Решение основывается на столь же простом, сколь и плодотворном правиле: *для вычисления $2\bar{n}$ делят 2 на n*.

Для нас кажется очевидным, что $\frac{2}{5}$ и $2 : 5$ — это одно и то же. Для египтян, однако, дело обстояло не так, потому что задача удвоения $\bar{5}$ представляет нечто совершенно иное, чем задача деления: «считай с 5, пока не получишь 2». Таким образом, решение задачи удвоения $\bar{n}$ при помощи деления 2 на n было поистине новой мыслью.

Мы не знаем, в чьей голове и в какую эпоху появилась впервые эта мысль. Наверное, задолго до того времени, когда появились наши тексты, так как таблица 2 : n из папируса Ринда, охватывающая все нечетные числа от $n=3$ до $n=101$, появилась насколько мы можем судить, не сразу: отдельные ее части вычислялись различными способами. Самую древнюю часть составляют знаменатели, которые делятся на 3; все частные без исключения

получены по одному и тому же особому правилу:

$$2 : 9 = \bar{6} + \bar{18},$$

$$2 : 15 = \bar{10} + \bar{30},$$

$$2 : 21 = \bar{14} + \bar{42}.$$

Для этих знаменателей, кратных 3, деление $2 : 3k$ представляет только подтверждение уже известного нам результата. Для других (по крайней мере, начиная с $n = 11$) задача удвоения, по-видимому, действительно решалась при помощи настоящего деления 2 на n . Эти деления в тексте записываются более или менее подробно, как, например, в следующих образцах ($2 : 5$ и $2 : 7$):

«Какая часть от 5 будет 2? $\bar{3}$ будет $1 + \bar{3}$, $\bar{15}$ будет 3 (т. е. треть 5 будет $1 + \bar{3}$, пятнадцатая доля 5 будет $\bar{3}$) вместе это будет 2». Таким образом, в результате указанного деления получается $\bar{3} + \bar{15}$; члены $\bar{3}$ и $\bar{15}$ сразу бросаются в глаза тем, что они написаны красным. В нашем «переводе» красные цифры напечатаны жирным шрифтом.

«Вычисление:

$$\begin{array}{r} 1 \qquad 5 \\ \bar{3} \qquad 3 + \bar{3} \\ / \bar{3} \qquad 1 + \bar{3} \\ / \bar{15} \qquad \bar{3} \text{ »} . \end{array}$$

«Какая часть от 7 будет 2? $\bar{4}$ будет $1 + \bar{2} + \bar{4}$, 28 будет 4.

Вычисление:

$$\begin{array}{r} 1 \qquad 7 \\ 2 \qquad 3 + \bar{2} \qquad \bar{1} \quad 7 \\ / \bar{4} \qquad 1 + \bar{2} + \bar{4} \qquad 2 \quad 14 \\ / 4 \quad \bar{28} \qquad \bar{4} \qquad / 4 \quad 28 \text{ »} . \end{array}$$

Таким образом продолжают далее. При делении 2 на 5, 9, 11, 17, 23, 29 и еще на некоторые большие числа употребляется $\bar{3}$ -последовательность, т. е. ряд дробей $\bar{3}$, $\bar{3}$, $\bar{6}$, $\bar{12}$, ..., при делении на 7 и 13 применяется, однако, $\bar{2}$ -последовательность ($\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{8}$, ...). Действительно, можно заметить, что только в этих двух случаях $\bar{2}$ -последовательность дает более простой результат, чем $\bar{3}$ -последовательность. Например, для $2 : 11$ при помощи $\bar{2}$ -последовательности получился бы результат $2 : 11 = \bar{8} + \bar{22} + \bar{88}$,

но $\bar{3}$ -последовательность дает $2:11 = \bar{6} + \bar{66}$ с меньшими знаменателями и меньшим числом членов, а это, вероятно, оказывается предпочтительнее.

Приведенные вычисления говорят сами за себя. Для деления $2:7$ написанное впереди число 4 показывает, каким образом, получился знаменатель 28, т. е. как 4×7 , а подробности указаны во вспомогательном вычислении*).

Результаты делений $2:n$ можно сопоставить в следующей таблице, где ради краткости опущены знаменатели, кратные 3, ибо с ними все идет по правилу $2:3k = 2k + \bar{6}k$:

$$\begin{aligned} 2:5 &= \bar{3} + \bar{15} \\ 2:7 &= \bar{4} + \bar{28} \\ 2:11 &= \bar{6} + \bar{66} \\ 2:13 &= \bar{8} + \bar{52} + \bar{104} \\ 2:17 &= \bar{12} + \bar{51} + \bar{68} \\ 2:19 &= \bar{12} + \bar{76} + \bar{114} \\ 2:23 &= \bar{12} + \bar{276} \\ 2:25 &= \bar{15} + \bar{75} \\ 2:29 &= \bar{24} + \bar{58} + \bar{174} + \bar{232} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2:31 &= \bar{20} + \bar{124} + \bar{155} \\ 2:35 &= \bar{30} + \bar{42} \\ 2:37 &= \bar{24} + \bar{111} + \bar{296} \\ 2:41 &= \bar{24} + \bar{246} + \bar{328} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2:43 &= \bar{42} + \bar{86} + \bar{129} + \bar{301} \\ 2:47 &= \bar{30} + \bar{141} + \bar{470} \\ 2:49 &= \bar{28} + \bar{196} \end{aligned}$$

$$2:51 = \bar{34} + \bar{102}$$

$$\begin{aligned} 2:53 &= \bar{30} + \bar{318} + \bar{795} \\ 2:55 &= \bar{30} + \bar{330} \\ 2:59 &= \bar{36} + \bar{236} + \bar{531} \\ 2:61 &= \bar{40} + \bar{244} + \bar{488} + \bar{610} \\ 2:65 &= \bar{39} + \bar{195} \\ 2:67 &= \bar{40} + \bar{335} + \bar{536} \\ 2:71 &= \bar{40} + \bar{568} + \bar{710} \\ 2:73 &= \bar{60} + \bar{219} + \bar{292} + \bar{365} \\ 2:77 &= \bar{44} + \bar{308} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2:79 &= \bar{60} + \bar{237} + \bar{316} + \bar{790} \\ 2:83 &= \bar{60} + \bar{332} + \bar{415} + \bar{498} \\ 2:85 &= \bar{51} + \bar{255} \\ 2:89 &= \bar{60} + \bar{356} + \bar{534} + \bar{890} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2:91 &= \bar{70} + \bar{130} \\ 2:95 &= \bar{60} + \bar{380} + \bar{570} \\ 2:97 &= \bar{56} + \bar{679} + \bar{776} \end{aligned}$$

$$2:101 = \bar{101} + \bar{202} + \bar{303} + \bar{606}.$$

Начиная с $2:31$ стиль меняется: вычисления даются в сокращенном виде. Но, что еще важнее; меняется также и метод вычисления, появляется и другая идея. Действительно, в то время как до сих пор при делении применялись исключительно $\bar{2}$ -последовательность и $\bar{3}$ -последовательность, теперь деления

*) Более полное обоснование изложенного здесь толкования таблицы ($2:n$), а также дальнейшую литературу см. В. L. vander Waerden, *Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung*, Quellen u. Studien Gesch. Math. [B] 4 (1938), стр. 359.

2 : 31 и 2 : 35 выполняются иначе:

«Какая часть 31 будет 2? $\overline{20}$ будет $1 + \overline{2} + \overline{20}$, $\overline{124}$ будет 4 , $\overline{155}$ будет $\overline{5}$.

$$\begin{array}{r} \text{Вычисление: } 1 \quad 31 \\ \overline{20} \quad 1 + \overline{2} + \overline{20} \\ / 4 \quad \overline{124} \quad \overline{4} \\ / 5 \quad \overline{155} \quad \overline{5} \end{array}$$

Какая часть 35 будет 2? $\overline{30}$ будет $1 + \overline{6}$, $\overline{42}$ будет $\overline{3} + \overline{6}$.

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 5 \\ \text{Вычисление: } 1 \quad 35 \\ \overline{30} \quad 1 + \overline{6} \\ \overline{42} \quad \overline{3} + \overline{6} \end{array}$$

Как начинается вычисление 2 : 31, можно легко понять: если разделить 31 на 10 и затем взять половину, то получится, что $\frac{1}{20}$ от 31 будет $1 + \overline{2} + \overline{20}$. Теперь эту дробь следует дополнить до 2. Каким же образом счетчик дошел до мысли, что остаток будет равен $\overline{4} + \overline{5}$? Это поразительно, так как, следуя данным кожного свитка, мы получаем $\overline{20} + \overline{5} = \overline{4}$, а $1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{4}$ будет естественно 2. Однако, каким образом получаются дополнения $1 + \overline{2} + \overline{20}$ до 2? Для этого потребовалось новое вспомогательное средство, а именно,

КРАСНЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В приведенном нами вычислении 2 : 35 появляются вспомогательные числа, значение которых нельзя недооценить, а именно, красное (напечатанное жирным шрифтом) число 6 и следующие за ним 7 и 5. Они обратно пропорциональны стоящим наверху числам 35, 30 и 42 и, следовательно, пропорциональны дробям $\frac{35}{30}$, $\frac{30}{42}$. По правилам современной арифметики мы должны были бы получить эти числа в виде числителей, если бы нам пришлось привести эти три дроби к одному знаменателю, а именно 210. В современных обозначениях получим следующее:

$$\frac{2}{35} = \frac{12}{210} = \frac{7}{210} + \frac{5}{210} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42},$$

что совпадает с полученным египтянами результатом деления

$$2 : 35 = \overline{30} + \overline{42}.$$

Таким образом, отсюда можно видеть, что эти вспомогательные числа представляют нечто вроде числителей дробей, которые были приведены к одному знаменателю.

Однако не следует просто вычитывать из древних текстов эти современные представления. Более подробно относительно значения этих вспомогательных чисел и роли, которую они играли, мы узнаем из вычислений «дополнения» (исчисление *sekem*) в папирусе Ринда, которое мы должны рассмотреть.

Дополнение суммы дробей до 1

Это — задача, которая постоянно встречается при египетских делениях. В вышеприведенном делении $2 : 31$ нужно было дополнить сумму $\bar{2} + \bar{20}$ до 1; решение $\bar{4} + \bar{5}$ отнюдь не очевидно. Поэтому не следует удивляться, что подобного рода дополнения специально разбираются в папирусе Ринда.

В задаче № 21 мы читаем:

«Чем $\bar{3} + \bar{15}$ дополняется до 1?

10 1 сумма 11, остаток 4.

Считай с 15, пока не получишь 4 (т. е. раздели 4 на 15).

$\bar{10}$	15
$/ \bar{5}$	$1 + \bar{2}$
$/ \bar{15}$	3
Сумма	1
	4 .

Таким образом, $\bar{5} + \bar{15}$ есть требуемое дополнение. После этого следует контрольное вычисление.

Красные вспомогательные числа 10 и 1 представляют числители дробей $\bar{3}$ и $\bar{15}$, если привести последние к общему знаменателю. Их сумма равна 11; следовательно, для получения полных $\frac{15}{15}$ не хватает еще $\frac{4}{15}$. Это вычисление в дальнейшем и проводится.

Однако наше толкование вспомогательных чисел как «числителей» не всегда правильно, как можно видеть из № 23, где в качестве вспомогательных выступают дробные числа:

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{4} & +\bar{8} & +\bar{10} & +\bar{30} & +\bar{45} & \text{нужно дополнить до } \bar{3} \\ 11+\bar{4} & 5+\bar{2}+\bar{8} & 4+\bar{2} & 1+\bar{2} & 1. & & & & \end{array}$$

Искомое дополнение будет $\bar{9} + \bar{40}$.

Проверка:

$\bar{4}$	$+\bar{8}$	$+\bar{9}$	$+\bar{10}$	$+\bar{30}$	$+\bar{40}$	$+\bar{45}$	$+\bar{3}$
$11+\bar{4}$	$5+\bar{2}+\bar{8}$	5	$4+\bar{2}$	$1+\bar{2}$	$1+\bar{8}$	1	15
Сумма = 1.							

Вычисление не показано, но восполнить его нетрудно. Если данные дроби привести к новому «знаменателю» 45, то сумма «числителей» будет

$$(11 + \bar{4}) + (5 + \bar{2} + \bar{8}) + (4 + \bar{2}) + (1 + \bar{2}) + 1 = 23 + \bar{2} + \bar{4} + \bar{8}.$$

До 30 не хватает еще $6 + \bar{8}$. Деление $6 + \bar{8}$ на 45 и дает в качестве частного $\bar{9} + \bar{40}$.

Как правило, в качестве нового знаменателя берется знаменатель наименьшей дроби, в нашем случае 45. О «числителе» в смысле целого числа, которое «исчисляет» сорок пять части, здесь не может быть и речи. Правильнее было бы описать дело так:

Когда труднообозримую сумму дробей нужно сравнить с другой суммой или дополнить ее до 1, то наименьшую дробь берут в качестве новой единицы и выражают через нее все остальные дроби. Или еще проще и практичнее: Переход от заданных величин к вспомогательным числам совершается при помощи умножения на наибольший знаменатель (в нашем случае 45), а обратный процесс — при помощи деления на этот знаменатель. Кто поймет это простое правило, овладеет и всей техникой вычислений со вспомогательными числами.

Вычисления со вспомогательными числами составляют вершину и последний шаг египетской техники счета. При помощи этого метода вычисления можно произвести любое деление, независимо от его сложности.

Возьмем еще один пример*). Кто не хочет, может не считать с нами; но вы все-таки должны посмотреть, как это изящно.

Деление 37: $(1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7})$

выполняется в задаче № 33 папируса Ринда следующим образом:

1	$1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7}$
2	$4 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$ (так как $2 \cdot \bar{7} = \bar{4} + \bar{28}$)
4	$9 + \bar{6} + \bar{14}$ (так как $\bar{3} = \bar{2} + \bar{6}$)
8	$18 + \bar{3} + \bar{7}$
/ 16	$36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$
	28 $10\frac{1}{2}$ $11\frac{1}{2}$

*) Весь этот пример, вплоть до раздела «Вычисления аха», опущен в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

Сумма $36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$ подходит очень близко к 37. Сколько еще не хватает? Чтобы дополнить до 1 сумму дробей $\bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$, пользуются вспомогательными числами. В этом случае в качестве нового знаменателя берется, однако, не 28, а 42. Почему? Как должно показать дальнейшее вычисление, не так важно, чтобы все вспомогательные числа были целыми, сколько то, чтобы была целой сумма вспомогательных чисел, относящихся к делителю $1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7}$. Этого нельзя достигнуть со знаменателем 28, но можно с 42.

Каким образом были найдены красные числа 28, $10 \frac{1}{2}$ и $1 \frac{1}{2}$, а именно при помощи умножения на 42, текст позволяет видеть во всех подробностях:

	1	42
/	$\bar{3}$	28
	$\bar{2}$	21
/	$\bar{4}$	$10 + \bar{2}$
/	$\bar{28}$	$1 + \bar{2}$

Текст продолжает: сумма 40, остаток 2 (т. е. сумма вспомогательных чисел $28 + (10 + \bar{2}) + (1 + \bar{2})$ будет 40, единица содержит 42 вспомогательные единицы, таким образом, еще не хватает 2). Чтобы получить эти 2, в дальнейшем делитель $1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7}$ выражается во вспомогательных единицах:

/	1	42
/	$\bar{3}$	28
/	$\bar{2}$	21
/	$\bar{7}$	6
Сумма		97

Таким образом, делитель содержит 97 вспомогательных единиц. Следовательно, его 97-я часть представляет одну вспомогательную единицу, т. е. $\bar{42}$. Теперь остается только удвоить это и получатся требуемые две вспомогательные единицы, или $\bar{21}$. Текст продолжает так:

$\bar{97}$	$\bar{42}$	1
$\bar{56} + \bar{679} + \bar{776}^*)$	$\bar{21}$	2

Тем самым деление выполнено. Частное будет $16 + \bar{56} + \bar{679} + \bar{776}$.

*) Удвоенная дробь $\bar{97}$ согласно таблице 2 : n.

Задача №33, решение которой получилось при помощи этого деления, гласила: « $\frac{2}{3}$ некоторого числа, половина его, седьмая часть и само это число дают вместе 37». Эта задача принадлежит к классу так называемого

ВЫЧИСЛЕНИЯ «АХА»

Египетское слово 'h', которое ранее неправильно выговаривалось «хау», а в настоящее время немного менее неправильно произносится «аха», обозначает «количество, множество».

Вычисление «аха» приблизительно соответствует нашим уравнениям первой степени с одним неизвестным. Простой пример дает задача № 26 Ринда:

«Количество и его четвертая часть дают вместе 15». Египетское решение начинается так:

«Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5».

Затем производится деление $15 : 5 = 3$ и в заключение умножение $4 \cdot 3 = 12$. Требуемое «количество» будет, таким образом, 12, его четверть 3, сумма 15..

Примененный метод является, очевидно, методом ложного положения; начинают с того, что в качестве «количества» берут некоторое произвольное число, в нашем случае 4, для которого легко вычислить четвертую часть. Четыре и четвертая часть 4 дают вместе 5, однако, результат должен равняться 15, следовательно, взятое «количество» следует еще умножить на $15 : 5 = 3$.

Это толкование кажется мне самым естественным. Я, однако, должен заметить, что Нейгебауэр объявляет употребление «ложного положения» легендой и указывает для решения «считай с 4, возьми их четверть 1, вместе 5» понимает иначе, т. е. как счет со вспомогательными числами:

$$1 + \overline{4}$$

$$4 + 1 = 5 *).$$

Мне, однако, кажется, что предположение о вспомогательных числах не выдерживает критики, так как деление

$$15 : (1 + \overline{4})$$

можно легко выполнить и без них.

*) См. O. Neugebauer, *Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter*, Quellen u. Studien [B] 1 (1931), стр. 333.

Иногда «количество» полагают сначала равным 1. Пример в задаче № 37 Ринда:

«Три раза вхожу я в шефель*); моя третья часть и треть моей трети и моя девятая часть добавляются ко мне, и вот я уже выхожу целым (т. е. шефель уже полон). Чем же буду я, говорящий тебе это?»

Ответ:

	1	1
	2	2
	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ от его $\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{9}$
его $\bar{9}$	$\bar{9}$	
сумма	$3 + \bar{2} + \bar{18}$ (так как $\bar{9} + \bar{9} = \bar{6} + \bar{18}$).	

Раздели 1 на $3 + \bar{2} + \bar{18}$:

1	$3 + \bar{2} + \bar{18}$
$\bar{2}$	$1 + \bar{2} + \bar{4} + \bar{36}$
$/ \bar{4}$	$\bar{2} + \bar{4} + \bar{8} + \bar{72}$
$\bar{8}$	$\bar{4} + \bar{8} + \bar{16} + \bar{144}$
$\bar{16}$	$\bar{8} + \bar{16} + \bar{32} + \bar{288}$
$/ \bar{32}$	$\bar{16} + \bar{32} + \bar{64} + \bar{576}$.

Теперь в дело вступают вспомогательные числа: сумма $\bar{2} + \bar{4} + \bar{8} + \bar{16} + \bar{32} + \bar{64} + \bar{576}$ должна быть дополнена до 1. Вспомогательные числа указывают, что последние пять дробей вместе дают как раз $\bar{8}$:

$\bar{72}$	$\bar{16}$	$\bar{32}$	$\bar{64}$	$\bar{576}$	сумма $\bar{8}$
8	36	18	9	1	72

Таким образом, сумма всех дробей равняется 1; следовательно в результате деления получается $\bar{4} + \bar{32}$. В поверочном вычислении $\bar{4} + \bar{32}$ берется три раза, затем от этого числа берется третья часть, треть этой трети и девятая часть, и при помощи вспомогательных чисел показывается, что сумма действительно равна 1.

К группе исчисления «аха» относится также первая задача берлинского папируса 6619**), при решении которой нужно даже прибегать к квадратным корням. Текст гласит:

«Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{3}{4}$ (в тексте, конечно, стоит $\bar{2} + \bar{4}$) стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это».

*) Шефель—старая голландская мера емкости. В английском переводе стоит «бушель», в немецком эта задача опущена. Дело идет о решении уравнения $3x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x = 1$. (Прим. перев.)

**) Schack-Schakenburg, Ägypt. Z. 38 (1900), стр. 138; 40 (1900), стр. 65.

Решение начинается, без всякого сомнения, с ложного положения.

«Возьми квадрат со стороной 1, и возьми $\frac{3}{4}$ от 1, то есть $\bar{2} + \bar{4}$ в качестве стороны второй площади. Помножь $\bar{2} + \bar{4}$ на самого себя; это дает $\bar{2} + \bar{16}$. Поскольку сторона первой площади взята за 1, а второй за $\bar{2} + \bar{4}$, то сложи обе площади вместе; это даст $1 + \bar{2} + \bar{16}$. Возьми корень отсюда: это будет $1 + \bar{4}$. Возьми корень из данных 100: это будет 10. Сколько раз входит $1 + \bar{4}$ в 10? Это входит 8 раз».

Далее текст уже прочесть нельзя, но конец нетрудно отгадать: $8 \cdot 1 = 8$ и $8 \cdot (\bar{2} + \bar{4}) = 6$ будут стороны обоих искомых квадратов.

Вычисления «аха» составляют высшую ступень египетской арифметики. Дальше уравнений первой степени и простых квадратных уравнений с одним неизвестным египтяне не имели возможности пойти: для этого их техника счета была слишком первобытна и кропотлива.

Вычисления «аха» не были вызваны нуждами практики: они выросли из чисто теоретического интереса египетских вычислителей. Они, очевидно, придуманы людьми, которым нравился самый процесс счета и которые давали своим ученикам действительно трудные задачи для упражнений. Как и всякое искусство, искусство счета имеет тенденцию к развитию.

Немало места в папирусе Ринда занимают

ПРИКЛАДНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ,

как, например, «вычисления песу», которые относятся к определению количества зерна, необходимого для приготовления пива и хлеба. Технический термин «песу» — припек — обозначает число хлебов или кружек пива, которые можно приготовить из одного шефеля зерна. Таким образом, речь идет о следующих соотношениях:

(количество зерна) $\times$ (песу) = числу хлебов (или соответственно кружек пива)
 песу = (числу хлебов) : (количество зерна).

Частное представляет собой «содержание» зерна в буханке хлеба или «крепость» пива.

При помощи этих простых соотношений можно просто решать все задачи «песу», пока не встречается никаких затруднений, вызванных различием в сортах зерна; для этих случаев существовали переводные коэффициенты, которые вычислитель должен был знать. Соответствующие задачи могли быть еще усложнены тем, что происходил обмен хлебов разного припека и т. д.

Другие задачи относились к переводу мер веса или емкости в другие единицы, к вычислению количества корма, распределению заработной платы и т. п.

Попробуем теперь составить представление о

РАЗВИТИИ ТЕХНИКИ СЧЕТА

и дать ему место в истории цивилизации.

Вначале египтяне, как и все народы, располагали известным небольшим запасом целых чисел, вполне удовлетворявшим их в нуждах обыденной жизни, и также ограниченным количеством «натуральных» дробей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$. Однако эта первобытная стадия счета принадлежит предыстории; история счетной техники начинается с расширением этого первоначального запаса чисел в обоих направлениях. Это расширение понадобилось, когда пришлось организовывать царство, командовать армией и собирать налоги. Действительно, среди памятников эпохи первой династии мы уже находим знак для 100 000. В эпоху Древнего царства существовал также знак для миллиона, который, однако, исчез во время Нового царства.

Египетский счетчик мыслит, по существу, аддитивно, при помощи сложения. Дробь он пишет в виде сумм основных дробей. Умножение представляет для него род сложения; технический термин для умножения таков: «прибавляй, начиная с...».

Египетское умножение представляет типичное письменное действие. Поэтому оно и не может быть древнее, чем самая запись чисел. Но оно, с другой стороны, не может быть и много моложе, чем искусство письма, так как для вычисления количества зерна, необходимого для войска, для подсчета денег*), для определения материала на постройку пирамиды умножение было необходимо.

Таким образом, развитие арифметики шло очень медленно: оно занимает все время от изобретения искусства письма до Среднего царства, т. е. многие века. Можно отметить различные фазы этого развития, но нет возможности их датировать. Все это могло идти так:

Из умножения возникло само собой деление, которое всегда является задачей, обратной умножению. Но деление требует, однако, вычислений с дробями; таким образом, деление повело к дальнейшему развитию вычислений, появились действия с дробями. В результате выяснились первые соотношения между натуральными дробями. Деление пополам создало дальнейшие пра-

*) В подлиннике «Vereiste hoeveelheden geld» — необходимые количества денег. В Древнем, Среднем и Новом царствах Египта денег в нашем смысле не существовало. (Прим. перев.)

вила счета. Из $\overline{3} = \overline{2} + \overline{6}$ при помощи деления на три, пять и т. д. получились правила для удвоения основных дробей типа $\overline{3n}$. Заключительным шагом было открытие, что каждую основную дробь $\overline{n}$ можно удвоить при помощи деления 2 на n ; так возникла первая треть таблицы ($2 : n$).

Теперь стали возможны все более и более сложные вычисления, для которых потребовался последующий контроль и понадобился способ сравнения сумм основных дробей; и, в частности, нужно было научиться дополнять эти суммы до единицы. Эта потребность заставила ввести счет со вспомогательными числами. При их помощи можно было выполнить любое деление, решить каждую задачу «аха», как бы хитро ни была она поставлена.

Весь ход развития можно вполне представить себе, не прибегая к

ГИПОТЕЗЕ О ВЫСШЕЙ НАУКЕ,

для которой имеющиеся у нас тексты должны были представлять только «первую фазу», как, например, полагает Жиллэн*).

О высшей науке такого рода мы ровно ничего не знаем и в ней нет надобности, так как мы и без такой гипотезы можем объяснить все существенные пункты в развитии математики.

Под влиянием греческих писателей нередко представляют себе, что уровень египетской геометрии и астрономии был очень высок. Теперь, когда мы немного лучше знаем египетскую астрономию, становится ясно, что даже в римскую эпоху — время расцвета астрологии — египетская астрономия отставала от греческой и вавилонской астрономии**).

Но как же обстояло дело с геометрией?

ГЕОМЕТРИЯ ЕГИПТЯН

Мы должны указать, что египетская геометрия отнюдь не являлась наукой в греческом смысле этого слова; она была просто *прикладной арифметикой*. В то время как в других арифметических задачах дело идет о расчете заработной платы, о хлебе или пиве и т. д., в геометрических задачах выступает на первый план

*) O. Gillain, *L'arithmetique au Moyen Empire*, Brussel, 1927.

**) O. Neugebauer u. A. Volten, *Ein demotischer astronomischer Papyrus*, Quellen u. Studien [B] 4 (1938), стр. 383.

O. Neugebauer, *Egyptian planetary texts*, Trans. Amer. philos. Soc. 32 (1931), стр. 209.

B. L. v. d. Waerden, *Egyptian «eternal tables»*, Proc. Kon. Acad. Amsterdam 50 (1947), стр. 536 и 782.

вычисление поверхностей или объемов. Конечно, в обоих случаях вычислитель должен был знать правила, по которым следовало производить вычисление. Но что касается систематического вывода правил для этих расчетов, то о них нет речи, да и не может идти, ибо часто (как, например, при определении площади круга) употребляются только приближенные формулы.

Аналогия между геометрическими задачами и задачами на определение качества хлеба или пива, прежде всего, становится несомненной при определении

Подъема наклонных плоскостей

Задача № 36 Ринда: «Образец для вычисления пирамиды. 360 — сторона ее основания, 250 — высота, дай мне узнать ее скат (*škd*)». Если угодно, можно произносить *škd* как «секед».

Вычисление: половина $360 = 180$.

$180 : 250 = \bar{2} + \bar{5} + \bar{50}$ локтя. Это частное теперь еще умножается на 7, так как 1 локоть имеет 7 пядей. Результат: наклон равняется $5 + \bar{25}$ пядей.

Как следует из вычисления, «секед», или скат, есть не что иное, как число пядей, на которое наклонная линия отходит от вертикали при подъеме на 1 локоть. Таким образом, «секед» наклонной плоскости является в точности аналогичным «песу» хлеба или пива. Трудности в этих задачах заключаются не в геометрии, а в вычислениях.

Площади

треугольников, прямоугольников и трапеций вычислялись на основании правильных формул. Основание треугольника делилось пополам, «дабы треугольник стал прямоугольником», затем множилось на высоту. Точно так же для трапеций сумма параллельных сторон делилась пополам и множилась на высоту. Подобным же образом вычислялись и другие площади.

В перечнях пожертвований храму Гора и Эдфу указаны площади большого числа треугольников и четырехугольников*). Четырехугольники вычислялись следующим образом: полусумма двух противоположных сторон помножалась на полусумму двух других противоположных сторон. Формула, естественно, неправильна: верное решение получается, только если четырехугольник является прямоугольником.

*) K. R. Lepsius, Abh. preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phil. hist. Abt., 1855, стр. 69.

Для вычисления площади круга египтяне возвышали в квадрат $\frac{8}{9}$ его диаметра. Это соответствует очень хорошему приближенному значению:

$$\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1605 \dots$$

Большой заслугой египтян является одно это прекрасное приближение; действительно, вавилоняне, которые в научном отно-

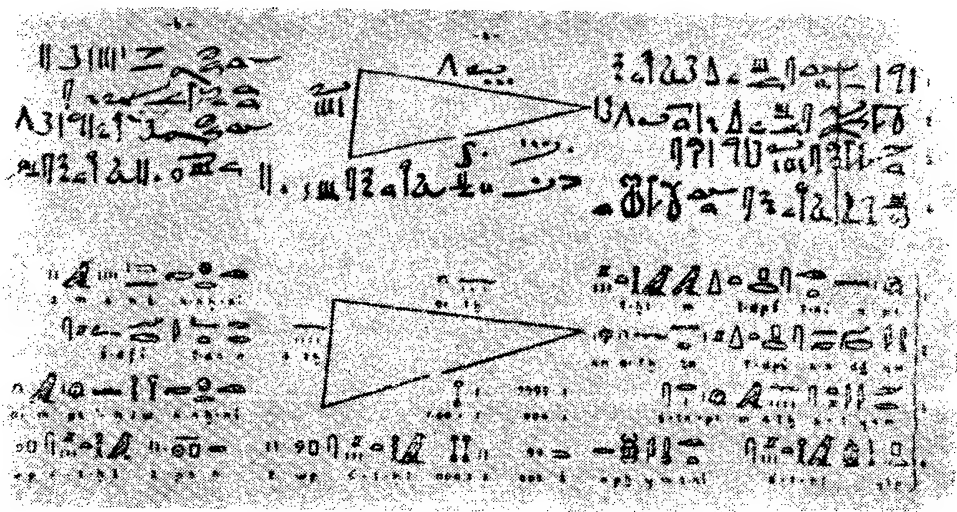


Рис. 6. Rhind 51. Площадь треугольника (Из А. В. Часае, *The Rhind. Mathematical Papyrus II*).

шении стояли на более высокой ступени, пользовались значением $\pi = 3$, которое принимает также Витрувий*) и которое имеется в китайской литературе**). У евреев это значение π было даже

*) См. «Десять книг об архитектуре Витрувия с комментарием Даниэли Барбаро», перев. В. П. Зубова и Ф. А. Петровского, М., 1938, стр. 369. (Прим. перев.).

**) Китайская «Математика в девяти отделах» (примерно первая половина 2-го века до н. э.) дает $\pi = 3,0$. В начале 2-го века н. э. (Чжан-Хэн) уже предполагалось $\pi = \sqrt{10}$ (позднее у индийцев Брахмагупта), в 3-м веке Лю-Хуэй дает $\pi = \frac{157}{50} = 3,14$; в 5-м веке Цзу-Чун-чжи пришел к неравенствам

$3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Он же дал известное приближение $\pi = \frac{355}{113}$, позднее (16-й век), появившееся снова в Европе. Только Гиясэддин в 15-м веке нашел лучшее приближение: $\pi = 3,14159\ 26535\ 897832$. (См. А. П. Юшкевич, О достижениях китайских математиков, «Историко-математические исследования», вып. VIII, М., 1955, стр. 562—3, а также А. П. Юшкевич и Б. А. Розенфельд, Примечания к «Трактату об окружности» Гиясэддина, «Историко-математические исследования», вып. VII, М., 1954, стр. 441—2, и 448—9). (Прим. перев.).

священным числом, так как оно опиралось на авторитет Библии (1 Книга Царей, V, 23). Хотя около 150 н. э. рабби Нехемия, автор *Mishnat ha-Middot**), осмелился дать значение $\pi = 3\frac{1}{7}$ и иначе истолковать текст Библии (V, 4), но Талмуд употребляет только каноническое значение $\pi = 3$.

Научный гений египтян оказался бы и удивительным и совершенно непонятным, если бы им была известна правильная формула для

Поверхности полушара,

как думали одно время, вместе со Струве, издавшим Московский математический папирус. Задача 10 этого папируса в переводе Струве**) гласит:

«Form der Berechnung eines Korbes, wenn man dir nennt einen Korb mit einer Mündung zu $4\frac{1}{2}$ in Erhaltung. O lass du mich wissen seine (Ober) fläche.

Berechne du $\frac{1}{9}$ von 9, weil ja der Korb die Hälfte eines Eies ist. Es entsteht

1. Berechne du den Rest als 8. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 8. Es entsteht $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$.

Berechne du den Rest von dieser 8 nach diesen $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Es entsteht $7 + \bar{9}$.

Rechne du mit $7 + \bar{9}$ $4\frac{1}{2}$ mal. Es entsteht 32. Siehe, es ist seine (Ober) fläche. Du hast richtig gefunden»***).

В современных обозначениях вычисление идет по формуле

$$F = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) 2x \cdot x,$$

где $x = 4\frac{1}{2}$ представляет диаметр; так как $\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$ есть египетское значение для $\pi/4$, мы действительно получаем правильную формулу для поверхности шара:

$$2F = \pi x^2.$$

Однако за изумлением вскоре последовало и разочарование. Следуя Питу****), «корзину» можно было понимать как полуци-

*) S. G a n d z, *The Mishnat ha-Middot*, Quellen u. Studien [A] 2 (1932), стр. 48.

**) W. W. S t r u v e, *Mathematischer Papyrus des Museum in Moskau*, Quellen u. Studien [A] 1 (1930), стр. 157.

***)) «Способ вычисления корзины, если тебе назовут корзину с отверстием $4\frac{1}{2}$ в цельности. О, дай мне узнать ее поверхность.

Вычисли $\frac{1}{9}$ от 9, ибо корзина представляет половину яйца. Получается 1. Вычисли остаток 8. Вычисли $\frac{1}{9}$ от 8. Получится $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Вычисли остаток от этих 8 после отнятия этих $\bar{3} + \bar{6} + \bar{18}$. Получается $7 + \bar{9}$. Считай $4\frac{1}{2}$ раза с $7 + \bar{9}$. Получается 32. Смотри, вот ее поверхность. Ты нашел правильно».

****) Т. Е. Р e e t, *A problem in Egyptian geometry*, J. egypt. archeol. 17 (1931), стр. 154.

линдр, и в результате этого чудесный научный подвиг, который более чем на тысячу лет должен был опередить Архимеда, целиком оказался обычным вычислением. Пит привел в порядок грам-

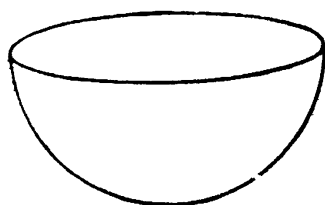


Рис. 7 (по Струве).

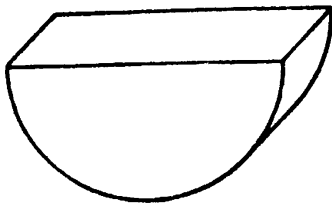


Рис. 8 (по Питу).

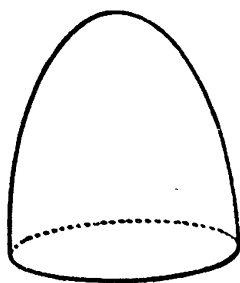


Рис. 9 (по Нейгебауэру).

матическую структуру текста, которая у Струве была неясной, вставляя слова «на $4\frac{1}{2}$ », и дал такой перевод:

«если Вам скажут: корзина (на $4\frac{1}{2}$) в диаметре и $4\frac{1}{2}$ в глубину, дай мне узнать поверхность».

Теперь дело меняется. Вместо одного числа $x = 4\frac{1}{2}$ даются два числа x и y , имеющие оба одно и то же значение $4\frac{1}{2}$, и примененная формула будет

$$F = 2x \left(1 - \frac{1}{9} \right)^2 y.$$

Если мы будем считать y высотой полуцилиндра, а x — диаметром круга, т. е. основания, то мы получим правильную формулу для боковой поверхности:

$$F = \frac{\pi x}{2} y = 2x \frac{\pi}{4} y.$$

Несколько иное толкование дает Нейгебауэр. Он рассматривает «корзину» как один из куполообразных амбаров, которые известны нам по египетским рисункам, и считает вычисление приближенным. Дальнейшее развитие этой идеи можно найти в прекрасной книге Нейгебауэра*).

Объемы

кубов, балок и цилиндров естественно вычислялись при помощи умножения площади основания на высоту. Самое главное затруднение при этом заключалось в переводе различных мер объема

*) O. Neugebauer, *Vergriechische Mathematik*, Berlin, 1934, стр. 136.

и сыпучих тел друг в друга, так как в большинстве случаев дело шло о зерновых амбарах.

Однако высшим достижением египетской науки является совершенно точное вычисление объема усеченной пирамиды

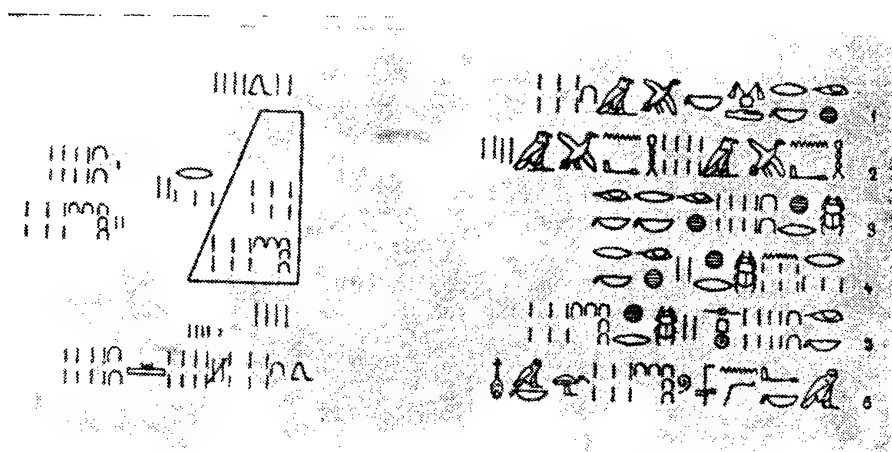
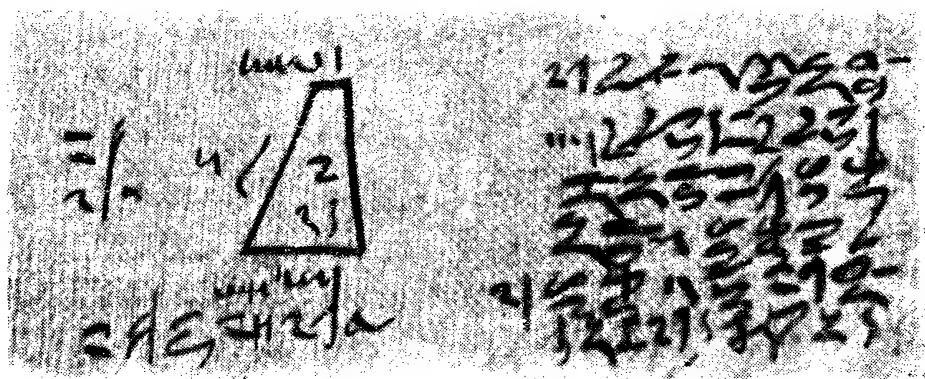


Рис. 10. Два столбца из Московского папируса, содержащие вычисление объема усеченной пирамиды со сторонами основания 2 и 4 локтя и высотой 6 локтей. Наверху ператический текст, внизу иероглифическая транскрипция, выполненная И. И. Перещелкиным; оба рисунка воспроизведены по изд. В. В. Струве, *Math. Papyrus des Museum in Moskau, Quellen und Studien* [A] 1, стр. 157 (1930). Текст гласит: «(1) Сложи вместе эти 16, (2) с этими 8 и 4, (3) ты получишь 28. Вычисли (4) $\frac{1}{3}$ от 6. Ты получишь 2. Ум (5) пожь 28 на 2. Ты получишь 56. (6) Смотри: он равен 56. Ты нашел правильно». Иероглифический текст читается справа налево. Длина верхней стороны 2 с ее квадратом 4 записана над чертежом, нижняя длина 4—под чертежом, высота 6 и объем 56—внутри чертежа, а умножение 28 на 2—слева от чертежа.

с квадратным основанием; в Московском папирусе (рис. 10) оно следует формуле

$$V = (a^2 + ab + b^2) \frac{h}{3}, \quad (1)$$

где h — высота, a и b — стороны верхнего и нижнего оснований.

Нельзя допустить, чтобы подобная формула была найдена эмпирически. Она должна быть выведена обязательно при помощи того или другого теоретического рассуждения; но какого же? Разделив усеченную пирамиду на 4 части: прямоугольный параллелепипед, две призмы и одну пирамиду (рис. 11), можно найти (если считать объем пирамиды известным) формулу

$$V = b^2h + b(a-b)h + (a-b)^2 \frac{h}{3}. \quad (2)$$

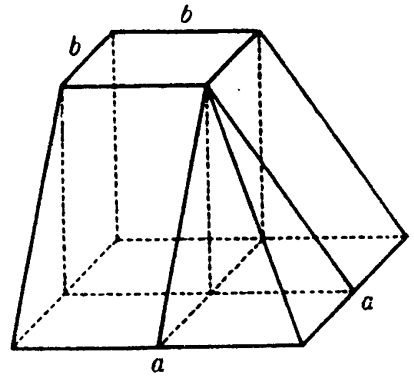


Рис. 11.

Нейгебауэр высказал предположение, что формула (1) получилась из (2) при помощи какого-нибудь алгебраического преобразования. Но как можно предполагать, что египтяне были способны к такому алгебраическому преобразованию? Они могли хорошо считать с конкретными числами, но не с обобщенными количествами. Может быть, тут следует предположить влияние на египетское счетное искусство вавилонской алгебры? Или следует допустить, что (1) возникла из (2) геометрическим образом? Может быть, следует подумать о таком выводе.

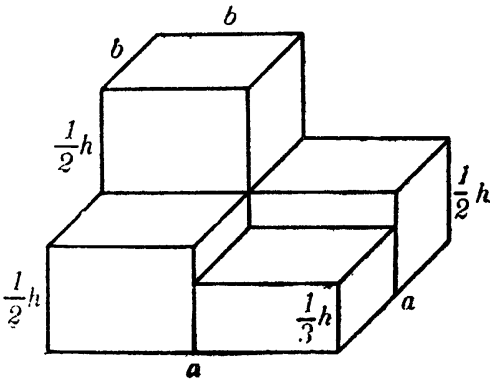


Рис. 12.

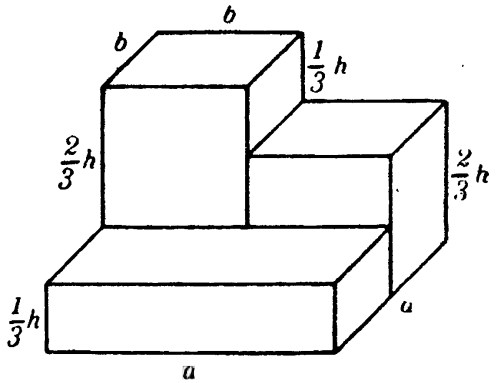


Рис. 13.

Примем для удобства, что одно ребро перпендикулярно к площади основания. Обе призмы рис. 11 превращаются в прямоугольные блоки с половинной высотой, а пирамида — тоже в прямоугольный блок, но уже с одной третьей высоты (рис. 12). Затем верхнюю часть первого блока снимают и помещают ее на второй (рис. 13). Полученное таким образом тело может быть теперь разбито на три горизонтальных слоя, и высота каждого будет $\frac{h}{3}$, причем нижний слой имеет основание a^2 , средний ab , и верхний b^2

Вывод нашей формулы не должен превышать уровня, на котором находилась египетская наука. Однако я не собираюсь рассказывать сказки и не стану уверять, что египтяне действительно именно так и поступали. Существуют еще и другие возможности: например, Кассина*) указал другой способ, при помощи которого могла быть выведена формула для частного случая (который только и встречается в папирусе), когда верхнее основание представляет половину нижнего. Нельзя а priori отрицать и возможность влияния вавилонской алгебры.

Но какую бы из этих гипотез ни принять, во всяком случае египтяне должны были знать объем пирамиды.

Дойдя до конца наших исследований об египетской математике, мы теперь возвращаемся к вопросу:

Чему греки могли научиться у египтян?

Делая обзор всей египетской математики и оценивая ее отдельные достижения, все же нельзя избежать некоторого чувства разочарования относительно общего математического уровня. Того, что так высоко ценит Демокрит (и в чем он, по его словам, был искуснее египетских гарпедонаптов), т. е. «построения линий с доказательствами», мы в папирусах не найдем и следа; там одни только правила вычислений без какой-нибудь мотивировки.

Достоверно, что египетский способ умножения и вычисления с основными дробями греки получили от египтян, а затем развили его до той степени, какую показывает нам Ахмимский папирус эллинистической эпохи**). Но вычисление — это еще не математика.

Точно так же греки могли заимствовать у египтян правила вычисления площадей и объемов. Однако такие правила до греков еще не составляли математики; именно они поставили вопрос: как это доказать?

Следует ли нам теперь полагать вместе со Струве, что египтяне знали гораздо больше того, что мы знаем из наших текстов, и что в этом отношении они стояли на одной высоте с греками? Против этого можно привести два аргумента: во-первых, общий характер математики, которой владеет данный народ, будет всегда одинаковым, независимо от того, имеем ли мы дело с элементарными или с более сложными текстами. Буквенное счисление, десятичные дроби, дифференциальное исчисление и геометрию в ко-

*) M. Cassina, *Sulla geometria egiziana*, Period. di Math. (4^a seria) 22 (1942), стр. 1—39.

**) См. K. Vogel, *Griechische Logistik*, S.-B. Bayer. Akad., München, 1936, стр. 357—472.

ординатах, которые характерны для науки Запада, сведущий историк может так же хорошо узнать из руководства для инженеров, как и из тома *Mathematische Annalen*. Однако для египетской математики типичен запутанный счёт с дробями, на котором не может основываться никакая высшая алгебра, а ее геометрию можно охарактеризовать как прикладную арифметику.

Во-вторых, мы должны указать, что вавилонская наука могла дать, и действительно дала, очень хорошую базу для греческой математики. На основании всего, что мы теперь знаем о том историческом фундаменте, на котором было воздвигнуто прекрасное здание греческой науки, мы ничуть не нуждаемся в гипотезах об утерянной высокой науке египтян. Этих гипотез мы доказать не можем, и они не могут принести нам ни малейшей пользы*).

*) Автор абсолютно прав в своих заключениях о сравнительно низком уровне математической науки древнего Египта при одном только условии, что это касается математической науки Среднего царства. У нас нет никаких материалов египетского происхождения, которые могли бы пролить свет на состояние египетской математики в эпоху Нового царства, когда имело место сильное влияние Вавилонии в различных областях культурной жизни Египта, в том числе, возможно, и в области математики (папирус Анастаси, цитируемый автором, относящийся к эпохе Нового царства, не может служить доказательством). В особенности это существенно для Саисской эпохи (середина 1-го тысячелетия до н. э.), когда греки вступили в культурные сношения с Египтом. Правда, в пользу сравнительно высокого уровня математики в Саисском Египте можно привести лишь косвенные свидетельства: во-первых, общераспространенное мнение греков о высоте культуры Египта, во-вторых, приводимое автором высказывание Демокрита об египетских гарпедонаптах, в котором он хвалится своим превосходством над ними в области «построения линий с доказательствами» (курсив мой. — И. В.). Наконец, стоит привести высказывание Геродота о Хеопсовой пирамиде (II, 124): τῆς ἐστὶ πρυτανῆς, μέσῳ τῶν ἑκατὼν ὀκτὼ πλέθρα (сто единиц длины или площади) ἑοῦσος τετραγώνου καὶ ὅψος ἴσον. Так как длина стороны основания Хеопсовой пирамиды равна 440 царским локтям, высота равна 280 и апофема 356 локтям, то мы имеем: площадь грани $\frac{356 \times 440}{2} = 78\,760$ кв. локтей $\cong 8(100)^2$ кв. локтей = 8 плетров.

Квадрат высоты $280^2 = 78\,400$ кв. локтей, что очень близко подходит к площади грани.

После некоторых изменений текст Геродота можно прочесть так: τῆς ἐστὶ πρυτανῆς μέσῳ τῶν ἑκατὼν ὀκτὼ πλέθρα ἑοῦσος τετραγώνου ἀπὸ ὅψος ἴσον (у нее повсюду каждая грань в восемь плетров, являющаяся равной квадрату на высоте). Если согласиться с предлагаемым изменением текста, то придется признать, что египтянам около 450 до н. э. (эпоха путешествия Геродота) было известно понятие о квадратуре площади и средней геометрической. Конечно, все приведенные соображения нельзя считать безусловно доказательными, и вопрос о характере египетской математики саисской эпохи лучше оставить открытым. (Прим. перев.)

ГЛАВА II

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ЦИФРЫ И ТЕХНИКА СЧЕТА

В этой главе мы должны дать краткий обзор систем счисления и обозначения чисел, относящихся к важнейшим культурным периодам, а также соответствующей этому техники счета. Мы увидим, что эти обозначения и техника счета имели очень большое значение для развития науки, хотя, конечно, не следует думать, что хорошая система счисления сама по себе ведет к высокому развитию математики. Скорее это значит, что хорошее обозначение чисел и удобные правила для четырех основных арифметических действий представляют необходимую предпосылку для развития математики. Если не овладеть этими основными арифметическими действиями, то математика не может подняться выше очень низкого уровня.

Яснее всего это обнаруживается в алгебре. Как мы увидим, вавилоняне имели великолепную шестидесятеричную письменную систему счисления для целых чисел и дробей, причем счет с дробями для них был так же прост, как и счет с целыми числами. Благодаря этому и стало возможным у них высокое развитие алгебры. Они могли решать системы линейных и квадратных уравнений с двумя и более неизвестными. Ничего подобного не могло быть у египтян с их запутанным счетом с дробями, когда каждое деление, каждое вычитание дробей представляло целую проблему. Каким образом они смогли бы извлечь квадратный корень из суммы основных дробей вроде, скажем, $\bar{2} + \bar{10} + \bar{25}$? А вавилоняне записывали эту сумму в виде шестидесятеричной дроби

$$0; 38, 24, \text{ т. е. } \frac{38}{60} + \frac{24}{60^2},$$

и находили ее корень в таблице

$$\sqrt{0; 38, 24} = 0; 48.$$

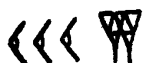
Если корень не извлекался точно, они брали его приближенно.

ШЕСТИДЕСЯТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА

была заимствована вавилонскими семитами от их предшественников сумерийцев. Этот замечательный культурный народ, изобретший также клинописное письмо, владел в 3-м тысячелетии до н. э. югом Месопотамии. Сумерийский язык не был ни индогерманским, ни семитическим, но принадлежал к совершенно другому типу; он был не флектирующим, но агглютинирующим, т. е. склеивающим. Корни слов, состоящие большей частью из одного слога, оставались неизменными, тогда как другие, тоже неизменяемые слоги, ставившиеся впереди или позади, выполняли грамматические функции. Древнейшие сумерийские клинописные тексты относятся к первой династии Ура, расцвет которой имел место приблизительно около 3000 до н. э. или несколькими веками позднее.

Сумерийская культура была воспринята аккадскими семитами, обитавшими в северных областях. С течением времени становились все более и более могущественными семиты, а в 1700 до н. э. великий законодатель и властелин из первой вавилонской династии Гаммурапи мог величать себя «царем Сумера и Аккада»^{*)}.

В сумерийско-вавилонском обозначении все числа до 60 писались по обычной десятичной системе: простой «клин» имел значение 1, «угол» — значение 10. Оба знака производились нажимом палочки с заостренным боковым ребром на глиняную таб-

летку (рис. 14). Так, например, знак  представляет чис-

ло 35, знак  или, сокращенно,  — число 9.

Все это пока еще не представляет ничего особенного и вполне совпадает с египетским или привычным для нас римским способом изображения чисел. Но затем появляется нечто замечательное: число 60 тоже изображается знаком 1 и с шестидесятками счет начинается снова. Таким образом, знак для 10 может также обозначить и 10 · 60, знак для 1 обозначает также 60 · 60 или какую угодно степень 60. Более того, дроби также пишутся шестидесятерично: знак для 1 может также обозначать $\frac{1}{60}$ или $\frac{1}{60^2}$, знак для

^{*)} По культурной истории Вавилона см. главным образом труды Мейсснера (B. Meissner, *Babylonien und Assyrien*, Bd. 1 и 2 (Heidelberg, 1921—1925). Далее, E. Chiera, *They wrote on Clay*, Chicago, 1938. О клинописном письме см. C. Fosse, *Manuel d'Assyriologie* 1, Paris, 1904 и B. Meissner, *Die Keilschrift* (Sammlung Götschen), Berlin, 1922. Относительно хронологии см. B. L. v. d. Waerden, *Yaarboek Ex Oriente Lux* 10 (1948), стр. 414 и цитированную там литературу.

10 также $\frac{10}{60}$ или $\frac{10}{60^2}$. Таким образом, дроби $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ и $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ изображаются знаками для 30, 20 и 12: $\lll \ll < \Upsilon$.

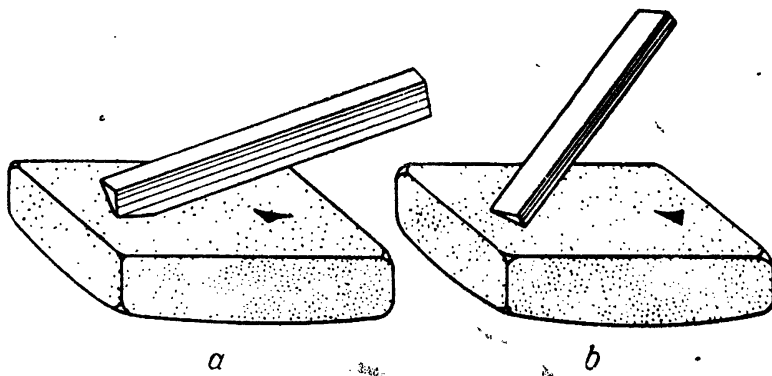


Рис. 14. Стил для клинописных изображений. Из книги: O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*.

Таким образом, значимость знака, как у наших современных цифр, зависит от положения (позиции), которое занимает этот знак во всем числе: точно так же, как и у нас, в начале стоят более высокие степени 60, а в конце — более низкие. Отсюда и название: «позиционная система письменного счисления». Так,

в $\Upsilon \lll \Upsilon$ первый клин значит в 60 раз больше, чем каждый из следующих четырех маленьких. Значение всего числа может быть, например,

$$60 + 24 = 84 \quad \text{или} \quad 1 \frac{24}{60} = \frac{84}{60}.$$

Следуя Нейгебауэру, мы в текстах не будем переводить шестидесятеричные числа в десятичную систему, но так и будем писать их шестидесятерично, разделяя запятой различные числовые порядки. Так, изображенное выше число в транскрипции напишется как 1,24. А запись 1,3,30 обозначает число

$$1 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 + 30,$$

умноженное иногда или разделенное на некоторую степень 60. Однако, когда по смыслу текста видно, что это число должно быть умножено или разделено на определенную степень 60, мы будем прибавлять в конце один или несколько нулей (например, 1,3,30,0), или пользоваться точкой с запятой, играющей роль

$$1, 3; 30 = 63 \frac{1}{2} \text{ или } 1; 3, 30 = 1 \frac{7}{120}.$$

Вавилонская позиционная система имела и свои недостатки. То, что в обозначении не существовало разницы между 1 и 60, на практике еще не было так плохо, потому что в громадном большинстве случаев порядок числа был заранее известен (мы ведь знаем, что если на витрине цена блузы обозначена цифрой 30, то это не значит, что она стоит 30 копеек), но в теоретических задачах это могло причинить неудобства. Еще неприятнее то, что в обозначении нельзя было различить 1,0,30 и 1,30, так как не было нуля. Для устранения этого неудобства в более позднее время ввели разделительный знак для пустого места между двумя цифрами:

$$\gamma \zeta \nabla = 1,0,4 = 3604.$$

Греческий астроном Птолемей (150 н. э.) при вычислениях в шестидесятеричной системе, пользуется знаком «0» для нуля также и в конце числа. Это и был «завершающий штрих» для шестидесятеричной позиционной системы, благодаря которому она сделалась почти равноценной нашей десятиричной позиционной системе. Правда, Птолемей пишет целые числа десятирично, а шестидесятерично — только дроби, но это не так уж важно, потому что у него почти не встречается необходимости в больших целых числах. Огромное преимущество вычислений с шестидесятеричными дробями было причиной того, что ими постоянно пользовались астрономы, отсюда — наши минуты и секунды.

КАК ВОЗНИКЛА ШЕСТИДЕСЯТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА?

Первоначально шумерийцы еще не имели последовательной позиционной системы обозначения всех степеней числа 60 и его кратных. Они имели следующие знаки:

Древнейший шумерийский период (до 3000 до н. э.)

D	○	⊖	⊗	◯
1	10	60	600	3600

Знаки для 1, 10 и 60 выдавливались цилиндрическим концом круглой палочки для письма; для изображения 1 палочка держалась наклонно, а для 10 — отвесно. Как выглядели эти оттиски,

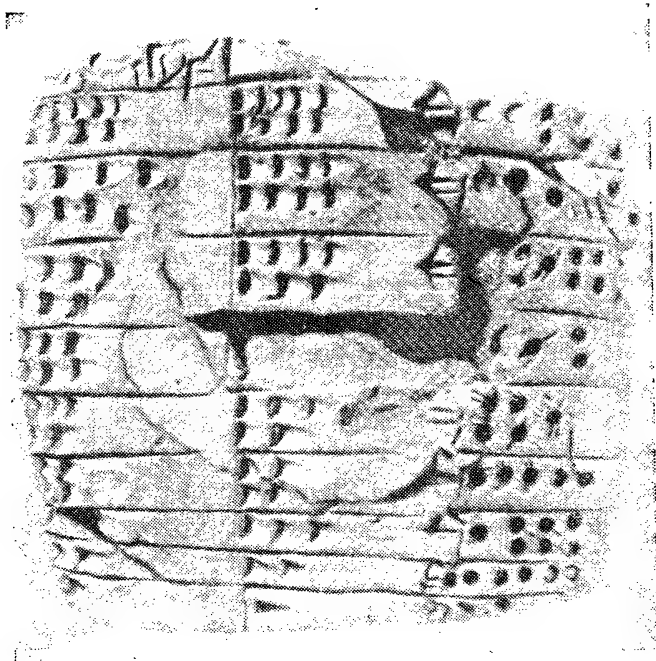


Рис. 15. Шумерийская глиняная табличка с числовыми знаками, Берлинский музей (VAT 12593). Табличка была найдена в Фаре, древнем Шуруппак в южной Месопотамии. Согласно Нейгебауэру (*Vorgriechische Mathematik*, стр. 51) текст был первоначально написан в начале 3-го тысячелетия до н. э. Столбцы читаются снизу вверх. Более поздние тексты писались строчками справа налево. В среднем столбце изображены числа 1, 2, 3, 4, 5, —, 7, 8, 9. На верхней части последнего столбца мы видим числа 10 и 20 (плоские круговые вдавления).

можно видеть на рис. 15 (в среднем столбце сверху донизу стоят цифры от 1 до 9, а справа сверху — десятки). Знак для 600 представляет комбинацию знаков для 60 и 10. Большой круг для $\text{šag}=3600$, заключающий эту числовую систему, выцарапывался заостренной палочкой (стилем).

Позднее эти знаки обратились в клинья и уголки, которые выдавливались при помощи палочки с острыми ребрами. Следующий ряд знаков мы находим далее в

Поздний шумерийский период (около 2000 до н. э.) -

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	10	60	$10 \cdot 60$	60^2	$10 \cdot 60^2$	60^3

Последний знак назывался šār-gal, т. е. большой šār. Знак для 60 несколько больше, чем для единицы. Очевидно, число 60 рассматривалось как «большая единица». Если это так, то понятно, почему следующая ступень $10 \cdot 60$ и $60 \cdot 60$ — šār были завершением древней числовой системы.

В том, что 1 и 60 изображались одним и тем же знаком, и лежит, в сущности, начало позиционной системы. При помощи упрощения знаков ($3600=1$ и т. д.) и систематического распространения в обе стороны ряда степеней 60 сама собой получается последовательная шестидесятеричная система вавилонских математических текстов.

Остаются три вопроса:

1. Каким образом появилась мысль выбрать 60 в качестве следующей ступени наряду с 1 и 10?

2. Почему рассматривали 60 как «большую единицу» и изображали тем же знаком, что и 1?

3. Как появилась мысль изображать и дроби в шестидесятеричной системе и рассматривать $\frac{1}{60}$ как «малую единицу»?

Второй и третий вопросы являются более важными, чем первый, потому что дело не в том, каково основание системы, но в появлении позиционного принципа и его распространении на дроби.

Ступень, соответствующая числу 60, является наверняка исторической случайностью: после числа 10, которое встречается у всех народов (вероятно, потому, что у нас 10 пальцев), у кельтов в качестве следующей ступени идет 20 (сравните французские числительные quatre-vingts = $4 \cdot 20 = 80$ и quatre-vingts-dix = $4 \cdot 20 + 10 = 90$ и английские three-scores = $3 \cdot 20 = 60$), у египтян 100, у германцев иногда 50, а у шумерийцев именно 60. Быть может, как полагает Нейгебауэр*), здесь играло некоторую роль древнее нормирование системы мер; при этом могло иметь значение то обстоятельство, что половина и треть большей еди-

*) O. Neugebauer, Abh. Ges. Wiss. Göttingen 13 (1927), стр. 1.

ницы мер были выбраны простыми кратными наименьшей меры; мы, в сущности, этого не знаем. Однако, как уже сказано, этот вопрос является наименее важным.

На второй вопрос Нейгебауэр дает очень правдоподобный ответ: если 60 рассматривали как «большую единицу», то причина этого лежит в метрологии. Веса, являвшиеся одновременно денежными единицами, были упорядочены по шестидесятеричной системе:

$$1 \text{ талант} = 60 \text{ мин (ma-na),}$$

$$1 \text{ мина} = 60 \text{ шекелей.}$$

Как известно, эти денежные единицы были приняты и греками. А при денежном счете, когда одна денежная единица в 60 раз больше другой, совершенно естественно, что большая единица тоже принимается за 1 и ее кратные обозначаются обычными знаками для 1, 2, ..., 10, ... Мы тоже говорим «два двадцать» вместо «два рубля двадцать копеек».

Следующий в высшей степени важный шаг состоял в том, что это обозначение стало применяться и для отвлеченных чисел.

Однако честность заставляет нас указать, что гроссмейстер современных ассириологов Ф. Тюро-Данжен не признает этой гипотезы*). По его мнению, отношение 60 было перенесено с отвлеченных чисел на денежный счет, а не наоборот. Но что же он отвечает на второй вопрос? Ровно ничего.

Напротив, относительно третьего вопроса Тюро-Данжен тоже держится мнения, что причину шестидесятеричного обозначения дробей следует искать в метрологии. В метрологии, и только там, отношение большей единицы к меньшей является в точности обратным; если одна единица в 60 раз больше другой, то вторая представляет $\frac{1}{60}$ первой. В области чистых чисел нет оснований рассматривать $\frac{1}{60}$ первой единицы как новую единицу, но в области денежных единиц это получается само собой. Аналогию этому представляет римский обычай выражать дроби вроде $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ в новых единицах — унциях, равных $\frac{1}{12}$. И в данном случае унция была первоначально единицей веса: $\frac{1}{12}$ асса.

Кто хочет познакомиться с дальнейшими рассуждениями Нейгебауэра относительно древнего нормирования единиц, мо-

*) F. Thureau-Dangin, *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Paris, 1932, стр. 11.

жет прочесть уже упоминавшийся отрывок из его прекрасной книги «Догреческая математика» («Vorgriechische Mathematik», глава 3, § 4).

СУМЕРИЙСКАЯ ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Древнейшие шумерийские тексты, относящиеся к эпохе Шульги (ок. 2000 до н. э.), из которых мы вычитали шумерийскую числовую систему, представляют собой таблицы обратных величин ($\frac{1}{x}$) и таблицы умножения. Таблицы умножения встречаются в отдельности или комбинированные. Отдельная таблица содержит кратные одного числа. Вот два примера:

Таблица для 7 и для 16,40

		7 a-rà	1	7	16,40 a-rà	1	16,40
		a-rà	2	14	a-rà	2	33,20
		a-rà	3	21	a-rà	3	50
и т.д.							
		a-rà	19	2,13	a-rà	19	5,16,40
		a-rà	20	2,20	a-rà	20	5,33,20
		a-rà	30	3,30	a-rà	30	8,20
		a-rà	40	4,40	a-rà	40	11,6,40
		a-rà	50	5,50	a-rà	50	13,53,20

Как видно, a-rà обозначает «-раз».

Некоторое число этих таблиц вместе с таблицей обратных величин и таблицей квадратов часто объединяются в одну большую комбинированную таблицу. Для того чтобы понять, как была построена такая комбинированная таблица, мы должны сначала рассмотреть таблицу обратных величин.

В эпоху Селевкидов (311—1 до н. э.) существуют большие таблицы обратных величин, составленные, вероятно, для нужд астрономов. Одна из них начинается так:

1:1	=1
1:1,0,16,53,53,20	=59,43,10,50,52,48
1:1,0,40,53,20	=59,19,34,13,7,30
1:1,0,45	=59,15,33,20
1:1,1,2,6,33,45	=58,58,56,38,24

и так идет далее на 7 страницах «Mathematische Keilschrifttexte» Нейгебауэра*) вплоть до

$$1:3 = 20$$

Более древние таблицы обратных величин не так объемисты. Они большей частью заключают обратные величины целых чисел между 0 и 81 и, кроме того, таких, которые состоят только из множителей 2, 3 и 5 и, следовательно, имеют в качестве обратной величины конечную шестидесятеричную дробь.

Нормальная таблица обратных величин

1:2=30	16	3,45	45	1,20
3 20	18	3,20	48	1,15
4 15	20	3	50	1,12
5 12	24	2,30	54	1,6,40
6 10	25	2,24	1	1
8 7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9 6,40	30	2	1,12	50
10 6	32	1,52,30	1,15	48
12 5	36	1,40	1,20	45
15 4	40	1,30	1,20	44,26,40

Соответствующие таблицы умножения содержат не только кратные для 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, как этого можно было ожидать в обычной таблице умножения, но, кроме того, еще кратные для некоторого количества других чисел с двумя и тремя шестидесятеричными знаками, а именно для всех следующих чисел:

50	24	12	6,40	2,30
48	22,30	10	6	2,24
45	20	9	5	2,15
44,26,40	18	8,20	4,30	2
40	16,40	8	4	1,40
36	16	7,30	3,45	1,30
30	15	7,12	3,20	1,20
25	12,30	7	3	1,15

Почему были выбраны эти числа? Несомненно, большая часть из них встречается также в нормальной таблице обратных вели-

*) O. Neugebauer, Quellen u. Studien Gesch. Math. [A] 3, Berlin, 1935.

чин, а остальные, кроме 7, являются обратными обычных несложных чисел. Отсюда в то же время становится ясным, почему эти числа расположены, начиная от больших к меньшим: так всегда расположены и обратные числа в таблице обратных.

Таким образом, мы видим, что таблица умножения служит не только для обычных умножений $a \cdot b$, но, прежде всего, для умножений $a \cdot b^{-1}$, т. е., по существу, для делений $a : b$.

Смысл всего этого таков: комбинированная таблица умножения и обратных величин служит не только для умножения друг на друга двух чисел, но также и для перевода простых дробей $\frac{a}{b}$ в шестидесятеричные. Чтобы, например, выразить $\frac{3}{8}$ в виде шестидесятеричной дроби, сначала отыскиваем в таблице обратных величин $1 : 8 = 0;7,30$ и затем ее утроенную величину $0;22,30$ в таблице умножения.

Математические тексты полностью подтверждают это объяснение. Когда в этих текстах нужно выполнить деление $a : b$, то всегда говорится так (не в виде общей формулы, но всегда для конкретных чисел): «вычисли обратное b^{-1} и умножь его на a ».

Таким образом, сумерийско-вавилонские счетные таблицы составлены, по-видимому, в высшей степени целесообразно. Систематическое использование преимуществ позиционного способа обозначения устраняет путаницу вычислений с дробями: все четыре основные действия могут быть совершенно механическим путем выполнены очень быстро.

Когда деление точно не выполнялось, то пользовались приближенными значениями. Так, один древневавилонский текст, YBC 10529*), дает приближенные значения для обратных величин всех чисел от 40 или 50 до 80 в таком виде:

$$\begin{aligned} 1 : 59 &= 1,1,1 \\ 1 : 1 &= 1 \\ 1 : 1,1 &= 59,0,59 \\ 1 : 1,2 &= 58,3,52 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Квадраты, квадратные и кубические корни

При помощи таблицы квадратов, которая прилагалась к большей части таблиц умножения

$$\begin{array}{ccc} 1 & a-r\grave{a} & 1 & 1 \\ 2 & a-r\grave{a} & 2 & 4 \\ 3 & a-r\grave{a} & 3 & 9 \\ 59 & \cdot \cdot \cdot a-r\grave{a} \cdot \cdot \cdot 59 & 58,1 \end{array}$$

*) YBC обозначает Yale Babylonian Collection (Коллекция Йельского университета). Текст напечатан в книге O. Neugebauer and A. Sachs, *Math. Cuneiform Texts*, New-Haven (Connecticut), 1945, стр. 16.

естественно получается таблица квадратных корней

1-e	1	<i>ib-si</i> (т. е. корень из 1 будет 1)
4-e	2	<i>ib-si</i>
9-e	3	<i>ib-si</i>

Эти таблицы служат в вавилонской математике для решения квадратных уравнений. Для решения уравнений третьей степени

$$x^3 = a$$

служат таблицы кубических корней:

1-e	1	<i>ba-si</i>
8-e	2	<i>ba-si</i>
27-e	3	<i>ba-si</i> и т. д.

Однако, слово *ba-si* обозначает не только кубический корень, но и в более общем смысле «корень» (уравнения). Действительно, и для уравнений

$$x^2(x+1) = a$$

имелись таблицы, в которых встречается то же слово

2-e	1	<i>ba-si</i>
12-e	2	<i>ba-si</i>
36-e	3	<i>ba-si</i> и т. д.

Наконец, то же самое слово *ba-si* встречается в VAT 8321*) с прибавкой *1-lal*, т. е. «минус 1», в смысле: корень уравнения

$$x^2(x-1) = a.$$

В высшей степени замечательно, что здесь как раз встречаются числа $n^2(n+1)$ и $n^2(n-1)$, которые в позднейшей греческой арифметике тоже выступают под названием «плоскопрямоугольных чисел» (*παρὰμυκτῶν πλάγιων* **):

Квадратный корень из неполного квадрата получался приближенно. Следующий способ часто употреблялся и греками: если, например, для $\sqrt{2}$ первое приближение будет a , и если a слишком мало, то $\frac{2}{a}$ должно быть слишком велико, и обратно. В дальнейшем лучшее приближение получается из арифметической средней:

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right).$$

*) VAT обозначает Vorder Asiatische-Textsammlung Berliner Museum (Собрание переднеазиатских текстов Берлинского музея). Об этом тексте см. F. Thureau-Dangin, *Textes math. babyl.*, Leiden, 1938, стр. 123.

**) O. Becker, *Quellen u. Studien* [B] 4 (1938), стр. 181.

Если, например, мы положим, что $a = 1\frac{1}{2}$, то $\frac{2}{a} = 1\frac{1}{3}$ и более точное приближение будет:

$$1\frac{5}{12} = 1;25.$$

Это приближение часто встречается в вавилонских текстах. Повторяя эту операцию, мы в качестве средней для $a = 1; 25$ и $\frac{2}{a} = 1; 24, 42, 21 \dots$ получим очень хорошее приближение:

$$\sqrt{2} = 1;24,51,10.$$

Оно встречается в недавно открытом тексте YBC 7289*) (рис. 16).

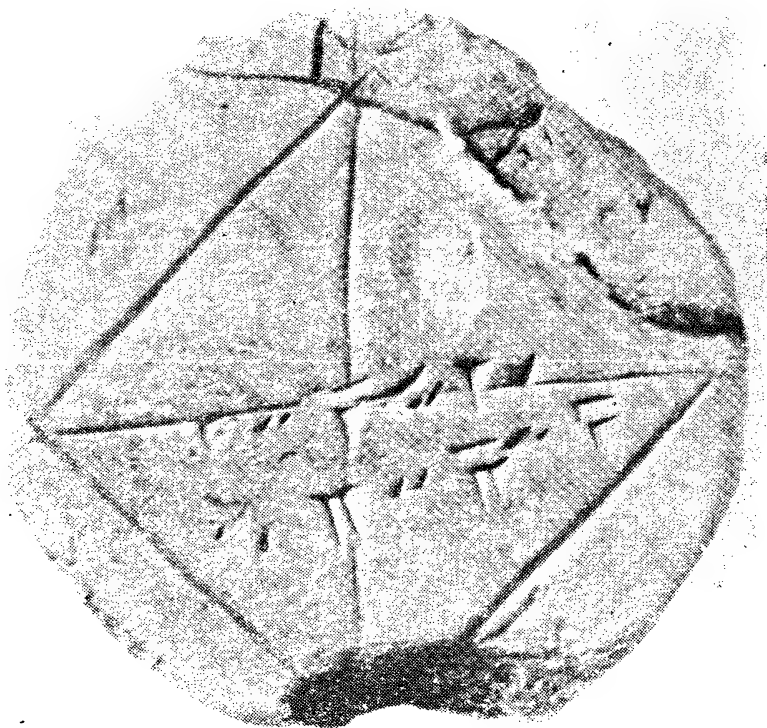


Рис. 16. YBC 7289. Клинописный текст из вавилонской коллекции Иэльского университета. Изображен квадрат с его диагоналями. Сторона равна 30 (число написано над левой верхней стороной). На диагонали написано число, выражающее отношения диагонали к стороне 1,24,51,10; под диагональю стоит ее длина 42,25,35.

Наконец, если тот же самый метод средней арифметической применить к нахождению корня из суммы $a^2 + b$, то получится

*) O. Neugebauer and A. Sachs, *Math. Cuneiform Texts* (New-Haven, 1945), стр. 43.

общая приближенная формула:

$$\sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a},$$

которая имеется также в вавилонских текстах.

Полученные при помощи этого метода приближения будут всегда приближениями с избытком, что легко проверить, возведя $a + \frac{b}{2a}$ в квадрат. Греки (Архимед, Герон) знали также приближения с недостатком и даже приближения типа непрерывных дробей для $\sqrt{2}$ (так называемые «боковые и диагональные числа»), к которым мы еще вернемся позднее.

ГРЕЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ

были действительно шагом назад по сравнению с великолепными вавилонскими. В древнейшее время имелись обозначения, которые похожи на хорошо известные римские цифры

$$\begin{array}{cccccccc} \Gamma & \Delta & \text{Г} & \text{Н} & \text{Г} & \text{Х} & \text{Г} & \text{М} & \text{Г} \\ 1 & 5 & 10 & 50 & 100 & 500 & 1000 & 5000 & 10^4 & 5 \cdot 10^4 \end{array}$$

Буквы Г, Δ, Н, Х, М суть естественно начальные буквы греческих слов для 5, 10, 100, 1000 и 10 000.

Позднее было введено более короткое алфавитное обозначение:

$$\begin{array}{ll} 1 - 9 & \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varsigma, \zeta, \eta, \theta \quad (6 = \varsigma = \text{Вау}) \\ 10 - 90 & \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho \quad (90 = \varsigma = \text{Койпа}) \\ 100 - 900 & \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \text{Ж} \quad (900 = \text{Ж} = \text{Сампи}) \\ 1000 - 9000 & \alpha, \beta \text{ и т. д. (со штрихом слева внизу).} \end{array}$$

Для того чтобы отличать числа от слов, прибавляли в конце штрих или ставили сверху черту, например,

$$\overline{\alpha\tau\varsigma} \text{ или } \alpha\tau\epsilon' = 1305.$$

Числа свыше мириады $M = 10^4$ писались со знаком М, например,

$$M_{\mu\gamma}^{\text{хв}} = 250043.$$

Вместо M можно было также писать хв . Для высших степеней М Архимед и Аполлоний имели и другие обозначения.

Использование букв для обозначения определенных чисел отнюдь не благоприятствовало развитию алгебры. Для обозначения неопределенных или неизвестных чисел не было свободных букв, как в нашей алгебре. Правда, во время Архита, друга Платона (390 до н. э.), буквы употреблялись и для обозначения неопределенных чисел: так, например, у Архита $\Gamma\Delta$ обозначает сумму чисел Γ и Δ . Если бы эту систему пополнить знаком умножения, минусом и обозначением дроби, то она могла бы дать удобную символику для теоретической арифметики. Но у Евклида (300 до н. э.) это простое обозначение для суммы уже не применяется, полагаю, из опасения спутать с алфавитными числовыми знаками. Когда Евклиду нужно сложить два числа, то он изображает их в виде отрезков прямой AB и BC и обозначает их сумму AC .

Греческие числовые знаки и для расчетов были довольно трудными. Мы в школе учим таблицу умножения только от 1×1 до 9×9 , а в греческих учебниках 14-го века Николая Рабды*) имеются таблицы, в которых сперва 1 множится на все 37 чисел

$$\alpha, \beta, \dots, \iota, \kappa, \dots, \rho, \sigma, \dots, \alpha, \beta, \dots, \ddot{\alpha} = 10^4,$$

затем 2 — на те же самые числа, начиная от 2, и так далее до $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$. Все это расположено в трех столбцах: два первых содержат множители, третий — их произведение, например $\rho\iota\ddot{\delta}$, т. е.

$$100 \cdot 400 = 40\,000.$$

Если бы мы захотели устранить эти неудобные таблицы и пользоваться только обычными таблицами умножения от 1×1 до 9×9 , то мы должны были бы



Рис. 17. Набу, бог науки в Вавилоне. Известияновая статуя (высотой 1,65 м), посвященная при Адад-Нирари III (810—782 до н. э.). Британский музей (D. 377).

*) Письма Рабды изданы П. Таннери (Mém. Scient. 4, стр. 61—198). Они, без сомнения, основываются на более древних греческих источниках. Ср. K. Voegel, *Griechische Logistik*, Sitzungsber, Bayer-Akad. München (Math.-Naturw. Abt.), 1936, стр. 357.

такие множители, как 20, 200 или 2000, заменить их «pythmen»-ом, или основным числом (в нашем случае 2), затем перемножить основные числа множителей и, наконец, найти еще степень 10, на которую следует умножить полученное произведение. Архимед в «Исчислении песка» дает для этого правило, равносильное нашей формуле

$$a^p a^q = a^{p+q}.$$

Чтобы перемножить по этому правилу, например, $\sigma' \times \tau'$ (200×300), берем для σ' и τ' их основные числа 2 и 3, получаем их произведение 6, затем образуем по правилу Архимеда произведение

$$10^2 \cdot 10^2 = 10^4,$$

так что искомое произведение будет равно 6 мириадам*). Все страшно запутано!

Таким способом можно было перемножать между собой числа, изображавшиеся отдельными буквами. Числа, состоявшие из нескольких букв, естественно распадалась на части, состоящие из одной цифры. Берем у Евтокия пример 265×265

τα δε σξε	то есть 265			
επι σξε	на 265			
β α		40 000	12 000	1 000
М М, β, α				
α			12 000	3 600
М, β, γ χ τ				300
α τ χ ε			1 000	300
ε				25
δρκοδ Μ σ χ ε	в итоге	70 225		

Этот способ назывался «греческим умножением». Известно было также «египетское умножение» при помощи последовательного удвоения, с которым мы познакомились в главе I.

Письменное вычисление было, таким образом, очень сложно; кроме того, бумага**) была дорога, и на практике охотнее прибегали к

Счетной доске и счетным камням

Камни, называемые псефами, размещались параллельными рядами на счетной доске (а может быть, на обыкновенном столе, который линовался). Камни в самом последнем ряду имели значение 1, в предпоследнем — значение 10 и т. д. Для особых монет-

*) См. примеры из Паппа у K. Vogel, Sitzungsber, Bayer-Akad. München, Math. Naturw. Abt., 1936, стр. 393.

**) Собственно говоря, не «бумага», а «папирус». (Прим. перев.)

ных единиц, как, например, оболлов, имелись особые ряды. На рис. 18 дано изображение известной счетной доски из Саламина. различных писателей древности есть много замечаний, из которых можно видеть, насколько обычен был тогда «абак» —



Рис. 18. Мраморная счетная доска (1,50 на 0,75 м), найденная на острове Саламине (Афинский национальный музей), вероятно, 4-го века до н. э. Возможно, что эта доска в действительности использовалась и не для счета. Внизу начерчены древние числовые знаки (см. стр. 62), а также несколько знаков для некоторых денежных единиц.

счетная доска. У Полибия говорится (V, 26): «Придворные — как камни на счетной доске: захочет счетчик, и они будут стоять один халк, а захочет — так и целый талант». Характерно, что наиболее

употребительное слово для «счета», $\phi\eta\phi\iota\zeta\epsilon\iota\nu$, происходит от $\phi\eta\phi\iota\varsigma$ — счетный камень.

У римлян, кроме больших счетных досок, устроенных по образцу саламинской, были еще маленькие ручные абак с небольшим числом камней или, вернее, кружков, которые можно было передвигать туда и сюда по рейкам. Этот удобный инструмент переняли у них многие народы; китайцы и русские и поныне



Рис. 19. Казначей на Дариевой вазе подсчитывает на счетной доске поступившие налоги. (Из книги: Menninger, *Zahlwort und Ziffer*).

пользуются счетами римского образца. В западной Европе счетная доска была во всеобщем употреблении до позднего средневековья. Только после введения современных цифр абак исчез со сцены, потому что можно было обойтись и без него.

Вычисления с дробями

Схоллия, т. е. примечание на полях, к платоновскому «Хармиду» так описывает важнейшие разделы счетного искусства или «логистики»: «Так называемые греческий и египетский способы умножения и деления, а также соединение и разьединение дробей».

«Соединение» представляет, очевидно, сложение дробей, которое Рабда выполняет точно так же, как и мы, приводя дроби



Рис. 20. Большой кратер (чаша) с волютами (завитками) высотой 1,30 м из Канозы в Неаполитанском национальном музее 3-го века до н. э. Южноиталийское греческое искусство, несколько напыщенное по своему характеру и не достигающее чистоты красоты аттических ваз 5-го века. В среднем ряду рисунков изображает военный совет царя Дария перед его знаменитой экспедицией против греков в 490 до н. э. Дарий сидит среди своих советников. Человек, стоящий на возвышении, обращаясь к царю, предупреждает его об опасностях экспедиции (как можно судить по жестам). Позади царя стоит телохранитель. Внизу виден царский казначей за счетной доской (см. рис. 19). Справа и слева от него — яростно жестикулирующие люди, изображающие задавленные налогами подвластные царю провинции.

к одному знаменателю. Чтобы, например, сложить 3 , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{14}$ и $\frac{1}{42}$, он из трети делает четырнадцать сорок вторых, а из $\frac{1}{14}$ — три сорок вторых; это вместе с $\frac{1}{42}$ дает $14+3+1=18$ сорок вторых, или 3 седьмых, к которым присоединяются еще 3 целых, что вместе дает 24 седьмых.

Что понималось под «разъединением» дробей, можно выяснить в Ахмимском папирусе *), где дроби $\frac{m}{n}$ для $n = 3, 4, \dots, 20$, и для различных значений m разбивались на основные дроби, как, например,

$$\text{«Седьмая часть от 3 будет } \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}\text{»}.$$

Обозначения дробей известны нам из трудов позднейших математиков (Архимед, Герон, Диофант), но самыми надежными из источников являются такие папирусы, как только что названный, ибо они представляют собой не позднейшие копии, а являются оригиналами и переписчики не изменяли в них обозначений. Можно было вместо $\frac{1}{3}$ написать словами $\tau\delta$ трітов, или сокращенно в $\tau\delta$ γ', или еще короче в γ', или γ'', или еще что-нибудь в этом роде. Часто знаменатель писался над числителем: $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{3}{5}$. Фогель утверждает, что этот способ становится обязательным в эпоху Архимеда (3-й век до н. э.). В одном папирусе 1-го века н. э.**) находится также и обратное обозначение, так называемое «индийское» $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{3}{5}$, из которого произошло и наше современное изображение дробей.

Мы видим отсюда, что греки не ограничивались по египетскому образцу только «основными» дробями. Да и с какой стати должны они были так делать? Они никогда не были связаны жесткими традициями. Хотя они нередко (особенно в позднейших папирусах, где обнаруживается сильное египетское влияние) пользовались основными дробями вроде $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$, но они могли также записать все это как $\frac{4}{5}$. Архимед, например, доказывает, что длина окружности лежит между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$ диаметра, и его современник Эратосфен пользуется дробью $\frac{11}{83}$ для определения наклона эклиптики.

До Архимеда дроби вообще не входили в официальную греческую науку. Но это объясняется не тем, что их не знали, но

*) J. Baillet, *Le papyrus mathématique d'Achmim*, Mém. Miss. archéol. Fr. en Caire 9 fasc. I (Paris, 1892).

**) H. Gerstinger u. K. Vogel, *Eine stereometrische Aufgabensammlung im Papyrus Vindobon.* 19996. Mitt. Papyrussamml. Erzherzog Rainer, Neue Serie, 1. Folge, Wien, 1932, стр. 11.

скорее тем, что их не хотели знать. Платон учил, что единица всегда неделима, и по его собственным словам «знатоки математики» ни в каком случае не допускали деления единицы («Государство», 525 E). Дробями пренебрегали и предоставляли их купцам; делимы, как говорили, видимые предметы, но не математические единицы. Вместо дробей употребляли отношения целых чисел.

Впрочем, следы древнего исчисления дробей обнаружить можно. В VII книге «Начал» Евклида (а эта книга, как мы увидим позже, возникла до 400 до н. э.) имеются следующие определения:

О п р е д е л е н и е 3. Число является частью другого числа, меньшее — большего, если оно измеряет большее.

О п р е д е л е н и е 4. И частями, если оно большего не измеряет.

«Часть» в данном случае означает « n -я часть», где n является целым числом. «Части» обозначают некоторое число n -х частей, например три пятых. Таким образом, в этих определениях подразумеваются произвольные дроби. Применение этого имеется и в определении пропорциональности:

О п р е д е л е н и е 20. Числа являются пропорциональными, если первое от второго и третье от четвертого будут одинаковыми кратными, одинаковой частью или частями.

После этого показывается, каким образом можно приводить отношение к наименьшим членам или представлять в виде некоторого числа дробей, как упрощаются дроби при помощи нахождения общего наибольшего делителя числителя и знаменателя и деления на него обеих частей дроби. Затем в предложениях 34—36 седьмой книги рассматриваются свойства общего наименьшего кратного. Определение общего наименьшего кратного имеет значение для приведения дробей к общему знаменателю.

Терминология целочисленных отношений в пифагорейской теории гармонии также напоминает о том, что целочисленные отношения были первоначально дробями. Отношение $4:3$, соответствующее музыкальной кварте, называется «epitriton», т. е. «большая треть» ($1\frac{1}{3}$), и целый тон, которому соответствует отношение $9:8$, называется «epogdoon», т. е. $1\frac{1}{8}$.

Древнейший текст, где встречаются дроби, представляет «Илиада» Гомера (К 253): «Ночи две части прошли и третья осталась частица».

Отсюда ясно, что дроби были известны грекам с древнейших времен и что они по крайней мере в 5-м веке вполне владели действиями с дробями: сокращением, приведением к одному знаменателю и т. п. Следовательно, трудности вычислений с дробями для них не могли представить, как у египтян, препятствий для развития математики.

Шестидесятеричные дроби

Для астрономических вычислений обыкновенные дроби были неудобны; поэтому греческие астрономы заимствовали вавилонские шестидесятеричные дроби.

Неизвестно, кто первый сделал это, потому что замечательный «Альмагест» Клавдия Птолемея*) предал забвению огромную часть трудов своих предшественников. Но уже в «Анафорике» Гипсикла (180 до н. э.) имеется деление суток на 360 «градусов времени» по вавилонскому образцу. В «Альмагесте» круг делится по вавилонскому образцу на 360 градусов, каждый градус — на 60 минут, каждая минута — на 60 секунд и т. д. Вместо $47^{\circ}42'40''$ Птолемей пишет $\mu\zeta\mu\beta'\mu''$. И другие единицы делятся совершенно так же: когда Птолемей рассматривает круг, то он большей частью представляет диаметр состоящим из 120 частей, которые он делит тем же порядком. Для нуля он употребляет знак $\circ$, сокращение слова $\circ\phi\theta\epsilon\upsilon$ — ничто. Смещения с числовым знаком $\circ = 70$ не следовало опасаться, потому что для минут, секунд и т. д. числа, превосходящие 60, не употребляются**).

Птолемей — истинный виртуоз вычислений с шестидесятеричными дробями: он делит и умножает их, извлекает квадратные корни и т. д., но не упоминает ни словом о технике своих вычислений. Поэтому мы должны быть благодарны его комментатору Теону Александрийскому***) за то, что он дает образец шестидесятеричного деления, а именно, $\alpha\phi\iota\zeta\ \chi' \iota\epsilon''$ на $\chi\zeta\ \iota\beta' \iota''$. В современных обозначениях $1515^{\circ}20'15'' : 25^{\circ}12'10'' = 60^{\circ}7'33''$.

Сначала находятся 60 целых единиц частного. Метод нахождения очень своеобразен и более практичен, чем наш. По нашим учебникам надо было бы сначала испытать, годятся ли эти 60 раз, т. е. умножить $25^{\circ}12'10''$ на 60 и посмотреть, не будет ли произведение больше $1515^{\circ}20'15''$ и т. д. Теон не умножает на 60, а делит. Именно, он делит делимое на полученную предварительно начальную цифру частного. Если 1515 разделить на 60, то полученное частное будет более $25^{\circ}12'10''$, если же разделить на 61, то получится меньше; следовательно, нужно взять 60. Теперь $60 \cdot 25^{\circ}$, $60 \cdot 12'$ и $60 \cdot 10''$ отнимаются от $1515^{\circ}20'15''$, остается $190'15''$.

После этого тем же способом получаются $7'$ частного. Если разделить $190'15''$ на $7'$, то получается больше, чем $25^{\circ}12'10''$,

*) Это каноническое астрономическое произведение, собственно говоря, называется «*Syntaxis mathematica*». Слово «Альмагест» представляет арабское искажение слов «*Megale Syntaxis*» или «*Megiste*» с арабским артиклем *Al*.

**) Это не совсем верно: Птолемей отличает « $\circ \mu\omicron\iota\rho\omega\upsilon$ » (70 градусов) от « $\circ \mu\omicron\iota\rho\omega\upsilon$ » (нуль градусов). (Прим. перев.)

***) A. R o m e, *Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste*, Tome 2, Roma, 1936.

а при делении на 8' получается слишком мало; значит, мы должны взять 7'. Видите ли вы преимущество этого способа деления? По-нашему надо множить на 7' или 8' длинное число $25^{\circ}12'10''$, а по Теону нужно только 190 разделить в уме на 7 или 8. Произведения $7' \cdot 25^{\circ}$, $7' \cdot 12'$ и $7' \cdot 10''$ опять вычитаются из $190'15''$; остается $829'50''$. И так далее.

Я полагаю, что Гиппарх (150 до н. э.), великий предшественник Птолемея, также считал с шестидесятеричными дробями, ибо он был в совершенстве знаком с вавилонской астрономией: он знал вавилонские наблюдения затмений и лунные периоды. Гиппарх подобно Птолемею вычислил таблицы хорд, и деления в них были шестидесятеричными. Это вытекает из его сохранившегося критического сочинения по поводу «Phainomena» Арата*).

Из астрономии шестидесятеричные дроби никогда полностью не исчезали, но из других областей точных наук исчезли. Почему? Потому что они были вытеснены десятичными дробями, которые ввел наш соотечественник**), инженер и математик Симон Стевин (1548—1620), учитель принца Оранского, в своей книге «De Thiende» («Десятина»). Таков был конечный пункт развития, начавшегося со введения индо-арабских цифр.

ИНДИЙСКИЕ ЦИФРЫ

Откуда явились наши арабские цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Какой народ изобрел нашу великолепную десятичную позиционную систему счисления?

Арабские и персидские учебники арифметики единогласно приписывают индусам изобретение 9 цифр. И действительно, если мы рассмотрим формы цифр на рис. 21, заимствованном из превосходной книги Меннингера***), то мы сразу увидим, что наши цифры произошли от западноарабских, а те в свою очередь произошли от индийских.

Но, давайте, начнем с самого начала.

В доисторические времена, примерно между 2000 и 1400 до н. э., арийцы вторглись в Индию, подчинили себе ее население и ввели кастовую систему. Мы не знаем, было ли тогда разграничение каст таким же строгим, как теперь, но, разумеется, завоеватели образовали высшие касты: воинов и браманов, т. е. дворянство и духовенство.

*) См. например Н. Vogt, *Wiederherstellung vom Hipparch's Fixsternverzeichnis*, Astron. Nachr. 224, № 5354 (1925).

**) То есть голландец. Собственно говоря, Стевин был фламандцем, родом из Брюгге в современной Бельгии, но большую часть жизни провел в Голландии. (Прим. перев.)

***) Menninger, *Zahlwort und Ziffer*, стр. 329.

На науку эти люди еще не обращали внимания: меч они предпочитали перу. Но мы знаем, что во время развития буддизма, т. е. в последние шесть веков до н. э., у них появился интерес к области чисел, в особенности интерес к очень большим числам. В книге «Лалитавистара» происходит следующая сцена*).

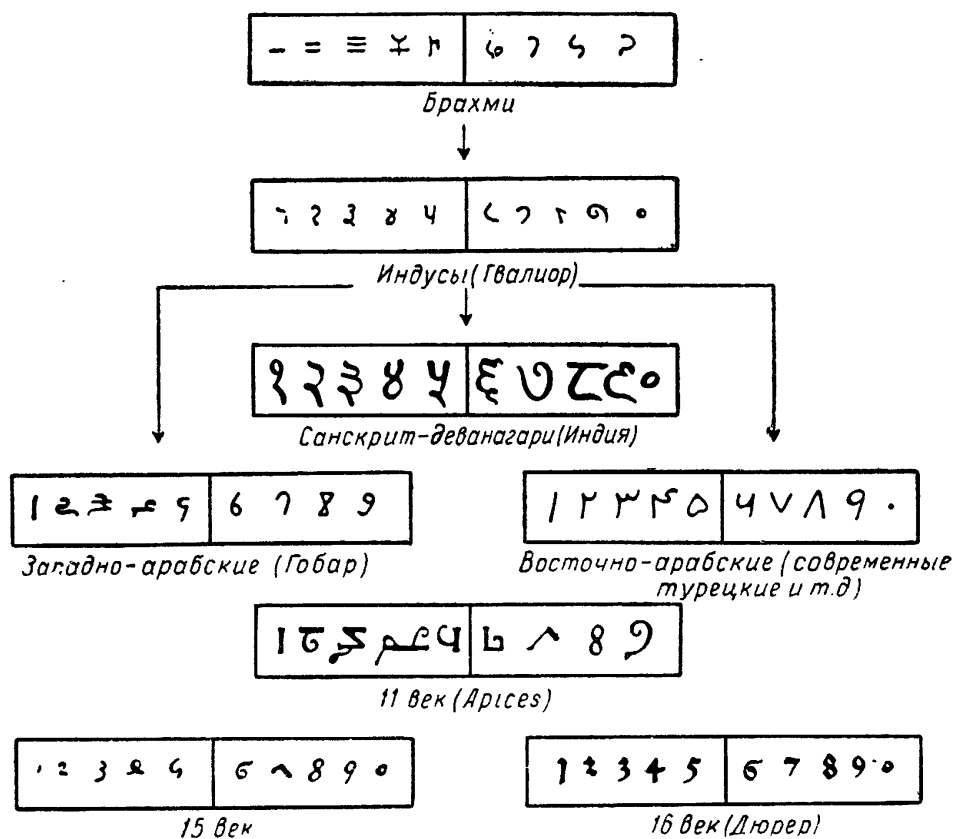


Рис. 21. Генеалогия наших цифр (по M e n n i n g e r, *Zahlwort und Ziffer*).

ревич Гаутама (Будда) просит у князя Дандарани руки его дочери Гопы. Но сперва он должен победить в состязании пятерых других женихов в искусстве письма, борьбы, стрельбы из лука, бега, плавания и счета. Разумеется, он одерживает блестящую победу. Тогда его начинает спрашивать великий математик Арджуна:

- О, юноша знаешь ли ты, какие числа идут сотня за сотней вслед за «koti»?
- Я знаю это.
- Как же тогда идут числа по сотням выше «koti»?
- Сто «koti» называются ayuta, сто ayuta—niyuta, сто niyuta—kañkara, сто kañkara—vivara...

*) См. B. D a t t a and A. N. S i n g h, *History of Hindu Mathematics*, Part. 1 (Lahore, 1935).

Будда, считая, проходит через 23 ступени. Согласно одному учебнику арифметики *koṭi* представляет сто раз по сто тысяч (*sata sata sahasa*). Таким образом, наивысшее число, которое называет Будда, есть $10^7 \cdot 10^{46} = 10^{53}$. Но в большей части учебников те же самые слова *ayuta* и *niyuta* имеют другие значения, а именно 10^4 и 10^5 .

Но Будда еще не кончил: «Это только первый ряд, — говорит он, — выше его идут еще 8 других рядов».

Совершенно ясно, что все эти имена числительные никогда для действительного счета не применялись. Это — чистые фантазии, словно индийские башни, которые уступами поднимались на головокружительную высоту.

Цифровые знаки: кхарошти и брахми

Начиная со времен великого буддийского царя Ашоки (3-й век до н. э.), мы находим цифровые знаки также и в книгах. В это время в употреблении были различные виды письма, а именно кхарошти и брахми, каждому из которых соответствовали свои цифровые знаки. Цифры кхарошти изображены на рис. 22. Они имеют для 1, 4, 10, 20 специальные знаки, которые повторяются столько раз, сколько понадобится, — как в римских цифрах. Знаки 4 и 20 встречаются и в других местах. Таким образом, ничего особенного здесь нет.

1	2	3	4	5	6	8	10
I	II	III	X	IX	IIIX	XX	?
3	233	333	2333	41	211		
20	50	60	70	100	200		

Рис. 22. Числовые знаки кхарошти.

Более интересны цифры брахми, которые изображены на рис. 23 (тоже по Меннингеру). Как видно, еще не существует ни

—	=	≡	Ƴ	┌	Ɔ	7	5	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	ο	λ	κ	ι	ι	χ	φ	⊕
10	20	30	40	50	60	70	80	90
7	7	7	9	9	9	9	9	9
100	2H	5H	1000	4T	70T			

Рис. 23. Числовые знаки брахми.

нуля, ни позиционной системы: знак для 60 не имеет ничего общего со знаком для 6. Но, однако, это — многообещающая система; она несет в себе зачатки дальнейшего развития. Числа,

меньшие 10, изображаются каждое одним знаком, а не двумя, как в письме кхарошти. Сами знаки напоминают соответствующие арабские цифры: взгляните только на 6, 7, 8, 9! Вслед за сотнями, как мы видим, появляется своего рода «именованная позиционная система»: знаки для 100 и 1000 соединяются с цифрой, показывающей, сколько имеется сотен или тысяч.

Изобретение позиционной системы

У всех других народов, которые приняли «арабские» цифры, не исключая и самих арабов, цифры в своем письменном изображении являются в общей системе письма инородным телом. Только у индусов они не являются инородным телом; в 3-м веке до н. э. мы встречаем в качестве цифр от 1 до 9 те же самые знаки, которые позднее, будучи пополнены нулем, стали употребляться для изображения всех чисел. Уже одно это показывает, как правильно замечают Датта и Сингх, что индусы действительно должны быть названы изобретателями нашей позиционной системы.

Время изобретения

Когда же они ее изобрели? Трудный вопрос! На одной дарственной записи от 595 н. э.*) дата, соответствующая году «Samvat 346», записана цифрами брахми 3 4 6. Однако некоторые из этих записей по понятным причинам были подделаны. Кэй**), который перечисляет 18 записей, полагает, что 16 из них — подделки. Мне этот процент кажется слишком большим. Датта и Сингх в своей «Истории индийской математики» насчитывают более 30 надписей с годами, записанными десятичными цифрами; они датируются 595, 646, 674 и т. д. вплоть до 972 года.

Проф. Гонда, санскритолог Утрехтского университета, не видит оснований считать эти надписи подложными. Даже если бы в упомянутом списке и имелись некоторые подделки, то и тогда мы все-таки имели бы право утверждать, что по крайней мере в 7-м веке были широко известны 9 цифр и нуль. Само изобретение должно было иметь место ранее 6-го века, так как в подобных случаях новинку сначала употребляют ученые, а уже потом она довольно медленно распространяется в более широких кругах. Так это было и в Аравии, так было и в Европе.

Принцип позиционного обозначения, т. е. принцип, согласно которому одна и та же цифра в зависимости от занимаемого

*) *Epigraphia Indica*, II, стр. 19.

**) G. R. Kaye, *Notes on Indian Mathematics*, J. Asiatic Soc of Bengal 3 (1907), стр. 482.

ею места может обозначать четыре, или сорок, или четыреста, был во всяком случае известен в 6-м веке индусским астрономам и вычислителям. Для того чтобы доказать это, нам придется подробно рассмотреть обозначения, которыми пользовались эти астрономы и вычислители.

Числа поэтов

Не пытались ли вы когда-нибудь переложить стихами таблицу логарифмов или синусов? Сделайте такую попытку, и вы увидите, что это не так-то просто. Числа слишком грубы, слишком прозаичны и, кроме того, у них нет никаких или почти никаких синонимов. Поэтому писавшие в стихах индийские астрономы заменяли числа словами. Вместо 1 писали например *śaśī* — луна, потому что существует только одна луна. Вместо 2 писали «глаза», «руки» или «крылья», вместо 3 — «пламя», потому что в мифологии существуют 3 огня, или «братья», потому что у Рамы было три брата, и. т. д. Это совершенно так же, как если бы мы говорили «музы» вместо 9 и «грации» вместо 3; каждый хорошо знает, что это значит.

Большие числа начинали произносить, называя сперва единицы, потом десятки и т. д., т. е. совершенно противоположно тому, как это делаем мы. Нули также получали название, например 1021 можно было записать так:

śaśī — pakṣa — kha — eka

луна — крылья — дыра — один

1 2 0 1

Таким образом индусские астрономы и заучивали наизусть целые таблицы синусов.

Древнейшие из известных нам произведений, где именно так, в стихах, и даны таблицы синусов, является знаменитая «*Sūrya-Siddhānta*»*), стандартное руководство по индийской астрономии вплоть до настоящего времени **). Это произведение появилось не позже первой половины 6-го века, когда *Varāha-Mihira* писал свою сводную работу, в которой он цитирует пять астрономических руководств (сиддханты). Среди них упоминается также «*Pulisa-Siddhānta*», которая производит впечатление чего-то более примитивного, чем «*Sūrya-Siddhānta*», но в которой (если судить по цитате у Бхаттотпалы) также имелись ряды чисел-слов***)

*) Перевод с великолепным комментарием: J. Burgess and W. D. Whitney, J. Amer. Oriental Soc. 6 (1860), стр. 141.

**) «Настоящее время» оставляем на совести автора. (Прим. перев.)

***) По Датта и Сингху («*History of Hindu Mathematics*», I) эта цитата заимствована из первоначальной «*Pulisa-Siddhānta*», но по Тибо (G. Thibaut, *Astronomie, Grundriss Indo-Ar. Phil.*), обе «Пулиса-Сиддханты», которыми располагал Бхаттотпала, представляли нечто совершенно отличное от первоначальной «Пулиса-Сиддханты», из которой черпал Вараха-Михира.

Затем они встречаются в «Agni-purāṇa» — сводном религиозном произведении, которое Pargiter*) считал возникшим в первые века нашего летоисчисления, но которое другие авторы считают значительно более поздним.

Заключение: мы не знаем точно, когда впервые начали употребляться числа-слова, но около 500 н. э. они несомненно были в употреблении.

Ариабхата и его числа-слоги

Около этого времени жил также Ариабхата, самый древний астроном и вычислитель, которого мы еще можем датировать**). Ему, по его собственным словам, в 499 году было как раз 33 года. Он тоже знал таблицы синусов, но пользовался другим, не позиционным обозначением чисел. В качестве примера мы даем число 57 75 33 36 (число оборотов Луны за 432 000 лет) в обозначениях Ариабхаты:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ca} & \text{ya} & \text{gi} & \text{yi} & \text{ñu} & \text{su} & \text{ch} & \text{lr} \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 5 \end{array}$$

Слоги с буквой *a* выражают единицы и десятки, слог с буквой *i* — сотни и тысячи, и т. д. Двадцать пять согласных от *k* до *m* имеют значения от 1 до 25, например, *c*=6, *g*=3, *ñ*=5, *ch*=7. Восемь остающихся согласных от *y* до *h* имеют значения 30, 40, ... 100. Гласные *a*, *i*, *u*, *l* и т. д. обозначают степени 100. Нуль в этой системе не нужен: недостающие разряды просто опускаются.

Бхаскара I, ученик Ариабхаты, ввел улучшенную систему, которая является позиционной и обладает нулем и, кроме того, имеет еще то преимущество, что дает стихотворцу более свободы в выборе слогов, так что он может с большим удобством удовлетворять требованиям стихотворного размера. Этот Бхаскара, по Датта и Сингху, жил около 520 года. Подобно Ариабхате, он начинает писать числа с единиц, потом пишет десятки и т. д., но его система является действительно позиционной: те же самые слог, которые обозначают 4, могут также обозначать 40 или 400.

Таким образом, оказывается весьма вероятным, что около 500 года индийские астрономы и вычислители ввели позиционный способ обозначения. Первоначально они начинали с единиц. Первый, кто изменил порядок на обратный, был (насколько мы знаем) Джинабхадра Гани, который, по Датта и Сингха, жил около 537 года.

*) F. E. Pargiter, *Notes on the age of the Puranas*, J. Royal Asiatic Soc., 1902, стр. 254.

**) См. W. E. Clark, *The Āryabhatīya of Āryabhaṭa*, Chicago, 1930.

Где появился ноль?

Самая важная цифра есть ноль. Это была гениальная идея — сделать нечто из ничего, дать этому нечто имя и изобрести для него символ. «Это вроде перечеканки Нирваны в динамомашину», говорит Халстед. Вавилонская шестидесятеричная система была несовершенной, ибо она не имела нуля и не позволяла отличить 60 от 1 или $1/60$. Позднее был введен значок для недостающего разряда между цифрами числа, но на конце числа его еще не писали.

Греческие астрономы привели эту систему в законченный вид, прибавив в качестве нуля знак $\circ$, сокращение слова $\text{où\`en}$. Ноль был известен неопифагорейцу Ямвлиху, на что указал Фрейденталь в своей магистерской вступительной речи*).

Существовала ли какая-нибудь связь между вавилонской шестидесятеричной системой с греческим круглым нулем и индийской десятиричной системой с таким же круглым нулем?

Фрейденталь считает, что да. Он указывает, что как раз в то самое время, между 200 и 600 годами, когда в Индии вошло в употребление десятичное позиционное обозначение, индусы познакомились и с греческой астрономией. Их стандартное астрономическое сочинение «Сурья-Сиддханта» изобилует греческими терминами. *Kendra* (расстояние от центра) естественно произошло от $\chi\epsilon\nu\tau\rho\nu$, *lipa* (минута) — от $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}\nu$, и т. д. Но, что гораздо важнее, теоретическая часть «Сурья-Сиддханта» в значительной части основывается на греческой теории эпициклов**).

В то же время, изучая греческую астрономию и тригонометрию, индийские астрономы, естественно, познакомились также с шестидесятеричной позиционной системой и нулем.

Существует еще одно обстоятельство, указывающее, как полагает Фрейденталь, на чужеземное влияние. Как мы видели, числа стихотворцев пишутся в восходящей последовательности: единицы, десятки и т. д., которая естественно примыкает к названиям чисел в

*) H. Freudental, *5000 jaren internationale wetenschap*, Groningen (Noordhoff), 1946.

**) Эпициклом называется небольшой круг, центр которого движется по большому кругу вокруг Земли. Когда планета (или Солнце) описывает эпицикл, то она имеет одновременно два круговых движения. Вследствие этого земному наблюдателю это небесное тело представляется движущимся неправильно: иногда вперед, иногда назад. Великие греческие астрономы как Аполлоний и Птолемей, систематически объясняли все планетные движения при помощи эпициклов и эксцентрических кругов (рис. 24).

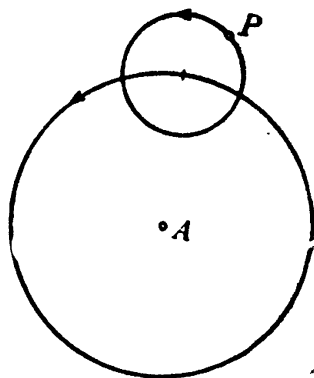


Рис. 24.

языке. При введении же цифр эта последовательность внезапно меняется на противоположную. Не могло ли и это быть результатом западного влияния? Вавилоняне и греки всегда начинали с самых высших единиц.

К этим аргументам Фрейденделя можно еще прибавить, что в индийских арифметических руководствах дроби изображаются совершенно так же, как в более поздних греческих папирусах вроде Vindobon. 19996 (о котором говорилось выше), а именно числитель пишется над знаменателем без всякой черты, обозначающей дробь.

Таким образом, гипотеза Фрейденделя сводится приблизительно к следующему: прежде чем индусы подверглись греческим влияниям, они уже имели свою стихотворную позиционную систему, расположенную десятично, начиная с низших единиц. У них были цифры от 1 до 9, и подобно этому же, знаки для 10, 20, ... Познакомившись с греческой астрономией, индусы узнали шестидесятеричную систему и нуль*). Они соединили эту позиционную систему со своей: к своим собственным цифры брахми 1—9 они добавили греческий нуль (ο) и приняли греко-вавилонскую последовательность разрядов.

Очень возможно, что так оно и было. Однако это не умаляет заслуг индусов: именно они довели до конца ту систему, которой мы пользуемся.

Все основные арифметические действия с целыми числами и дробями, именно в том виде, как мы изучаем их в школе, имеются и в индийских учебниках арифметики. Они вместе с правилами действий дошли до нас через арабов.

ПОБЕДНОЕ ШЕСТВИЕ ИНДИЙСКИХ ЦИФР

Когда Магомет в 622 году бежал в Медину, чтобы вскоре затем возвратиться победителем в Мекку, началось не только магометанское летоисчисление, но начался также совершенно новый период в истории нашей культуры. Объединившись и укрепившись в единобожии, арабы за один век покорили богатейшую часть мира от Инда до Пиренеев. В 632 году умирает пророк, в 635 году терпит поражение византийское войско, в 637 году — персидское. Но древняя культура покоренных народов не уничтожена: наоборот, она воспринимается исламом и расцветает пышным цветом. В 635 году халиф Омар переводит свою резиденцию в богатый Дамаск, центр греко-римской и семитической

*) В действительности этой гипотезе Фрейденделя противоречит то обстоятельство, что индусы, а также и арабы обозначали нуль не кружком, а точкой. (Прим. перев.)

культуры*). Евреи и христиане по закону ислама имели свободу вероисповедания, так как они веровали тоже в единого бога. Язычники должны были изменить веру. Священный язык — а им был арабский — сделался мировым языком этого мусульманского государства. Веротерпимость, мудрое управление, забота о мире и благосостоянии, покровительство искусствам и наукам — вот что характеризовало арабское владычество.

В 145 году после геджры (766 по нашему летоисчислению) халиф Аль-Мансур на развалинах Селевкии, недалеко от развалин Вавилона, повелел создать сказочный город Багдад. Еврейские, сирийские и персидские ученые и художники были привлечены истинно княжескими жалованьями. Двое из величайших арабских ученых и астрономов, Табит бен Курра и аль-Баттани, принадлежали даже к языческой секте сабеев. Поэтому не удивительно, что в арабской литературе сохранилось многое из вавилонской алгебры, астрономии и астрологии.

Приблизительно через 10 лет после основания Багдада один индус поднес халифу Аль-Мансуру астрономическое руководство, одну из сиддхант, которая вскоре получила большое распространение в арабском переводе под названием «Синдхинд**»). Так же прилежно переводились и труды великих греческих ученых. Евклид, Птолемей и Аристотель стали у арабов крупными авторитетами в геометрии, астрономии и философии.

Внук Аль-Мансура, Аль-Мамун, основал в Багдаде академию, обсерваторию и библиотеку. В этой библиотеке работал Мухамед Бен Муса, по прозвищу Аль-Хваризми, написавший первую арабскую книгу об алгебре. Его имя было позднее искажено в *Algorithmus*, и еще в настоящее время мы называем алгоритмом какой-нибудь способ вычисления. Тот же Аль-Хваризми написал также книжечку об индийском счете. Ее оригинал утерян, но в 12-м веке английский монах Аделяр из Базса (или кто-то другой) перевел ее на латинский язык. При помощи этого сохранившегося до настоящего времени латинского перевода Запад впервые познакомился с индо-арабскими цифрами.

Относительно нуля Аль-Хваризми пишет:

«Если (при вычитании) не остается ничего, то пишут маленький кружок, чтобы место не оставалось пустым. Этот кружок должен занять место, потому что в противном случае у нас будет меньше разрядов, и второй, например, мы можем считать за первый».

Аль-Хваризми был не первым из математиков арабской культуры, кто знал индийские цифры и индийский счет. Сирийский епископ Север Себохт, живший в 1-м веке после геджры, говорит

*) Перенос столицы в Дамаск был сделан не Омаром, а Моавией, пятым халифом, основателем династии Омейядов, в 661 году. (Прим. перев.)

**) См. H. S u t e r, *Die astronomischen Tafeln des Al-Khwarizmi*, Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7) Hist.-fil. 3 (1914), стр. 1.

с искренним восхищением об арифметике индусов и о девяти цифрах, при помощи которых выполняются все вычисления. Он находит, что астрономия индусов «превосходит греческую и вавилонскую» и высмеивает надменных гордецов, «которые считают, что достигли крайних пределов науки только потому, что они говорят по-гречески», и которые не хотят признавать, «что и другие тоже кое-что знают». Это, конечно, дошедшая до крайности переоценка индийской астрономии, которая, по существу, представляла не более чем выдержки из греческой. Впрочем, даже и для Аль-Хваризми точная греческая наука была еще выше его разума, как он сам говорит во введении к своей алгебре.

Аль-Хваризми уже знал две формы цифр. Различают западноарабские, или цифры Гобар, и восточноарабские (см. выше, рис. 21). Наши цифры ведут свое начало от цифр Гобар, которые употреблялись у испанских мавров. Восточноарабские цифры еще и теперь употребляются в Турции, Аравии и Египте, где они называются «индийскими цифрами». Обе формы, несомненно, происходят от цифр брахми.

Посмотрим теперь, каким образом индо-арабские цифры двинулись на север.

СЧЕТНАЯ ДОСКА (АБАК) ГЕРБЕРТА

Герберт, позднее папа Сильвестр II, родился в 940 году в Оверни. Будучи простого происхождения, он все же благодаря своим

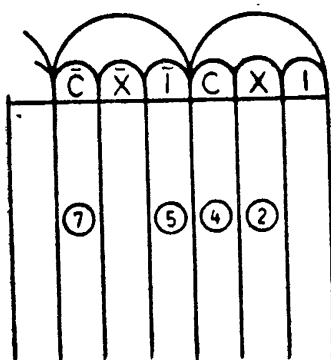


Рис. 25. Абак Герберта.

связям и способностям достиг высших церковных должностей. Во время своего путешествия в Испанию он познакомился с цифрами Гобар. В Реймсе он преподавал математику и написал книжку о счете на абаке. Он изобрел новый тип счетной доски, подробно им описанный для своих учеников (рис. 25). Вместо счетных камешков он употреблял «arises» (жетоны) — его собственное изобретение: круглые пластинки с цифрами на них, которые выглядели очень странно, как фантастические кабалистические зна-

ки. Но если их внимательно рассмотреть, то можно узнать западноарабские цифры Гобар. Нуля нет: на счетной доске он не нужен.

Вот таким образом впервые, за Пиренеями появляются наши 9 цифр. Но успех у них был невелик: время для них еще не пришло. На счетной доске действительно гораздо проще считать с камешками или фишками. Выдумка Герберта ввести в счет на абак арабские цифры была неудачна: их настоящее значение

Эта книга выдержала много изданий.

Прежде всего, казался странным нуль. «Этот знак один причиняет больше всего затруднений и неясностей», писал кто-то в 15-м веке. «Nulla figura» — а совсем не знак — так назывался нуль в то время по-латыни. И, однако, он является цифрой и даже цифрой *par excellence*, так как слово «цифра» произведено от латинского *cifra* — нуль (по-арабски *al-ṣifr* — пустота). Нуль не представляет ничего и, однако, удесятерять цифры, которые стоят перед ним. Этого никак не могли понять. «*Algorismus-cifra*» во Франции было ругательством, как у нас *kwiebus* (= *quibus**) или *Vocativus***) у Фрица Рейтера.

Однако в конце концов индийским цифрам была суждена победа. Как и во всех других областях культуры, здесь на первом месте стояла Италия. В 1202 году появилась прекрасная книга по арифметике — «*Liber Abaci*» Леонардо Пизанского, прозванного Фибоначчи. В ней Леонардо систематически и исключительно употребляет «*figurae Indorum*», которым в юности его научил мавританский вычислитель. Все другие способы вычисления, а также и счетную доску Герберта он считает менее ценными в сравнении с «*modus Indorum*».

Книга Леонардо положила начало. Большие торговые дома вскоре обнаружили большое преимущество новых цифр, и их стали употреблять в счетоводстве.

Однако в 1299 году появляется указ властей города Флоренции, запрещающий писать числа столбцами и употреблять индийские цифры. Почему? Это разъясняет нам одно венецианское сочинение по счетоводству: из 0 можно легко сделать 6 или 9. Будто римские цифры было не так легко подделать. Еще в 1594 году антверпенские власти предупреждают купцов, чтобы они не писали цифр в контрактах и векселях.

В 15-м веке вместе с итальянскими выражениями вроде «конто», «жиро», «сальдо», «ломбард» и «банкрот» из Италии к нам приходят и остаются знаки для цифр. В 1494 году франкфуртский бургомистр увещевает конторщиков знать меру с этими цифрами, т. е. не слишком часто употреблять их. В 1483 году появилась первая немецкая книга по арифметике Ульриха Вагнера. За ней последовали многие другие; самая известная принадлежит Адаму Ризе. Во всех этих общедоступных книгах обучают «счету на линиях и с цифрами», т. е. счету и на абаке и с арабскими цифрами.

В это время разгорелась сильная борьба между «абацистами», защитниками старой счетной доски, и «алгоритмиками». На одном рисунке из арифметической книги 1504 года мы видим аллегорическое изображение этой борьбы (рис. 27); направо сидит Пифагор,

*) Коими (лат.)

**) Звательный падеж (лат.).

считавшийся изобретателем абака, перед своей счетной доской, налево — Боэций перед столом с арабскими цифрами, которые, как полагали, он изобрел. Госпожа Арифметика выступает в



Рис. 27. Пифагор и Боэций. (Из книги «Marguerita philosophica» Грегора Рейша.)

качестве третьей стороны. По кислому лицу Пифагора видно, что дела его плохи.

Борьба продолжалась еще несколько веков, но дело было уже решено в пользу индийских цифр. Кто может себе представить, что 500 лет тому назад к северу от Альп почти все считали еще на счетной доске и писали числа римскими цифрами *)?

*) Изложение автором истории возникновения позиционной системы счисления и наших цифр нуждается в больших уточнениях; мы посвящаем этому особую статью в Приложении (стр. 437). (Прим. перев.)

ГЛАВА III БАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЗОР

<i>Общая история</i>	<i>История культуры</i>	<i>История науки</i>
3000 до н. э. Сумерийские города-государства	Клинопись. Высокий уровень культуры	Шестидесятеричная система
2800—1800 до н.э. Семитизирование		Таблицы для деления и умножения
Первая династия Вавилона	Расцвет культуры. Законодательство, правосудие	Изумительный расцвет алгебры и геометрии. Наблюдения Венеры
1700. Гаммурапи	Астрологический список примет «Enuma Anu Enlil»*)	Первоначальные астрономические вычисления. Наблюдения гелиакического восхода неподвижных звезд**)
1500—1250 до н. э. Вавилон под властью касситов		Датированные наблюдения затмений в Вавилоне
747 до н. э. Набонассар, царь Вавилона	Начало астрономической «эры Набонассара»	
729 до н. э. Ассириец Тиглат-Пилезар II вступает на вавилонский трон под именем Пулу		

*) «Enuma Anu Enlil» — «Когда Ану и Энлиль» — начальные строки рассматриваемого текста. Ану и Энлиль — боги неба и земли в шумерийской мифологии. (Прим. перев.)

**) Гелиакическим восходом звезды называется первый замеченный ее восход утром до восхода Солнца, в лучах которого звезда пропадает. Автор говорит о своих исследованиях, опубликованных в «Journal of Near Eastern Studies», но результаты этих исследований не могут считаться получившими общее признание. (Прим. перев.)

722 до н. э. Саргон II	Ассирийские царские дворцы	Астрономические учебники I·NAM·GIŠ·HAR и MUL-APIN*) вавилонского происхождения копируются в Ассирии
700 до н. э. Санхериб	Придворные астрологи	
650 до н. э. Ассурбанипал	Библиотека Ассурбанипала	
612 до н. э. Разрушение Ниневии. Конец ассирийского царства	Новый расцвет науки и искусства	Наблюдения Луны и планет
Нововавилонское халдейское царство		
580 до н. э. Небукад-незар II		
540 до н. э. Кир, основатель персидского царства	Вавилонская религия остается неприкосновенной	Рост точных наблюдений. Разделение зодиака. Планетные периоды
500 до н. э. Дарий	Календарные периоды	
333 до н. э. Александр Великий	Эллинизм	Расцвет астрономии
311 до н. э. Начало эры Селевкидов	Гороскопы рождения	Таблицы движений Луны и планет
247 до н. э. Начало эры Аршакидов		Возрождение алгебры**)
		Расширенные счетные таблицы

БАВИЛОНСКАЯ АЛГЕБРА

Мне кажется, что всего лучше вместо длинных рассуждений начать прямо с типичного древневавилонского клинописного текста. Ведь о том, что происходило в голове нашего коллеги — математика времен Гаммурапи, мы знаем только то, что можно вычитать из самих текстов.

Все переводы текстов заимствованы из монументального произведения О. Нейгебауэра «Клинописные математические тексты» (*Mathematische Keilschrifttexte, Quellen u. Studien Gesch. Math.*

*) I · NAM · GIŠ · HAR—Если чтение знака представляется ассириологу неясным, то он берет одно из его возможных чтений и пишет его большими буквами (надо иметь в виду, что каждый клинописный знак мог читаться и по-нумерийски и по-аккадски). Если звуковое выражение знака вполне установлено, то оно пишется обычным шрифтом. (Прим. перев.)

**) Утверждение автора о «возрождении алгебры» в эпоху эллинизма основывается только на том, что для эпохи Селевкидов найдены четыре алгебраических текста. (Прим. перев.)

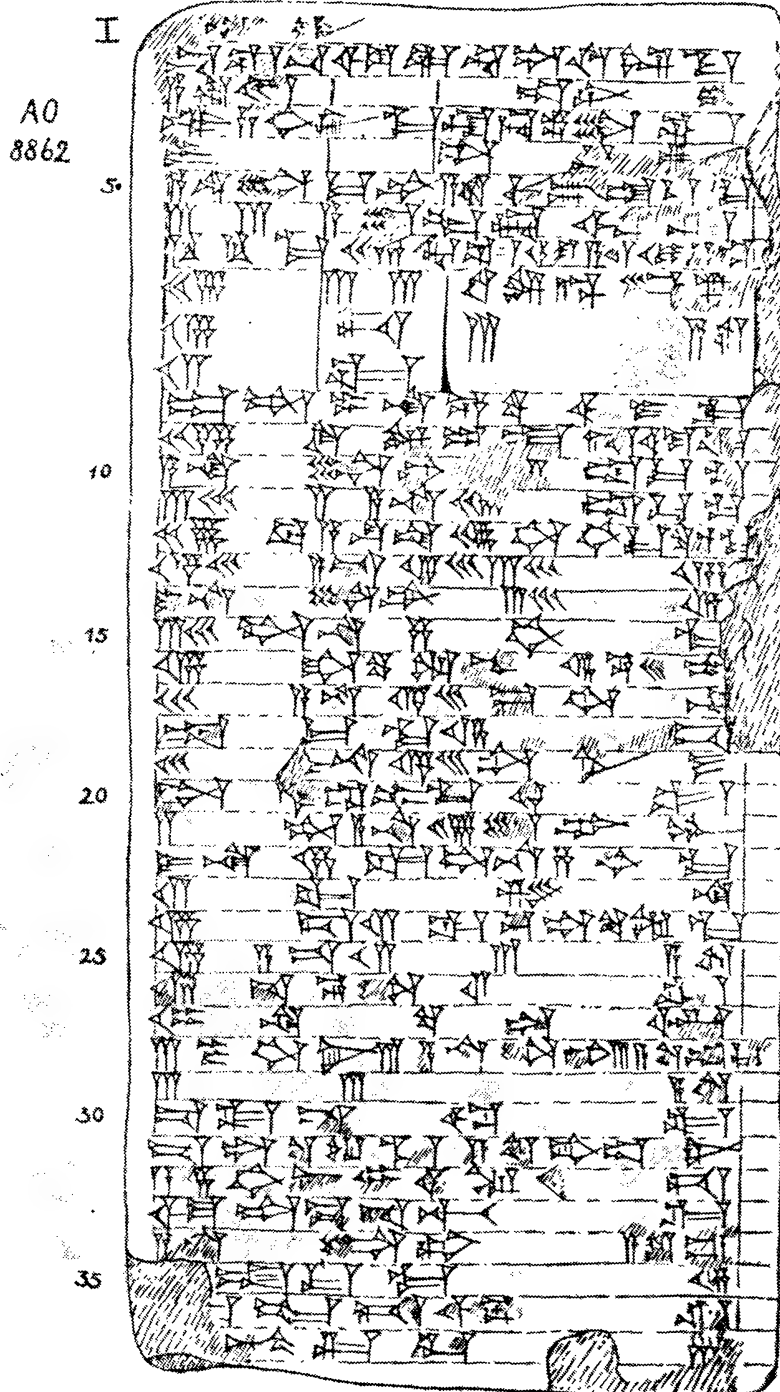


Рис. 28. Математический клинописный текст АО 8862, скопированный Нейгебауэром, МКТ, II, табл. 35. Читателю нетрудно будет найти все числа, встречающиеся в нижеследующем переводе в строчках от 6 до 29, начиная с числа 3,3 в 6-й строчке.

[A] 3, Berlin, 1935), пополненного Тьюро-Данженом (*Textes mathématiques babyloniens*, Leiden, 1938) и О. Нейгебауэром и А. Саксом (*Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven, Conn., 1945).

Первый пример*)

Текст АО 8862 из Сенкере (рис. 28) — древневавилонский (т. е. эпохи династии Гаммурапи) начинается так:

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 3,3 (т. е. 183) получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27. Спрашивается длина, ширина и площадь».

(Даны) 27 и 3,3 суммы¹

(Результат) 15 длина
12 ширина | 3,0 — площадь

Ты сделаешь так:

$$27 + 3,3 = 3,30$$

$$2 + 27 = 29.$$

Возьми половину от 29 (это дает 14;30).

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0,15.$$

0; 15 имеет 0; 30 квадратный корень.

$$14;30 + 0; 30 = 15 \text{ длина}$$

$$14;30 - 0; 30 = 14 \text{ ширина.}$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14; 12 истинная ширина.

15 длину, 16 ширину я перемножил:

$$15 \times 12 = 3,0 \text{ площадь.}$$

$$15 - 12 = 3$$

$$3,0 + 3 = 3,3.$$

Пояснение

Первые строчки устанавливают задание: 2 уравнения с 2 неизвестными, каждое из которых изображается одним значком: *us* и *sag* — длина и ширина. С сумерийскими словами обращаются, как с нашими алгебраическими знаками x и y ; у них то же самое преимущество, они остаются неизменными во всех падежах. Таким образом, мы наверняка можем переписать задачу при помощи двух алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} xy + x - y &= 183, \\ x + y &= 27. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

*) О. Neugebauer, MKT (*Mathematische Keilschrifttexte*) 1, стр. 113.

В последних четырех строчках текста только проверяется, что найденные числа $x = 15$ и $y = 12$ действительно удовлетворяют (1).

По смыслу решения видно, что автор для упрощения задачи вместо настоящей ширины y ввел новую ширину y' :

$$y' = y + 2, \text{ так что } y = y' - 2.$$

Этим задача действительно упрощается, так как уравнения для x и y' будут

$$\left. \begin{aligned} xy' &= 183 + 27 = 210, \\ x + y' &= 27 + 2 = 29. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Первое из уравнений (2) непосредственно получается, если сложить друг с другом оба уравнения (1). Приведение системы (1) к (2) в тексте передается очень лаконично, двумя строчками:

$$27 + 3,3 = 3,30,$$

$$2 + 27 = 29.$$

После этого идет решение упрощенной системы (2). Оно получается при помощи твердо установленного правила, которое постоянно встречается и в других текстах. В современной алгебраической символике это правило можно записать так:

Решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} xy' &= p, \\ x + y' &= a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

будет

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a + w, \\ y &= \frac{1}{2}a - w, \end{aligned} \quad w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - p}. \quad (4)$$

Действительно, все то, что вавилоняне шаг за шагом вычисляли на конкретных числах, равносильно применению формул (4). Но этих формул они не дают: дается только ряд примеров, которые иллюстрируют один и тот же способ вычисления.

Второй пример (МКТ I, стр. 280)

В другом древневавилонском тексте (VAT 6598), кроме системы вида (3), решается еще подобная система, в которой вместо суммы дается разность

$$\left. \begin{aligned} xy &= p, \\ x - y &= d. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решение таково:

$$x = w + \frac{d}{2}, \quad y = w - \frac{d}{2}, \quad w = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + p}. \quad (6)$$

Как пришли вавилоняне к этим способам решения? Об этом мы можем только строить догадки. Правда, мы можем выяснить, как они этого не делали: они не следовали арабскому способу — определить одно из неизвестных из одного уравнения (5) и подставить его в другое. Арабы любую алгебраическую задачу обычно приводили к одному уравнению с одним неизвестным. Вавилоняне также умели исключать неизвестные подстановкой, как мы это увидим ниже, но в рассмотренных случаях они этого не делали, иначе они должны были бы, найдя, например, x из некоторого квадратного уравнения, вычислять y как $a - x$ или $x - d$. Вместо этого они в случае (4) определяли x как $\frac{1}{2}a + w$, а y как $\frac{1}{2}a - w$.

Совершенно так же, как заметил Гандз, по большей части поступает и Диофант, поздний греческий автор «Арифметики». Его методы имеют гораздо более общего с вавилонской алгеброй, чем с характером мышления классических греческих ученых. Он также получает числовые решения своих уравнений в каждом конкретном случае, не давая общей формулы. Когда Диофант должен определить два неизвестных x и y , для которых дана сумма a , или разность d , то он часто полагает

$$x = \frac{1}{2}a + z, \quad y = \frac{1}{2}a - z$$

или

$$x = z + \frac{1}{2}d, \quad y = z - \frac{1}{2}d$$

и все другие условия, которым должны удовлетворять x и y , выражает через новую неизвестную z .

Тот же метод мы находим в наших клинописных текстах в применении не только к квадратным, но также и к линейным уравнениям. Возьмем, например, в высшей степени замечательный древневавилонский текст VAT 8389.

Третий пример (МКТ I, стр. 323)

«С одного бура (единица площади) я снял жатву 4 гура зерна. С другого бура я снял жатву 3 гура зерна. Урожай с первого поля был на 8,20 больше, чем со второго. Площади обоих полей составляли вместе 30,0. Как велики были поля?»

Для понимания дальнейших вычислений нужно знать, что вся площадь обоих полей (30,0) измеряется в SAR-ах (1SAR = квадрату со стороной в 12 локтей), а разность урожаев — в «сила», и что

$$1 \text{ бур} = 30,0 \text{ SAR},$$

$$1 \text{ гур} = 5,0 \text{ сила}.$$

Как выразился Туро - Данжен, SAR и «сила» представляют «ученые» единицы, которые употребляются в математических вычислениях, а «бур» и «гур» — более удобные на практике единицы и большего размера.

Первое поле приносит 4 гур = 20,0 сила на 1 бур = 30,0 SAR, а второе — 3 гур = 15,0 сила на 30,0 SAR. Назовем x и y неизвестные площади (выраженные в SAR-ах). Тогда нам придется решать 2 уравнения с 2 неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{20,0}{30,0}x - \frac{15,0}{30,0}y &= 8,20, \\ x + y &= 30,0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вавилоняне могли бы определить x из второго уравнения, подставить его в первое и получить y . Они так и сделали в другой задаче того же текста, где вместо $x + y$ дано $x - y$. Но в этой задаче они избрали другой путь. Сначала всю площадь делят пополам:

«Раздели 30,0—сумму площадей—пополам: 15,0. Возьми так 15,0 и еще раз 15,0».

Теперь вычисляется, каковы должны были бы быть урожаи, если бы каждая из обеих площадей равнялась 15,0.

Это вычисляется очень запутанно: «обратная величина» от 30,0 умножается на 20,0 и находится «ложный урожай зерна» 0;40, т. е. урожай первого поля на 1 SAR. Урожай поля в 15,0 SAR будет, следовательно,

$$0;40 \times 15,0 = 10,0.$$

«Держи это у себя в голове», — гласит текст. Таким же образом находят для второго поля «ложный урожай зерна» в 0;30 с 1 SAR и, следовательно, 7,30 с 15,0 SAR.

Таким образом, если бы каждое из полей равнялось 15,0 SAR, то разность урожаев была бы:

$$10,0 - 7,30 = 2,30.$$

Но по условию задачи разность урожаев должна быть 8,20. «Отними», — говорит текст:

$$8,20 - 2,30 = 5,50.$$

«Держи 5,50 у себя в голове», — гласит текст и следующим образом вычисляет дальше:

«Обратную от 1;10 я не знаю. Что я должен множить на 1;10, чтобы получить 5,50? Возьми 5,0, ибо $5,0 \cdot 1;10 = 5,50$. Отними эти 5,0 от одних 15,0 и прибавь их к другим 15,0. Первое будет 20,0, второе $10,0 \cdot 20,0$ будет площадью первого поля, 10,0—второго».

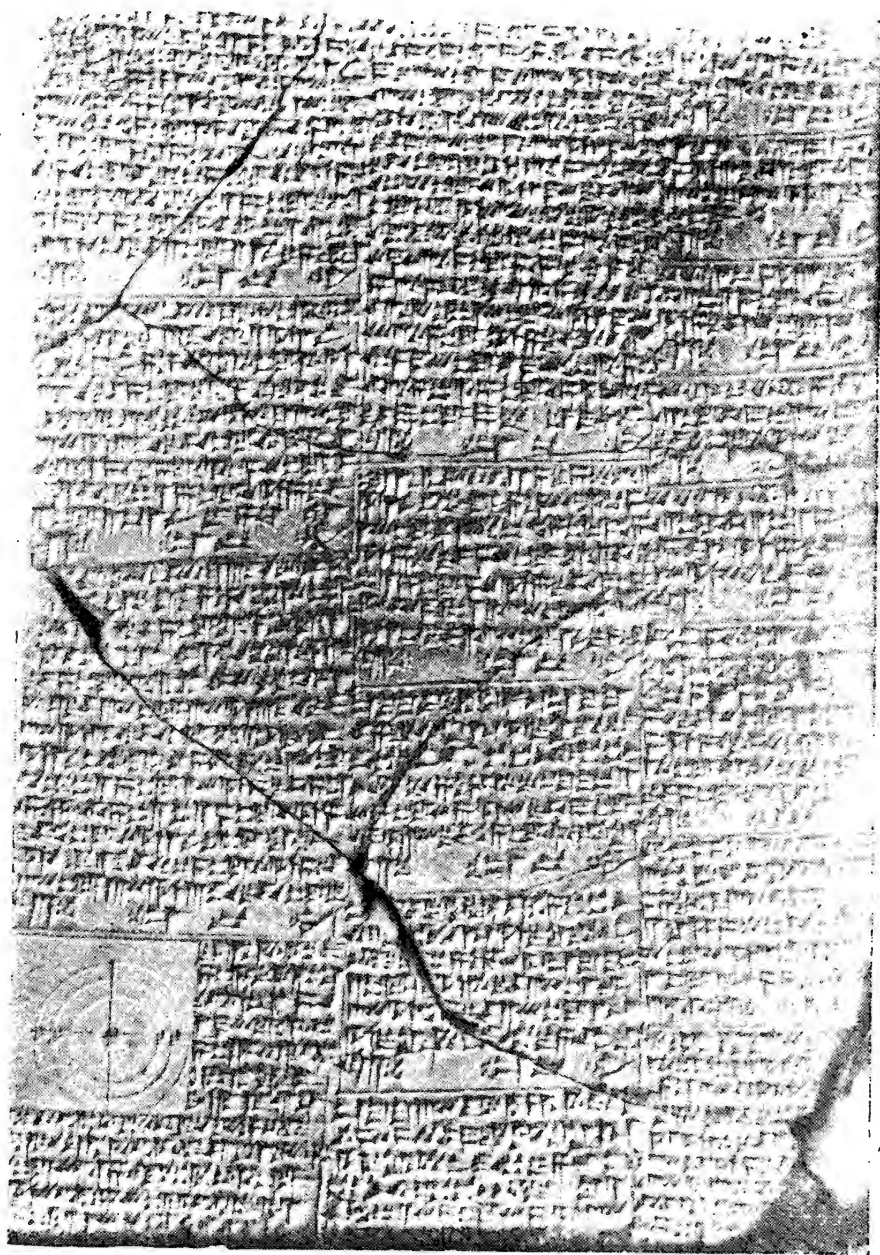


Рис. 29. Древневавилонский клинописный текст BM 85194. Изображенная сторона таблички содержит 16 задач с решениями. Задачи относятся к плотинам, валам, колодцам, водяным часам и земляным работам. Четвертая задача, снабженная чертежом, относится к круговому валу. Часть этой задачи разобрана на стр. 92, четвертый пример. 14-я задача рассматривает усеченный конус. Объем его определяется умножением высоты на полусумму площадей верхнего и нижнего оснований (см. стр. 102).

Преподаватель низшей школы должен был бы таким образом пояснить детям ход мысли:

Если бы каждое поле равнялось 15,0, то разность урожая была бы 2,30. Она должна быть, однако, 8, 20; таким образом, не хватает 5,50. Для каждой единицы площади, на которую мы увеличиваем первое и уменьшаем второе поле, первое приносит на 0;40 больше, а второе на 0;30 меньше, так что получающуюся разность надо умножить на $0;40 + 0;30 = 1; 10$. Эту величину для получения 5,50 нужно взять 5,0 раз. Таким образом, первая площадь должна быть равна $15,0 + 5,0 = 20,0$, а вторая $15;0 - 5; 0 = 10;0$.

Мы не знаем, рассуждали ли вавилоняне точно так же, как наш воображаемый преподаватель, но я все же думаю, что ход их мыслей можно лучше передать при помощи этих примитивных рассуждений, чем посредством запутанного алгебраического преобразования, которое дает Нейгебауэр (на стр. 334 своей книги).

В каждом случае мы видим, что когда давалась сумма $x + y = 2h$, то вавилоняне, точно так же как и Диофант, полагали

$$x = h + w, \quad y = h - w$$

и затем пытались определить w . Если, например, кроме суммы, давалось еще произведение P , то для определения w получалось уравнение

$$xy = (h + w)(h - w) = h^2 - w^2 = P,$$

и таким образом,

$$w^2 = h^2 - P.$$

Этим способом они могли, очевидно, вывести формулы (4), коль скоро им была известна формула

$$(h - w)(h + w) = h^2 - w^2. \quad (8)$$

Аналогично выводятся и формулы (6).

Четвертый пример (МКТ I, стр. 154)

Можно усмотреть и из других текстов, что это замечательное произведение (8) было известно вавилонянам. Так, например, в тексте ВМ (British Museum) 85194 (рис. 29) задача требует построить профиль насыпи в виде равнобедренной трапеции (рис. 30), для которой дается основание a , наклон

$$\beta = \frac{a - b}{2h}$$

и площадь

$$S = \frac{a + b}{2} h.$$

Если умножить 2β на $2S$

$$4\beta S = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

то можно найти b^2 :

$$b^2 = a^2 - 4\beta S. \quad (9)$$

В тексте b^2 , действительно, получается по формуле (9). В другой задаче того же текста b задается, а вычисляется по формуле

$$a^2 = b^2 + 4\beta S. \quad (10)$$

Все это было бы совершенно непонятным, если допустить, что произведение (9) не было известно вавилонянам.

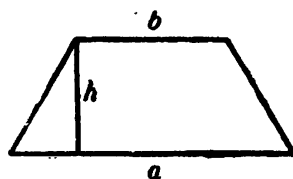


Рис. 30.

Пятый пример (МКТ III, стр. 8, № 14)

Вавилоняне должны были знать и такие формулы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (11)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (12)$$

Действительно, в древневавилонском тексте ВМ 13901 находится следующая задача:

«Площади двух моих квадратов я сложил: 25,25. (Сторона) второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5 GAR».

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25,25, \\ y &= \frac{2}{3}x + 5. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Чтобы подставить y из второго уравнения в первое, необходимо воспользоваться формулой (11)

$$(0;40x + 5)^2 = 0;40^2 x^2 + 2 \cdot 0;40 \cdot 5x + 5^2.$$

После этого для x получается квадратное уравнение

$$ax^2 + 2bx = c, \quad (14)$$

где

$$a = 1 + 0;40^2 = 1;26,40,$$

$$b = 5 \cdot 0;40 = 3;20,$$

$$c = 25,25 - 5^2 = 25,0.$$

В тексте сначала вычисляются три коэффициента a , b , c и затем решается квадратное уравнение (14) по правильной формуле

$$x = a^{-1} (\sqrt{ac + b^2} - b) \quad (15)$$

и, наконец, определяется $y = \frac{2}{3}x + 5$. Таким образом, и на самом деле действовали согласно описанному способу исключения, а формула (11) была известна.

Квадратные уравнения (МКТ III, стр. 6)

В начале этого текста решение квадратного уравнения показывается на простых примерах, вроде:

1. $x^2 + x = 0$; 45,
2. $x^2 - x = 14$; 30,
6. $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$; 35,
7. $11x^2 + 7x = 6$, 15.

Например, решение 2-го уравнения излагается так:

«Возьми 1, коэффициент (при x). Разломи 1 пополам. 0; 30 $\times$ 0; 30 = 0; 15, прибавь к 14,30, и 14,30;15 имеет корнем 29;30.0;30, которые ты помножил самих на себя, прибавь к 29;30 и 30 будет (сторона) квадрата».

Каким же образом могли бы вавилоняне найти решение квадратных уравнений

$$x^2 \pm ax = b. \quad (16)$$

Я думаю, что они должны были бы поступить совершенно так же, как арабы и мы, а именно обратить левую часть в квадрат:

$$\left(x \pm \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

Другая возможность, менее, однако, вероятная, должна заключаться во введении второго неизвестного $y = x \pm a$, так что даются разность a между x и y и произведение

$$xy = x(x \pm a) = b.$$

После этого задача приводится к (5). Однако прямой способ решения кажется мне более вероятным.

Шестой пример (МКТ III, стр. 9, № 18)

В наших текстах встречаются также системы уравнений с тремя и более неизвестными, например в том же тексте ВМ 13 901:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 23,20, \\ x - y &= 10, \\ y - z &= 10. \end{aligned}$$

Метод решения опять тот же самый: выражают x и y через z и получают для z квадратное уравнение. Очевидно, подобные исключения для древних алгебраистов были, по-видимому, сущим пустяком.

В других случаях исключение не производится, но оба неизвестных определяются одновременно. Так, например, в том же

тексте система

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= S = 21,40, \\ x - y &= a = 50 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

решается по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + w, \\ y &= \frac{a}{2} - w, \\ w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Следовательно, мы опять имеем ту же самую идею, которую мы находим у Диофанта: если дана сумма $x+y=a$, то x и y оба полагаются равными $\frac{a}{2}$ плюс или минус поправочный член, и этот поправочный член находится из другого условия, которому должны удовлетворять x и y .

В следующей задаче (№ 9) вместо $x+y$ дается $x-y$:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= S + 21,40, \\ x - y &= d = 10. \end{aligned} \right\} \quad (19),$$

Решение идет совершенно аналогично:

$$\left. \begin{aligned} x &= w + \frac{d}{2}, \\ y &= w - \frac{d}{2}, \\ w &= \sqrt{\frac{S}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20),$$

Существуют также тексты, которые содержат только длинные ряды задач без решений. Иногда решения их даются в других текстах: так, например, текст G в «Mathematical Cuneiform Texts» O. Neugebauer и A. Sachs (стр. 66) содержит 31 задачу, из которых первые 8 решаются в тексте H, а последние 10—в тексте J. Все это показывает, что вавилонская алгебра систематически преподавалась в школах при помощи целого ряда задач.

Седьмой пример (МКТ I, стр. 485)

Решение иной вавилонской задачи является совсем не легким делом даже для нас. Возьмем, например, YBC 4697 (Yale Babylonian Collection) задачу D2:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} (x+y) - 0;1 (x-y)^2 &= 15, \\ xy &= 10,0. \end{aligned} \right\} \quad (21),$$

Нейгебауэр сначала полагал, что эта задача должна привести к кубическому уравнению для x или y . Но если исходить из упомянутой вавилонской идеи, что неизвестные x и y равны своей сумме плюс или минус поправочный член, то, положив

$$\left. \begin{aligned} x &= u + v, \\ y &= u - v, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

приводим (20) к системе

$$\left. \begin{aligned} 0;40u - 040;v^2 &= 15, \\ u^2 - v^2 &= 10,0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Отсюда мы можем без труда исключить v^2 , после чего для u получается квадратное уравнение.

Восьмой пример (МКТ I, стр. 204)

Но даже и кубических уравнений вавилоняне не боялись. Так, например, в тексте ВМ 85200, который согласно Нейгебауэру (стр. 193) моложе всех разобранных до сих пор текстов, есть простое кубическое уравнение (задача 22):

$$12x^3 = 1; 30.$$

Оно решается при помощи извлечения кубического корня из

$$\frac{1}{12} \cdot 1; 30 = 0;7,30,$$

откуда $x=0;30$, что, конечно, при помощи таблицы получается так же просто, как извлечение квадратного корня.

Следующая за этой задача 23 приводит к смешанному кубическому уравнению

$$x^2(12x + 1) = 1; 45.$$

Умножая обе части на 12^2 , писец получает:

$$(12x)^2 (12x + 1) = 4,12$$

и сразу находит отсюда $12x=6$. Откуда он это взял? Конечно, из таблицы. Мы ведь знаем, что существовали таблицы, которые для чисел вида $n^2(n+1)$ давали их «корень».

Следовательно, при помощи этих таблиц вавилоняне могли смешанные кубические уравнения вида

$$x^2(ux + 1) = v$$

решать так же просто, как чистые квадратные или кубические уравнения.

Геометрическое доказательство алгебраических формул?

Каким образом вавилоняне могли вывести формулы

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2?$$

Мы этого не знаем. Может быть, при помощи чертежей вроде тех, которые мы находим у Евклида и у арабов (рис. 31 и 32).

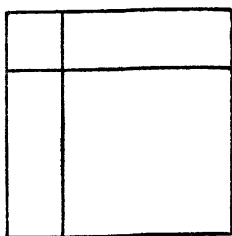


Рис. 31.

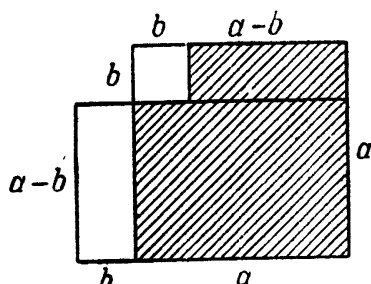


Рис. 32.

Во всяком случае они обычно рассматривали произведение, как площадь прямоугольника, квадрат — как площадь квадрата, как это показывает их собственная терминология.

Однако нельзя позволять геометрическим терминам вводить нас в заблуждение. Вавилоняне мыслили прежде всего алгебраически. Хотя они изображали для наглядности неизвестные числа линиями и площадями, но последние все же всегда оставались числами. Это можно видеть из нашего первого примера, где площадь xu и линейный отрезок $x - y$ попросту складываются, что с геометрической точки зрения представляет бессмыслицу. Вавилоняне не боялись также перемножать друг с другом две площади, чего осторожный Евклид никогда не делает.

Даже в задачах геометрического содержания вопрос, который ставили вавилоняне, всегда сводился к вычислению чего-нибудь и никогда — к построению или доказательству. Сквозь геометрическую внешность просвечивает алгебраическая сущность. Рассмотрим еще

Девятый пример (МКТ I, стр. 342)

В древневавилонском тексте VAT 8512 из Ларсы поставлена такая задача (рис. 33):

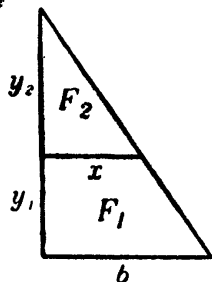
Треугольник с заданным основанием $b=30$ делится прямой, параллельной основанию, на две части F_1 и F_2 — трапецию и

треугольник с высотами y_1 и y_2 . Дано:

$$F_1 - F_2 = \Delta = 7,0,$$

$$y_1 - y_2 = \delta = 20.$$

Таким образом, имеется три неизвестных: делящий отрезок x и высоты y_1 и y_2 , между которыми имеются соотношения



$$\frac{1}{2} y_1 (x + b) - \frac{1}{2} y_2 x = \Delta, \quad (1)$$

$$y_2 - y_1 = \delta. \quad (2)$$

К ним присоединяется еще одна пропорция, которая ясна из чертежа:

$$y_2 : y_1 = x : (b - x). \quad (3)$$

Решение состоит в следующем: прежде всего определяется

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta}{\delta} + b \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 \right\}} - \frac{\Delta}{\delta}, \quad (4)$$

а затем y_1 и y_2 :

$$y_1 = (b - x) \frac{\Delta}{\frac{1}{2} b^2 - x^2}, \quad (5)$$

$$y_2 = y_1 + \delta. \quad (6)$$

Все эти формулы справедливы. Например, (5) можно получить, определяя y_2 из (3) и подставляя в (1) и затем находя y_1 . Если присоединить к этому еще (2), то получится квадратное уравнение относительно x , решением которого будет (4).

Отсюда, во-первых, следует, что вавилонянам было известно, что такое пропорциональность, так как без соотношения (3) решить задачу невозможно. Затем ясно, что вавилонянин был в состоянии определить неизвестные из системы уравнений одно через другие и произвести подстановку. Если принять во внимание, что в распоряжении вавилонян не было наших алгебраических обозначений, которые все упрощают, то надо сознаться, что это просто великолепно. Совершенно ясно, что в такого рода текстах самым важным и наиболее трудным делом является именно алгебра. Геометрия крайне проста: кроме понятия пропорцио-

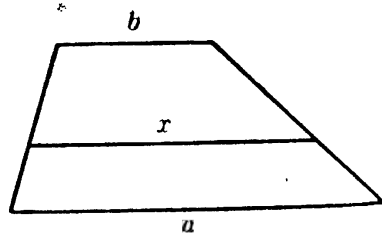


Рис. 34.

нальности для параллельных прямых и знания площадей треугольника и трапеции, ничего больше и не требуется.

В другом тексте (МКТ I, стр. 130) находится замечательная формула для длины отрезка x , параллельного основаниям a и b трапеции (рис. 34), площадь которой делится этим отрезком пополам, а именно:

$$x^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) *).$$

*) Если пользоваться этой формулой, то все рассуждения автора относительно преобладания алгебраического элемента в рассмотренной задаче VAT 8512 отпадают. Красивое чисто геометрическое решение этой задачи было дано Хубером в «Isis» за 1955 год и — независимо от него — сотрудником Ленинградского Эрмитажа А. А. Вайманом.

Заданный треугольник ABK (рис. 34а) преобразуем в трапецию $ABCD$ так, чтобы площади $ADEH$ и $EHBC$ были равны. Обозначив длину AD через z , получим:

$$F_2 + y_2 z = F_1 + y_1 z,$$

откуда

$$z = \frac{F_1 - F_2}{y_2 - y_1} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

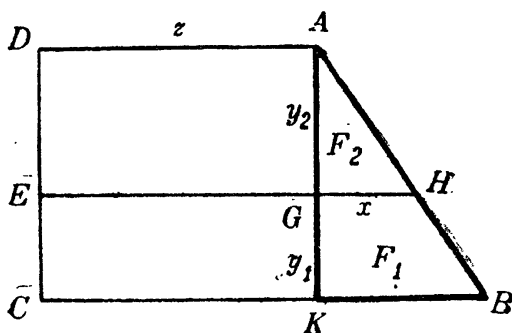


Рис. 34а.

Длина EH определяется по только что выведенной формуле для трапеции; следовательно,

$$x = EH - z = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(b + \frac{\Delta}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 \right\}} - \frac{\Delta}{\delta}.$$

Таким образом, «система уравнений» отпадает. Затем при помощи известного x определяем разность $F_1 - F_2$:

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \left\{ y_1 (b + x) - y_2 x \right\},$$

откуда

$$2\Delta = y_1 (b + x) - y_2 x.$$

Из равенства наклонов линий AH и HB имеем:

$$\frac{x}{y_2} = \frac{b - x}{y_1}$$

$$y_2 = \frac{y_1 x}{b - x}.$$

Учебный текст (МКТ II, стр. 39)

Очень досадно, что почти все тексты приводят только задачи с решениями и совершенно не содержат выводов. Решение дается как своего рода рецепт, причем не говорится, каким образом до него дошли. Однако эти рецепты так или иначе должны были быть получены, и учителя должны были объяснить своим ученикам, каким образом определяются неизвестные из уравнений и как одно неизвестное можно выражать через другое.

Пример такого вывода был найден Фрейденталем в тексте, который Нейгебауэр и Тюрро-Данжен отказывались истолковать*). Дневневавилонский текст АО 6770 из Урука является «учебным текстом». Если первую строку перевести по Нейгебауэру (МКТ II, 39), перевод строк от 2 до 8 исправить по Тюрро-Данжену (стр. 71), то эти строки будут иметь следующий смысл:

«Длина и ширина вместе равны площади. Поступай так:
Произведение поставь два раза.

Отними от него единицу.

Возьми от этого обратную.

На произведение, которое у тебя осталось, умножь это и ты получишь ширину».

В первой строчке ставится задача

$$x + y = xy. \quad (7)$$

Следующие строчки дают решение в совершенно абстрактной форме, без чисел,

$$y = \frac{1}{x-1} x. \quad (8)$$

Конец текста содержит обыкновенные задачи с решениями. [Д-р Брейнс**), исходя из филологических соображений, полагает,

Подставив это значение в предыдущее уравнение, находим:

$$y_1 = (b-x) \frac{\Delta}{\frac{1}{2} b^2 - x^2}.$$

Таким образом, для решения рассмотренной задачи достаточно только иметь понятие о наклоне прямой, которое документально засвидетельствовано вавилонскими текстами. Ведь из существования у египтян понятия *šeked* наклонных плоскостей (см. главу I) автор не выводит, что египтянам было хорошо известно понятие о пропорциональности. (Прим. перев.)

*) Я очень благодарен моему другу Фрейденталю за разрешение опубликовать здесь его толкование.

**) E. M. Bruins, *Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniens*, Conférence, Palais de Découverte, Université de Paris, Série D, № 11 (1954).

что приведенное выше толкование неправильно. Дело в том, что $\dot{u}$ в первой строчке, равносильное союзу «и», не может обозначать здесь сложения, а $\dot{i}ku$ (мера площади) переведено так, как будто текст гласил $a\dot{s}a$ (площадь).

Лично я не имею возможности судить, насколько существенны эти филологические аргументы. Но мы можем убедиться, что математически формула (7) равносильна формуле (8). А если Тюрро-Данжен правильно перевел строки 2—8, то в таком случае формула (8) дана в самом тексте. Если этот перевод принять за основу, то формула (7) должна быть тоже принята, ибо она дает, по существу, правильное истолкование мысли автора текста. Независимо от того, выражается ли автор грамматически правильно или нет, нельзя отрицать тот факт, что сумма длины и ширины, которую он имеет в виду, равна площади. В математическом тексте, естественно, дело должно обстоять так, чтобы все выраженное словами находилось в соответствии с математическим содержанием.

Нейгебауэр (МКТ III, 19) дает еще один пример общего правила для вычислений. Вольный перевод текста ВМ 34568 будет:

«Длину, ширину и диагональ умножь на длину, ширину и диагональ. Площадь возьми два раза. Произведение из (квадрата длины, ширины и) диагонали вычти. Возьми половину этого. (Обратную величину) длины, ширины и диагонали умножь на половину. И получишь диагональ».

В тексте нет слов, поставленных в скобки. Нейгебауэр и Тюрро-Данжен добавили их, чтобы получить осмысленную формулировку. И мы снова видим, что при истолковании текста ведущие ученые ставили на первое место математическую правильность.

Если l , b , F и d будут соответственно длина, ширина, площадь и диагональ прямоугольника, мы получим формулу

$$d = \frac{\frac{1}{2} [(l + b + d)^2 - 2F]}{l + b + d}.$$

Я весьма обязан д-ру Брейнсу за то, что он обратил мое внимание на эту формулу*).

*) В квадратные скобки здесь и в дальнейшем заключены добавления автора в английском или немецком переводах.

Для понимания возражений Брейнса надо привести первую строку разбираемого текста (МКТ II, стр. 37)

$u\dot{s} \dot{u} sag mala g\dot{a}n limta\dot{h}ar;$

буквально:

«Длина и ширина сколько „ган“ равняется (?)».

$U\dot{s}$ и sag —сумерийские термины для обозначения «длины» и «ширины» вообще (как наши x и y). Они соединены союзом $\dot{u}$ =и, но нельзя сказать, что этот союз обозначает сложение. Термин $g\dot{a}n$ или $\dot{i}ku$ обозначает специальную меру площади; площадь вообще обозначается $a\dot{s}a$. Если бы вавилонский автор захотел выразить соотношение

$$x + y = xy = 1,$$

ВАВИЛОНСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Относительно пропорциональностей для параллельных линий мы уже говорили (см. пример 9).

Площади и объемы

Мы уже видим, что вавилоняне умели вычислять площади треугольника или трапеции.

Площадь круга с радиусом r они полагали равной $3r^2$, а длину окружности равной $6r$. Мы знаем, что египтяне имели для π лучшее приближение.

Объемы призмы и цилиндра вычислялись, конечно, посредством умножения площади основания на высоту.

К сожалению, у нас нет таких задач для конусов и пирамид, есть только для

Усеченных конусов и пирамид (МКТ I, стр. 176 и 187)

В древневавилонском тексте BM 85194 (см. наш четвертый пример) объем усеченного конуса вычисляется по неправильной формуле:

$$\frac{1}{2}(\text{пл. нижн. основания} + \text{пл. верхн. основания}) \times \text{высота}.$$

В том же самом тексте встречается также усеченная пирамида, высота которой задана, а оба основания представляют собой квадраты со сторонами $a=10$ и $b=7$. Сначала вычисляется

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1,12;15,$$

затем $a-b=3$ и отсюда, не совсем ясно каким образом, получается число... 45, которое, например, можно прочесть как 0;45.

Нейгебауэр истолковывает 0;45 как $\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, Тьюро-Данжен — как

$\frac{1}{4}(a-b)$. Эти 0;45 теперь прибавляются к 1,12;15, и получается 1,13. Последнее число умножается на высоту $h=18$. Умножение неправильно: должно получиться 21,54, однако в тексте дано

то он должен был бы сказать: *aša 1 gán*. Нейгебауэр указывает, что перевод последнего слова сомнителен: *schliesslich wäre noch möglich, dass das li-im-ta-har am Schluss nicht «Gleichheit» (zwischen welchen Grössen?), sondern «quadratische» Form einer Figur bedeuten soll*. Действительно, *mithartu* — квадрат, *imtahar* — относящееся к квадрату, квадратная (сторона). (Прим. перев.)

22,30. По-видимому, ради удобства, на 18 умножили не 1,13, а 1,15. Подобного рода округления встречаются довольно часто *).

Если верить Нейгебауэру, вычисление должно было производиться так:

$$V = \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right\} h. \quad (1)$$

Это — точная формула для объема усеченной пирамиды. Наоборот, по Тюрю-Данжену, вавилоняне применяли лишенную смысла формулу

$$V = \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{a-b}{4} \right\} h. \quad (2)$$

Оговорка, которую сам Нейгебауэр делает против своей же интерпретации, заключается в том, что пробел в тексте перед числом 45, где стоит небольшое число неудобочитаемых знаков, слишком мал для записи вычисления $\frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$. Другая трудность в том, что два других текста, тесно связанных с ВМ 85194, а именно ВМ 85196 и ВМ 85210, оба пользуются неверной формулой

$$V = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) h. \quad (3)$$

Однако оба эти возражения отпадают, если принять, что 0;45 является ошибкой вычислителя, а на самом деле должно стоять

$$\left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = 2;15.$$

В таком случае вычисление велось по формуле

$$V = \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right) \right\} h, \quad (4)$$

которая хотя и неправильна, но совпадает с (3).

Теорема Пифагора (МКТ II, стр. 53)

В древневавилонском тексте ВМ 85196 имеется следующая изящная задача (№ 9):

«Palû (балка?) длины 0;30 (прислонена к стене). Ее верхний конец опустился на 0;6. Как далеко отодвинется ее нижний конец?»

*) Только не в специальных математических текстах. В немецком переводе заключительная фраза читается так: «По-видимому, ради удобства на 18 умножили не 1,13, а 1,15. Или же с самого начала к 1,12;15 прибавили не 0;45, а 2;45, так что получилось 1,15. В таком случае 1,13 надо было бы считать ошибкой переписчика». (Прим. перев.)

Слова, заключенные в скобки, добавлены, но смысл получается вполне однозначно из приведенного решения.

Задача сводится к решению прямоугольного треугольника, для которого даны гипотенуза $d = 0;30$ и один из катетов $h = 0;30 - 0;6 = 0;24$. Второй катет b , как и должно, вычисляется «по Пифагору»

$$b = \sqrt{d^2 - h^2}.$$

Как прочно вавилоняне держались в течение полутора тысяч лет традиций этого метода, можно видеть из ВМ 34568, текста эпохи Селевкидов *), в котором среди некоторого числа других задач, касающихся длины, ширины и диагоналей прямоугольника, имеется следующая задача (МКТ III, стр. 22):

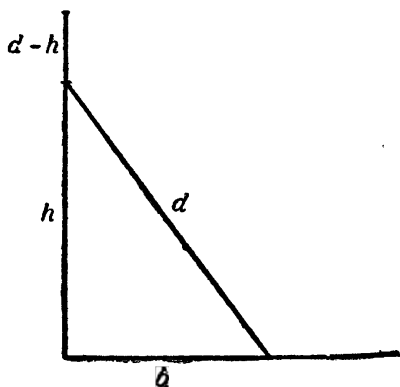


Рис. 35.

«Тростинка стоит у стены. Если я (наверху) опущу ее на 3 вниз, то (внизу) она отодвинется на 9. Каковы длина тростинки и высота стены?»

Чертеж остается в точности тот же самый. В этом случае даны $b = 9$ и $d - h = 3$; требуется найти h и d . Решение гласит:

$$d = \frac{\frac{1}{2}(9^2 + 3^2)}{3} = 15, \quad h = \sqrt{d^2 - b^2} = 12.$$

В других задачах того же текста даются, например, d и h , или $d + h$ и b , или $d + h$ и $d + b$ и т. д. В последней, самой трудной задаче даны $d + h + b$ и dh . Как и всегда, настоящая трудность этих задач имеет алгебраический характер. Единственная геометрическая истина, которая всякий раз идет в дело, есть «теорема Пифагора».

Не следует думать, что в этих задачах длина, ширина и диагональ всегда относятся, как 3 : 4 : 5. Встречаются также и другие соотношения, например:

$$5 : 12 : 13, \quad 8 : 15 : 17, \quad 20 : 21 : 29.$$

За исключением последней пропорции, такие прямоугольные треугольники с рациональными сторонами встречаются и у Герона Александрийского.

Каким образом дошли вавилоняне до таких примеров? Вопрос этот приводит нас в область

*) То есть около 310 до н. э. Селевкиды были преемниками Александра Великого.

БАВИЛОНСКОЙ АРИФМЕТИКИ

Вавилоняне были виртуозами не только в области алгебры, они многого добились и в арифметике. В конце своих «Mathematische Keilschrift-Texte» Нейгебауэр выразил надежду, что со временем мы гораздо больше узнаем об их элементарной теории чисел, а также высказал предположение, что то, что по греческой традиции называлось «пифагорейским», скорее следовало бы назвать «вавилонским».

Надежды эти и это предположение блестяще подтвердились после открытия текста «Plimpton 322». Но сначала мы попробуем резюмировать то, что нам известно относительно вавилонской теории чисел из других текстов.

Ряды (МКТ I, стр. 99)

Суммирование арифметических прогрессий не представляло труда для наших вавилонских вычислителей. Это можно видеть из целого ряда задач, где требуется разделить между несколькими братьями известную сумму денег так, чтобы доли составляли арифметическую прогрессию.

В тексте АО 6484 суммируется еще и геометрическая прогрессия со знаменателем 2:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1).$$

В том же самом тексте суммируются также квадраты чисел от 1 до 10 по формуле

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + n \frac{2}{3} \right) (1 + 2 + \dots + n).$$

Правда, текст этот очень поздний, но он очень похож на древневавилонские тексты. Мы здесь также находим решения конкретных числовых задач, полученные последовательным вычислением. Две задачи касаются теоремы Пифагора, четыре задачи — систем уравнений типа

$$xy = 1,$$

$$x + y = a.$$

Эти и подобные им тексты показывают, что традиции вавилонской алгебры не прерывались от древневавилонской эпохи расцвета вплоть до эллинистического времени.

«Plimpton 322»: Прямоугольные треугольники с рациональными сторонами

Теперь мы переходим к весьма замечательному древневавилонскому тексту «Plimpton 322», открытому и опубликованному Нейгебауэром и Саксом в их «Mathematical Cuneiform Texts» (1945).

На рис. 36 вы можете видеть, что сохранилось от нашего текста: правая часть большой таблицы с несколькими столбцами. Последний столбец содержит только числа 1, 2, ..., 15. Два предыдущих

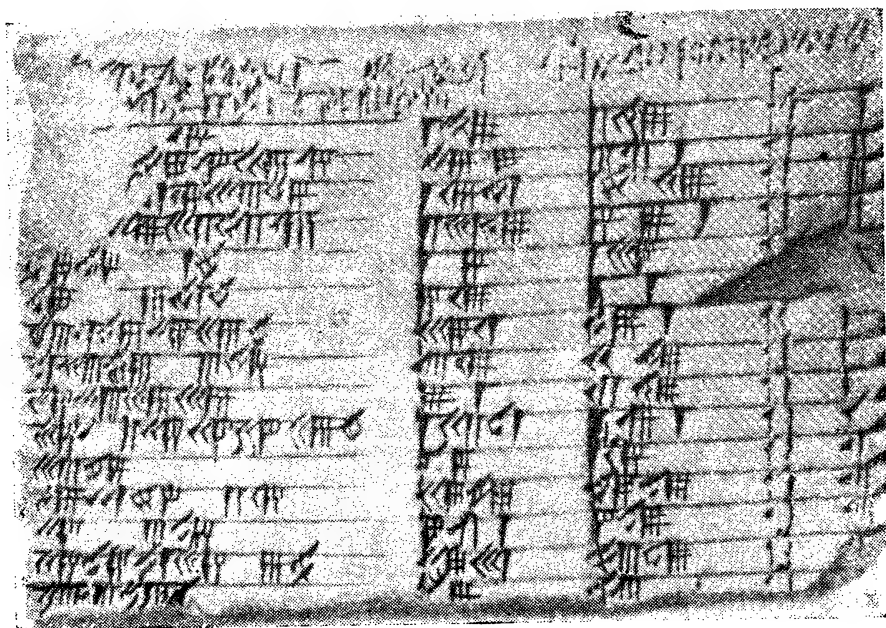


Рис. 36. Математический текст Plimpton 322 из Плимптоновской библиотеки Колумбийского университета в Нью-Йорке. Древневавилонский клинописный текст, содержащий перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами h , b и d . Слева несколько столбцов отломано. Первый сохранившийся столбец дает в убывающем порядке отношения $\frac{d^2}{h^2}$. Заголовок этого столбца непонятен. Два следующих столбца дают «ширину» b и «диагональ» d в целых числах. Последний столбец содержит только ряд следующих друг за другом чисел от 1 до 15. В 11-й строчке числа b и d содержит общий множитель 2; в 15-й строчке имеется общий множитель 2; во всех других случаях числа b и d не имеют общих множителей.

столбца согласно надписи относятся к «ширине» и «диагонали». Действительно, эти числа удовлетворяют формуле

$$d^2 - b^2 = h^2,$$

в которой высота h —всегда целое число, содержащее только множители 2, 3 и 5. Несомненно, что эти высоты и стояли в предыдущем

столбце. Числа таковы:

h	b	d	Номер
2,0	1,59	2,49	1
57,36	56,7	1,20,25	2
1,20,0	1,16,41	1,50,49	3
3,45,0	3,31,49	5,9,1	4
1,12	1,5	1,37	5
6,0	5,19	8,1	6
45,0	38,11	59,1	7
16,0	13,19	20,49	8
10,0	8,1	12,49	9
1,48,0	1,22,41	2,16,1	10
1,0	45	1,15	11
40,0	27,59	48,49	12
4,0	2,41	4,49	13
45,0	29,31	53,49	14
1,30	56	1,46	15

Каким образом были найдены эти числа и по какому правилу они расположены? На это бросает некоторый свет предшествовавший столбец. Он именно содержал квадраты

$$\frac{d^2}{h^2} = \frac{h^2 + b^2}{h^2} = 1 + \frac{b^2}{h^2}.$$

Они довольно правильно убывают примерно от 2 до величины, чуть-чуть большей $\frac{4}{3}$. Если вычесть из них 1, то получится:

$$\frac{d^2}{h^2} - 1 = \frac{d^2 - h^2}{h^2} = \frac{b^2}{h^2} *).$$

Поэтому естественно предположить, что столбцы, предшествовавшие этому, давали отношения

$$\beta = \frac{b}{h} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{d}{h}.$$

Это можно формулировать и так, что первоначально было положено $h=1$. Таким образом, задача заключается в том, чтобы построить прямоугольные треугольники с рациональными сторонами 1, β , δ , причем β и δ должны удовлетворять условию

$$\delta^2 - \beta^2 = 1.$$

Это условие можно переписать и так:

$$(\delta + \beta)(\delta - \beta) = 1.$$

*) В переводе учтены исправления, сделанные в английском и немецком изданиях. (Прим. перев.)

Следовательно, сумма $\delta + \beta$ и разность $\delta - \beta$ суть взаимно обратные числа. Если, например, положить

$$\delta + \beta = \alpha = \frac{p}{q},$$

то получится:

$$\delta - \beta = \alpha^{-1} = \frac{q}{p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}, \\ \beta &= \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.\end{aligned}$$

Если для того, чтобы получить целые числа, мы теперь положим

$$h = 2pq,$$

то получится:

$$b = p^2 - q^2, \quad d = p^2 + q^2.$$

Это — известные современные формулы для прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, которые постоянно применял также Диофант.

Способ, при помощи которого мы здесь нашли числа β и δ , является типично вавилонским. Именно: он сводится к построению прямоугольных треугольников, у которых один катет равен 1, а сумма других сторон $\beta + \delta = \alpha$. Мы уже знаем, что эта задача была поставлена и решена в тексте ВМ 34568 (см. выше, «Теорема Пифагора»).

Наше предположение, что числа h, b, d были получены из 1, β, δ , подтверждается строчкой 11-й, где числа 1, β, δ сохраняют свое первоначальное значение. Если мы умножим их на $2pq=4$, то получится самая простая «пифагоровская» тройка: $h=4, b=3, d=5$.

Нейгебауэр и Сакс указали, что числа α и α^{-1} не только были просто взяты из таблицы обратных величин, но что они действительно были взяты в виде

$$\alpha = pq^{-1}, \quad \alpha^{-1} = qp^{-1},$$

где сами p и q являются простыми числами, которые вместе с их обратными p^{-1} и q^{-1} можно было взять из обычной таблицы обратных величин.

Подобного рода задачи теснейшим образом связаны с греческой арифметикой. Специальный случай $q=1$ вышеупомянутых формул в греческой традиции связывается с именами Пифагора и Платона.

Что касается

ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

вроде вычисления сложных процентов, задач, касающихся земляных и строительных работ, сплавов и т. д., то об этом мы не будем говорить. Встречающиеся в них технические термины иногда трудно понять, а для истории математики все эти вещи не имеют большого значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

I. Алгебра и арифметика

Нормальные формы, которые вавилоняне могли легко решать и к которым они старались сводить все алгебраические уравнения, были таковы:

A. Уравнения с одним неизвестным*)

$$ax = b, \quad (A1)$$

$$x^2 = a, \quad (A2)$$

$$x^2 + ax = b, \quad (A3)$$

$$x^2 - ax = b, \quad (A4)$$

$$x^3 = a, \quad (A5)$$

$$x^2(x + 1) = a. \quad (A6)$$

B. Системы уравнений с двумя неизвестными

$$x + y = a, \quad xy = b, \quad (B1)$$

$$x - y = a, \quad xy = b, \quad (B2)$$

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad (B3)$$

$$x - y = a, \quad x^2 + y^2 = b. \quad (B4)$$

Кроме того, были известны формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (C1)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad (C2)$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1, \quad (R1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)(1 + 2 + 3 + \dots + n) \quad (R2)$$

и суммирование арифметических прогрессий.

Пифагоровы числа $x^2 + y^2 = z^2$ находились при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} x &= p^2 - q^2, \\ y &= 2pq, \\ z &= p^2 + q^2. \end{aligned} \right\} \quad (R3)$$

*) Об отсутствии третьей формы квадратного уравнения $x^2 + b = ax$ см. S. G a n d z, Osiris 3 (1938), стр. 405.

II. Геометрия

Пропорциональность для параллельных линий.

Теорема Пифагора.

Площади треугольника и трапеции.

Площадь круга $3r^2$ (плохое приближение).

Окружность $6r$ (плохое приближение).

Объем призмы и цилиндра.

Объем усеченного конуса $\frac{1}{2}(3R^2 + 3r^2)h$ (неправильно).

Объем усеченной пирамиды с квадратными верхним и нижним основаниями

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2)h \quad (\text{неправильно}). \quad (\text{M1})$$

В одном случае была, возможно, применена верная формула

$$\left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right\} h, \quad (\text{M2})$$

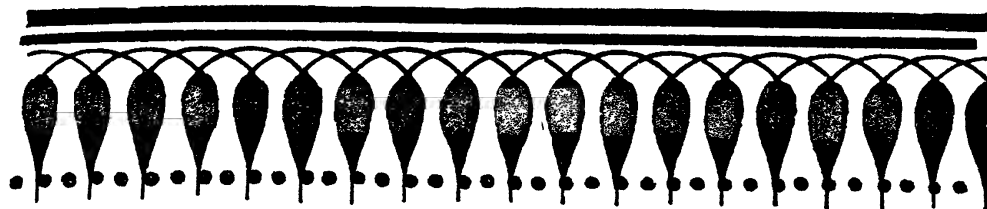
а может быть, также эквивалентная (M1) формула

$$\left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right\} h. \quad (\text{M3})$$



ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА





ГЛАВА IV ВЕК ФАЛЕСА И ПИФАГОРА

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЗОР

<i>Общая история</i>	<i>Философы и историки (1)</i>	<i>Математики и астрономы (2)</i>
610 до н. э. Начало Нововавилонского царства	Милетская школа Фалес	585 до н. э. Фалес 550 до н. э. Пифагор
540 до н. э. Начало Персидского царства	Анаксимандр Анаксимен	Анаксимандр (2)
500 до н. э. Ионий- ское восстание	Гераклит	500 до н. э. Гиппас 500—350 до н. э. Пифагорейцы Анаксагор (2)
480 до н. э. Персид- ские войны	Элеаты 450 до н. э. Анаксагор	Энопид
450 до н. э. Перикл	Геродот (1) Атомисты	430 до н. э. Гиппо- крат Демокрит
420 до н. э. Пелопон- несская война	Фукидид (1) Сократ—399 до н. э. Платон	Феодор 390 до н. э. Архит Теэтет
370 до н. э. Эпами- нонд	Гераклид Понтийский Аристотель Евдем (1)	370 до н. э. Евдокс Каллипп (2) Гикет (2) 350 до н. э. Менеخم Динострат Автолик (2)

333 до н. э. Алек-
сандр Великий
Эллинизм

Стоики

300 до н. э. Евклид
280 до н. э. Арис-
тарх (2)

250 до н. э. Архимед
240 до н. э. Эратосфен
Никомед
210 до н. э. Аполлоний
150 до н. э. Гип-
парх (2)

60 до н. э. Юлий Це-
зарь
1 н. э. Август

Неопифагорейцы

Неоплатоники
Прокл

60 н. э. Герон
100 н. э. Менелай
150 н. э. Птолемей (2)
250 н. э. Диофант
320 н. э. Папп

400 н. э. Переселение
народов

ЭЛЛАДА И ВОСТОК

Платон в посмертном своем диалоге «Эпиномис» очень хорошо определяет отношение греков к древним культурам востока: «Что бы эллины ни перенимали от варваров, они всегда доводили это до более высокого совершенства» (987 E).

Это справедливо и по отношению к точным наукам. Сами греки говорят единогласно, что основания своей геометрии и астрономии они нашли в Египте и Вавилоне. Фалес и Пифагор, Демокрит и Евдокс — все они должны были ездить в Египет и Вавилонию. Даже если не считать эти путешествия историческими фактами, а рассматривать просто как исторические анекдоты, которые нужны для объяснения явных восточных элементов в их учениях, то и это уже вполне доказательно. Только отдельные ученые из современных филологов начисто отказываются признавать, что греки могли заимствовать что-нибудь существенное с Востока. Как будто греки были уж настолько ограничены, что не могли заметить в чужой культуре ничего ценного.

Разумеется, не случайно, что именно ионийцы были зачинателями греческой цивилизации. Они жили как раз на границах великих восточных монархий. Они в течение долгих лет были в подданстве у лидийских и персидских царей. У них были возможности для того, чтобы вполне ознакомиться с восточной культурой.

Для каждого, кто хоть раз перелистал первую книгу «Историй» Геродота, ясно, как тесно были связаны политически и экономически Иония и Малая Азия. Не менее очевидно также наличие отношений между Элладой и Египтом. В дельте Нила жило большое число греков. Греческий город Навкратис, основанный в царствование Псамметиха (663—609 до н. э.), даже получил при Амазисе (569—525 до н. э.) торговую монополию по всему Египту.

Не столь ясны, но все же неоспоримы отношения с ассирийским царством. Саргон II, распространивший границы своих владений на всю Сирию, получил в 709 году подарки от семи царей городов острова Кипра. Его преемник Санхериб разбил ионян в Каликии, где они высадились. Позднее им, однако, удалось прочно устроить там свое торговое поселение.

Для ионийской торговли было серьезным ударом, когда основатель лидийского царства Гигес (680—652 до н. э.) отрезал ионийцев от лежащего за их поселениями материка. Им пришлось искать других путей для торговли с Вавилоном. В середине 7-го века они основали на Черном море торговые города Синоп и Трапезунд, где оканчивались у моря древние торговые пути из Месопотамии. Правда, после того как позднейшие лидийские цари Алиатт и Крез завоевали большую часть ионийских прибрежных городов, для ионийцев снова стала доступной и дорога через Малую Азию.

А за это время произошли большие политические перемены. Разрушилось могущественное военное царство ассирийцев, которое долгие годы угнетало народы Востока (почитайте об этом в Библии!). Царь халдеев Набополассар в союзе с мидянами освободил Вавилон от ассирийского владычества. В 612 году мидяне разрушили Ниневию. Когда же они попытались двинуться вперед на запад, то навстречу им вышел Алиатт Лидийский с ионийским войском. На Галисе в 585 году дано было сражение, которое внезапно оборвалось из-за затмения солнца, предсказанного Фалесом Милетским. «День обратился в ночь»,—пишет Геродот. Воины были так напуганы, что больше уже не хотели сражаться. Обе стороны, а также Киликия и Вавилония заключили мирный договор.

С этого времени три великих царства как бы удерживали друг друга в равновесии: это были Лидия, Мидия и «Нововавилонское царство», основанное халдейскими царями. Снова завязались взаимные культурные и торговые сношения: вся материковая часть была открыта для греков. Могущественный халдей Небукаднецар, царь Вавилонский (604—562 до н. э.) был не только крупным полководцем, но очень много заботился также о культурном развитии. Под его начальством сражались знатные люди из греков, как, например, брат поэта Алкея. В клинописном тексте из Урука, датированном 551 годом, говорится о железе и меди из Ионии*).

Геродот (II, 109) говорит и о культурном обмене с Грецией: «Гномон, полос и деление дня на 12 часов греки заимствовали у вавилонян». Полосом, вероятно, назывались солнечные часы в виде полусария. Гномон — тоже солнечные часы, но в виде вертикального стержня, отбрасывающего тень на горизонтальную

*) H. S c h a a l, *Vom Tauschhandel zum Welthandel* (1931), стр. 56.

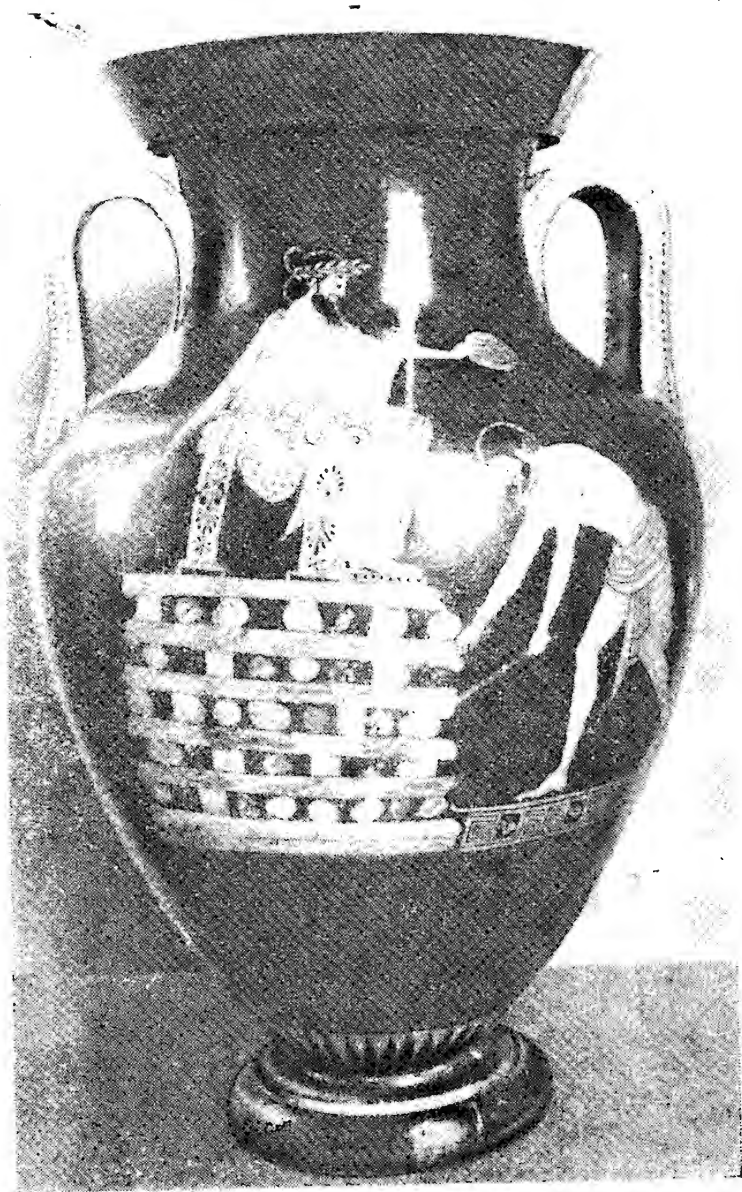


Рис. 37. Крез на костре. Аттическая краснофигурная амфора (500—475 до н. э.) из Вульчи (Италия) в Луврском музее в Париже. Имена цари (Κρέζος, sic!) и его раба (Ευφροΐς — Веселый) написаны на вазе. Раб держит два пылающих факела, которыми он зажигает костер. Светлые красноватые фигуры людей и костер представляют первоначальную поверхность вазы и только окружены блестящим черным фоном: весь внутренний рисунок и контуры намечены черными линиями, но вспыхнувшее пламя костра и пылающие факелы артист нарисовал тонким слоем краски по красному и черному фону. Крез, последний царь Лидии (560—546 до н. э.) был побежден возрастающей мощью персов. По Геродоту, жизнь Креза была сохранена Кипром; одной из своих од поэт Вакхилид сообщает, что Крез кончил жизнь самоубийством. Изображение на вазе следует этой версии предания. Техника рисунка на краснофигурных вазах появилась около 530 до н. э. (см. рис. 20 и 54). Ваза представляет великолепный образец строгого стиля, господствовавшего в греческом искусстве в течение первой половины 5-го века до н. э. Уже были оставлены архаические изгибистость и орнаментация, но очень декоративный эффект орнаментов и плавных волот напоминает архаическое искусство.

плоскость. Сомневаться по поводу гномона нет оснований, так как существует клинописный текст, в котором дана таблица длины тени стержня для разных часов дня*). Сообщение о том, что греки делили день от восхода до захода солнца на 12 часов, тоже справедливо, так как в другом тексте из Ниневии дается таблица продолжительности $\frac{1}{2}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \dots, \frac{12}{12}$ для различных времен года, вычисленной в астрономических единицах времени (*bêru* и *us*)**).

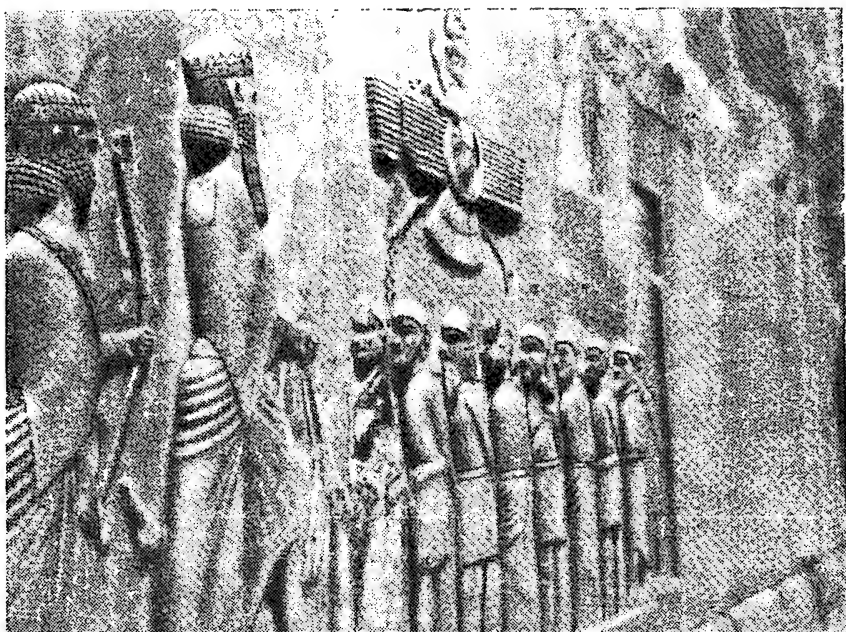


Рис. 38. Персидский царь Дарий как завоеватель. Рельеф на Бегистунской скале (520—519 до н. э.). В центре над девятью побежденными царями-обманщиками (девятью предводителями восстания после смерти Камбиза) парит символ Ахурамазды (Британский музей).

Подобным же образом пришли из Вавилона и имена зодиакальных созвездий, которые стали известны в Греции около 550 года через Клеострата Тенедосского***).

Политическое равновесие было нарушено снова, когда Кир около 540 года подчинил персидскому владычеству весь Восток. Ионийские города, помогавшие его противнику Крезу, были

*) См. E. F. Weidner, *Ein Babylonisches Kompendium der Himmelskunde*, Amer. J. semit. Lang. 40 (1924), стр. 198.

**) Langdon, *Babyl. Menologies and Semitic Calendars*, стр. 55; ср. Fotheringham, *The Observatory*, № 703 (1932), стр. 338 и Thureau-Dangin, *Osiris* 7, стр. 136. См. также Van der Waerden, *Babylonian Astronomy*, III, *Journal of Near Eastern Studies* 10 (1951), стр. 25.

***) См. Weidner, цит. соч., стр. 192, а также мою «*History of the Zodiac*», *Archiv f. Orientforschung* 16 (1953), стр. 216.

обложены тяжелой данью. Многие ионийцы покинули страну; так, например, фокейцы основали в Италии город Элею, которой суждено было сыграть в дальнейшем такую крупную роль в истории философии. В это же самое время и Пифагор переселился из Самоса в Кротон. Центр тяжести математического и философского развития переместился из Ионии в Италию.

Однако и персидское царство вскоре завязало экономические и культурные сношения с греками. Ионийские мастера и художники работали на постройке дворца Дария*). Скульптор Телефан из Фокеи работал для Дария и Ксеркса. При дворе Дария, правда, не совсем по своей воле, жили врач Демокед из Кротона и позднее Гистией, тиран Милетский.

Великие персидские монархи Кир и Дарий были очень терпимыми, они не трогали религии и культуры покоренных народов (об этом тоже есть в Библии). Так, Дарий в указе к Гадату берет под свою защиту культ Аполлона «ради его достоверного оракула». Продолжало существовать и вавилонское звездопоклонство. В персидскую эпоху продолжались систематические наблюдения Луны и планет, производимые вавилонскими жрецами-астрономами. Без этих тщательно датированных наблюдений был бы совершенно немислим позднейший расцвет вавилонской теоретической астрономии при Селевкидах, преемниках Александра Великого**). Греки также очень высоко ценили эти наблюдения; ученик Аристотеля Каллисфен, пришедший в Вавилон вместе с войсками Александра Великого, послал своему дяде Аристотелю по его просьбе вавилонские наблюдения***). Гипсикл, греческий астроном 3-го века, вычисляет по вавилонскому способу времени восхода и захода знаков зодиака; греческая сферическая геометрия еще не была в состоянии решить такую задачу****).

Гемин в своей «Isagoge» также рассматривает халдейский способ вычисления скорости движения Луны. Гиппарх (150 до н. э.) пользуется вавилонскими наблюдениями и лунными периодами, которые через 300 лет Птолемей будет употреблять, в сущности, без всяких поправок.

Из всего этого мы видим, что даже в самый блестящий период расцвета своей собственной астрономии греки охотно учились

*) F. W. König, *Der Burgbau zu Susa*, Mitt. vorderasiat. Gesch. 35 (1930), стр. 1.

**) См. об этом F. X. Kugler, *Babylonische Mondrechnung* (1900) и *Sternkunde und Sterndienst in Babel* 1; O. Neugebauer, *Quellen u. Studien* B. 4 (1938), стр. 193 и 407; далее: A. Паннекоек и B. L. v. d. Waerden в *Eudemus* 1 (1940), O. Neugebauer, *Babylonische Planetary Theorie*, Proc. Amer. Philos. Soc. 98 (1954), стр. 60.

***) *Simplicii in Aristotelis. De Caelo Commentarii*, II, 12, стр. 506 (Heiberg).

****) H y p s i c l e s, *Anaphorikos*, ed. Manitius, Programm Gymnasium Heil. Kreuz, Dresden, 1888. Cp. O. Neugebauer, *Trans. Amer. Philos. Soc.* 32 (1942), стр. 251.

у вавилонян всему тому, в чем те ушли дальше их самих. Но ведь то же самое должно было происходить и в первые времена греческой математики, когда вавилоняне уже владели высокоразвитой алгеброй и геометрией, чего у греков еще не было!

Естественным местом плодотворного соприкосновения Запада с Востоком в начале 6-го века был богатый торговый город Милет на Малоазиатском берегу, важнейший культурный центр Ионии. Там и жил первый ионийский натурфилософ и в то же время первый математик и астроном

ФАЛЕС МИЛЕТСКИЙ

Фалес был первым из «семи мудрецов», которые, в сущности, были не учеными, а государственными деятелями, законодателями и моралистами. Им приписывались различные изречения вроде знаменитого дельфийского «Познай самого себя». После ликвидации старой феодальной системы они заложили фундамент для новой политической организации греческих городов, которая была хотя и аристократической, но уже другого порядка.

Однако мудрость Фалеса имеет более общий, более философский характер. Он поставил вопрос о происхождении вещей. Насколько мы знаем, он учил, что все произошло из воды.

Платон рассказывает, что Фалес, наблюдая звезды, упал в колодец и красивая фракийская рабыня посмеялась над ним: «Хочет знать, что делается на небе, а что у него под ногами, не видит».

Было бы неправильно заключать из этого анекдота, что Фалес был ученым «не от мира сего», чем-то вроде «расеянного профессора». Нет, он стоял в самой гуще кипучей ионийской жизни его эпохи. Говорят, что он заработал много денег, ловко торгуя оливковым маслом, что он заставил выкопать новое ложе реки



Рис. 39. Изображение философа, вероятно, Фалеса Милетского (632—546 до н. э.). Мраморная герма (Новая Карлсбергская глиптотека в Копенгагене). Римская копия 2-го века н. э. со знаменитого оригинала, который трудно датировать. Отнести изображение к Фалесу можно лишь гипотетически. По К. Шефольду, пальмовая ветвь на герме указывает на Фалеса, потому что о нем поэт Каллимах сказал: «Победа осталась за Фалесом». Конечно, никоим образом нельзя сказать, что мы имеем подлинное изображение философа. Это «образ» мудреца; стиль изображения показывает, что оно не может быть ранее 4-го века до н. э.

для более удобной переправы войска Креза. Во всяком случае он мудро советовал своим согражданам не заключать с Крезом союза против Кипра, а позднее думал осуществить объединение ионийских городов с Теосом в качестве главного города.



Рис. 40. «Семь мудрецов» (но не Платон, преподающий геометрию, как думали раньше). Мозаика из Торре Аннуциата вблизи Помпей (в Неаполитанском национальном музее) 1-го века до н. э. Эта мозаика показывает, каким почетом в римское время пользовались «семь мудрецов» — представители науки и мудрости. Распределение имен между семью фигурами не вполне ясно. Третьего слева, указывающего на небесную сферу, некоторые отождествляют с Фалесом. Фигура, стоящая слева от солнечных часов возможно, изображает их изобретателя Анаксимандра (или Содона).

Другой пример его практической мудрости: он советовал морякам ориентироваться, как финикийцы, по Малой Медведице *), а не по Большой, как делали обычно. Таким образом, он был не только теоретиком и философом, но также государственным и практически мыслящим человеком, «мудрецом» в полном смысле этого слова у древних.

*) Способ ориентировки по Малой Медведице, вероятно, заимствован из «Мореходной астрономии» Фока Самосского и вряд ли принадлежит Фалесу. (Прим. перев.)

Предсказание солнечного затмения

Геродот рассказывает, что во время битвы на Галисе день превратился в ночь и что Фалес предсказал лидийцам это событие именно в этом году. По свидетельству Диогена Лаэртца, Ксенофан высоко ставил Фалеса за это предсказание; итак, кроме Геродота, имеется еще один, и более близкий свидетель этого достижения — Ксенофан. В настоящее время полагают, что речь идет о солнечном затмении 585 до н. э.

Каким образом Фалес, сколько мы знаем, первый греческий астроном, мог предсказать солнечное затмение? Для этого как-никак необходим опыт многих десятков лет. Один человек такого опыта иметь не может, а греческих предшественников у Фалеса не было. Ясно, что он должен был воспользоваться опытом астрономов Востока.

Мы должны прежде всего подумать о месопотамских астрономах. Действительно, из донесений ассирийских придворных астрологов мы знаем, что они приблизительно около 700 до н. э. (с большим или меньшим успехом) предсказывали солнечные и лунные затмения *).

К стилю таких предсказаний очень хорошо подходит и предсказание Фалеса. Басенка нового времени уверяет, что Фалес воспользовался при этом «Саросом» — 18-летним периодом, который был известен в Вавилонии около 400 до н. э. А я предпочитаю думать, что Фалес, как и древние вавилоняне, исходил из приближенного соотношения:

51 драконический лунный период = 47 синодическим месяцам.

Из этого соотношения получается, что через 47 месяцев после полного лунного затмения возможно его повторение, а через $23\frac{1}{2}$ месяца возможно солнечное затмение. Действительно, за $23\frac{1}{2}$ месяца до затмения Фалеса можно было наблюдать довольно значительное затмение Луны **). Но так или иначе, предсказание Фалеса указывает на то, что с вавилонской астрономией он был знаком.

Фалес как геометр

Был ли Фалес знаком также и с вавилонской математикой?

Комментатор первой книги «Начал» Евклида, Прокл, заимствует из «Истории математики» Евдема, к сожалению, не дошедшей до нас, следующие данные о Фалесе.

*) R. C. Thomson, *The reports of the magicians and astrologers of Nineveh and Babylon* (London, 1900).

**) См. мою статью: *Voraussage von Finsternissen*, Ber. Sächs. Akad. Wiss. 92, Leipzig (1940).

1°. Он первый доказал, что диаметр делит круг пополам (Прокл, стр. 157*).

2°. Кроме многих других предложений, он нашел также предложение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; по древнему обычаю он называл эти углы не равными, но «подобными» (Прокл, стр. 250).

3°. Согласно Евдему, он открыл, что при пересечении двух прямых получаются равные углы, но не дал для этого никакого научного доказательства (Прокл, стр. 299).

4°. Теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла, Евдем в своей «Истории Геометрии» приписывает Фалесу, замечая, что для доказательства его способа определения расстояния кораблей на море необходимо использовать эту теорему о равенстве (Прокл, стр. 352).

Каким образом Фалес определял расстояние кораблей на море? Об этом мы можем только строить догадки. Таннери говорит, что древнейший из дошедших до нас способов этого определения принадлежит римскому землемеру Марко Юнию Нипсу. Он дает следующее, правда очень нехитрое, правило (рис. 41).

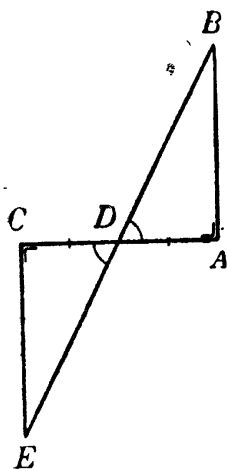


Рис. 41.

Для определения расстояния от A до недоступной точки B восстанавливают к AB на плоскости перпендикуляр AC произвольной длины и делят его пополам в D . В C восстанавливают к CA в противоположном AB направлении перпендикуляр CE и продолжают его до точки E , которая лежит на одной прямой с D и B . Тогда CE будет равна искомой длине AB .

При доказательстве действительно применяется упоминаемое Евдемом предложение 4° о равенстве треугольников и, кроме того, предложение 3° о равенстве вертикальных углов, которое тоже было известно Фалесу. Таким образом, возможно, что именно это и был метод Фалеса.

Памфила**), по словам Диогена Лаэртция, говорит, что Фалесу первый описал круг около прямоугольного треугольника и что в честь этого открытия он принес в жертву быка. Потому Фалесу также приписывается предложение о том, что вписанный в полукруг угол, построенный на диаметре, будет прямым. Это предложение стоит в связи с хорошо известными вычислениями хорд и стрелок в вавилонской математике, но этого, конечно, еще недостаточно,

*) Proclus Diadochus Euklidkommentar (греч. изд. Friedlein), переведенный Р. L. Schonberger, M. Steck, Halle, 1945 (страницы указаны по Фридлейну).

**) Писательница эпохи Нерона. В голландском подлиннике ошибочно Pamphilus. (Прим. перев.)

чтобы доказать, что Фалес знал вавилонскую математику *). Нужно изучить шире этот вопрос и подробнее рассмотреть совокупность сообщений Прокла и Памфила.

Некоторые оспаривают правильность сообщений 1° и 4° Прокла, хотя они заимствованы из лучшего источника. Полагают, что структура математики древнего Фалеса еще не требовала такой строгой логики, чтобы нужно было доказывать столь очевидные вещи, как равенство частей, на которые диаметр делит круг. Замечательный английский историк греческой математики Хизс (Heath) в этой связи замечает**), что это предложение не доказывается даже у самого Евклида. Полагают, что Евдем неосновательно приписал математике Фалеса такое же оформление, которое имела математика в его собственное время (около 330—300 до н. э.), когда каждое положение выводилось строго логически из предыдущих предложений, определений и аксиом. Евдем мог рассуждать, скажем, так: в основе способа определения расстояния кораблей на море лежит чисто логически именно это предложение о равенстве 4°; следовательно, Фалес должен был знать и сформулировать это предложение. В действительности, как полагают ныне, Фалес применил указанное предложение о равенстве, вероятно, и не сознавая этого. Некоторые даже думают, что Фалес никак не доказывал свои открытия, но находил эмпирическим путем — в противоположность тому, что говорит Евдем в 1°.

В качестве первого возражения на это надо сказать следующее. Евдем знает не только результаты, но до некоторой степени и внешнюю форму математики Фалеса: ему даже известно, какими именно выражениями пользовался Фалес для обозначений равенства углов. Он кое-что знает также и относительно доказательств, которые давал или не давал Фалес: в 3° он подчеркнуто говорит нам, что соответствующее предложение совсем или почти совсем не было точно доказано. В сущности, нам очень трудно было бы пренебречь указанием Евдема, что геометрия Фалеса была построена так же логически, как и у позднейших математиков — а Евдем, очевидно, так думает, ибо иначе он не высказал бы утверждения 4° — и сам он выразительно утверждает, что Фалес доказал предложение 1°. Античного историка можно поправлять только тогда, когда действительно знаешь предмет лучше его.

Далее, вся критика сообщений Евдема — Прокла, которую мы только что привели, может быть допущена, если только одновременно предположить, что Фалес стоит у самого начала античной математики. Рассуждают так: поскольку он был первым, то он должен был свои предложения сначала найти эмпирически. Но нам теперь известно, что математика начинается не с Фалеса,

*) O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, стр. 168.

**) T. Heath, *History of Greek Mathematics*, 1 (Oxford, 1921), стр. 131.

а по меньшей мере за 1200 лет до него, в Вавилоне. А если так, то исчезают все основания не доверять тому, что Фалес доказывал свои предложения, что его математика обладала той строго логической структурой, которую несомненно приписывает ему Евдем.

Тщательно рассматривая предложения, приписываемые Фалесу, замечаешь, что эти предложения характерны отнюдь не для первых математических открытий, а скорее для начала систематического логического изложения математики. В самом начале, когда люди переживают первые радости открытий, они занимаются задачами вроде следующих: как мне вычислить площадь четырехугольника или круга, объем пирамиды, или длину хорды, или: как мне параллельно основанию разделить трапецию на две равные части. Но это и будут как раз те задачи, которые решались в египетских и вавилонских текстах. И только позже возникает вопрос: как мне все это доказать?

Этот вопрос становится основным именно в то время, когда о достигнутых древней математикой результатах, частью логически не увязанных, частью справедливых и частью ошибочных, узнает младшее поколение страстно любознательных чужеземцев. Во время Фалеса египетская и вавилонская математика давно уже были мертвыми знаниями. Можно было разобрать и показать Фалесу, как надо вычислять, но уже неизвестен был ход рассуждений, лежащий в основе этих правил. От вавилонян можно было узнать, что площадь круга равна $3r^2$, а египтяне уверяли, что она равна $\left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2$. Каким же образом мог Фалес отличить точные

и правильные вычислительные формулы от приближенных и ошибочных? Разумеется, при помощи создания логически связанной системы! Согласно Евдему, он действительно так и сделал, и как раз к самому началу этой логической системы и относятся разные «азбучные истины», вроде того, что вертикальные углы, или углы при основании равнобедренного треугольника, равны, что диаметр делит круг пополам и т. д.

Традиционные представления о том, что древнейшие греческие математики открыли геометрию самостоятельно и что они ничего не получили в наследство от более древних культур, мы должны, очевидно, оставить: это представление было допустимо только в те времена, когда о вавилонской математике ничего не знали. Но этим гениальность Фалеса ничуть не умаляется: наоборот, только ~~ныне~~ он получает заслуженную славу того, кто дал логическое построение геометрии и ввел доказательство в геометрию.

Характерная и совершенно новая черта греческой математики заключается именно в постепенном переходе при помощи доказательств от одного предложения к другому. Очевидно, греческая математика имела с самого начала такой характер и этот характер был придан ей Фалесом.

Материал, из которого была построена греческая геометрия, был не нов: разъятые обломки можно было заимствовать из развалин древних культур; но стиль, в котором воздвигнуто это здание, был новым, а это свидетельствует о ясной греческой мысли, которая не могла допускать ни темных пятен, ни даже тени сомнения в правильности своих заключений.

ОТ ФАЛЕСА ДО ЕВКЛИДА

Неоплатоник Прокл, руководивший около 450 н. э. платоновской Академией во время ее позднего расцвета, в своем комментарии к первой книге «Начал» Евклида (стр. 65—68 Friedlein), дает беглый обзор истории геометрии от Фалеса (600 до н. э.) до Евклида (300 до н. э.).

«Фалес путешествовал в Египет и привез геометрию в Элладу; многое он открыл сам и для многого другого он дал основу жившим после него. Иногда он рассматривал вопрос несколько общее, иногда более опираясь на наглядность. Идя по его стопам, Мамерк, брат поэта Стесихора, занялся геометрией; Гипсий Элидский говорит о нем, что он был известен как геометр.

Следовавший за ними Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя от первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений. Он открыл теорию иррациональных (или пропорций) и построение пяти космических тел (т. е. правильных многогранников). После него развитию геометрии способствовал Анаксагор из Клазомен и младший его соратник Энопид Хиосский; они также упоминаются как славные математики Платоном в его „Соперниках“. Затем были Гиппократ Хиосский, открывший квадратуру луночек, и знаменитый геометр Феодор Киренский. Этот Гиппократ был первым, кто составил „Начала“.

Следовавший за ними Платон своей гениальной любознательностью во многом способствовал развитию геометрии и других математических наук; известно, как часто в его произведениях встречаются математические доводы и как он пользовался всяким удобным случаем, дабы возбудить интерес к математике среди тех, кто посвящал себя философии. Его современники Леодамант Тазосский, Архит Тарентский и Теэтет Афинский создали большое число новых теорем, из которых и составили научно организованную систему.

Неоклид и его ученик Леонт, которые были моложе Леодаманта, прибавили немало к тому, что было известно до них, так что Леонт мог составить „Начала“, которые были лучше прежних руководств по числу и приложениям доказанных теорем; и, кроме того, им были даны ограничительные условия, является ли известная задача возможной или невозможной.

Евдокс Книдский, который был моложе Леонта и находился в дружеских отношениях с кружком Платона, впервые увеличил число так называемых общих теорем, к трем уже известным средним добавил еще три и продолжил начатые Платоном исследования о сечениях, пользуясь приемами анализа. Один из друзей Платона Амикл Гераклеяский, ученик Евдокса Менехм, тоже принадлежавший к друзьям Платона, и его брат Динострат сделали геометрию еще более совершенной. А Февдий из Магнезии считался выдающимся ученым как в математике, так и других науках, ибо он превосходно систематизировал „Начала“ и обобщил целый ряд частных предложений. Атений из Кизика, его современник, был известен в различных областях математики,

особенно в геометрии. Всех этих людей объединяла Академия, и свои исследования они производили совместно.

Гермотим из Колофона продолжал исследования, начатые Евдоксом и Теэтетом: он нашел ряд теорем для „Начал” и разработал в некоторые части учения о геометрических местах. Филипп Мендский, один из учеников Платона, которому учитель внушил любовь к математике, не только проводил исследования по указаниям Платона, но и делал все, что, по его мнению, могло способствовать философии Платона. Занимавшиеся историческими исследованиями на этом заканчивают изложение истории этой науки. Немного моложе их был Евклид, составивший „Начала”, в которых он изложил многое из открытий Евдокса, добавил немало из работ Теэтета, и, кроме того, дал полные доказательства тому, что не было окончательно доказано его предшественниками. Этот муж жил в эпоху Птолемея I, ибо Архимед, который жил тотчас же вслед за царствованием Птолемея I, упоминает о нем; кроме того, рассказывают, что Птолемей однажды спросил Евклида, нет ли в геометрии более краткого пути, чем его „Начала”, на что тот отвечал, что в геометрии нет царских дорог. Таким образом, Евклид был моложе учеников Платона, но старше Эратосфена и Архимеда, ибо эти двое, как где-то говорит Эратосфен, были современниками».

Этот «Каталог геометров», очевидно, представляет большей частью извлечение из «Истории математики» Евдема. Действительно, кого другого, кроме Евдема, можно было подразумевать под «занимавшимися историческими исследованиями» в эпоху непосредственно после Филиппа из Менды и перед Евклидом?

Евдем, разумеется, превосходный источник. Но, к сожалению, этот отрывок содержит существенные добавления, которые не могут принадлежать Евдему. Таковы, например, помещенные в конце замечания о Евклиде, наверняка не имеющие отношения к Евдему. Далее, ясно, что весь «Каталог» носит на себе отпечаток руки какого-то платоника, который хотел как можно более возвеличить Платона и его школу. Все, что сказано о Платоне и его ученике Филиппе Мендском, никак не могло выйти из-под пера Евдема, который был учеником Аристотеля и совсем не таким ревностным почитателем Платона, как неоплатоник Прокл. С другой стороны, совершенно не упоминается Демокрит, а ведь он играл значительную роль в истории геометрии; по сообщению Архимеда, он нашел объем пирамиды и был автором ряда математических трудов; вероятно, это произошло потому, что Платон считал влияние Демокрита губительным и с большой охотой сжег бы его произведения. Таким образом, «Каталог» в целом имеет тенденциозный характер.

С этой точки зрения следует рассматривать и сообщения, касающиеся Пифагора. Возможно, что Прокл (или его предшественник, автор этого «Каталога») не нашел у Евдема материала, который на его взгляд достойно описывал бы Пифагора, и вот, чтобы не ограничиться мелочами насчет знаменитого и всеми чтимого Пифагора, он и заимствовал еще кое-что из других менее чистых источников вроде, скажем, неопифагорейца Ямвлиха, который был фантастом и бестолковым человеком. Поскольку этот

источник нам неизвестен, то ценность сообщаемых сведений весьма сомнительна.

Резюмируя, мы можем сказать: то, что говорится в «Каталоге» о Пифагоре, является ненадежным, а относительно Платона нет ничего нового; однако все то, что касается настоящих математиков до Евклида, которые не являются одновременно философами или легендарными фигурами, вероятно, восходит к Евдему и в силу этого заслуживает доверия.

К сожалению, об этих математиках говорится не очень много. Таким образом, нам придется поискать, нет ли более лучших источников, откуда можно было бы почерпнуть сведения относительно развития геометрии со времен Фалеса.

Относительно 6-го века нам приходится обращаться к тем отрывочным сведениям, которые сохранились у различных авторов. Для 5-го века мы располагаем важным фрагментом Евдема, касающимся гиппократовых луночек, который мы рассмотрим, когда дойдем до Гиппократы Хиосского. Что касается 4-го века, то в нашем распоряжении имеется другой фрагмент Евдема, где говорится об удвоении куба у Архита, а кроме того, отдельные математические замечания в творениях Платона и Аристотеля.

Исключительно ценным источником, в особенности для математики пифагорейцев и современников Платона, являются «Начала» Евклида. Мы увидим, что, изучая, как составлялись эти «Начала» из отдельных своих частей, можно прийти к важным заключениям относительно происхождения этих частей. И мы настоятельно советуем читателю, если он хочет всерьез познакомиться с особым характером греческой математики, самому взять в руки «Начала» либо в греческом тексте, либо в одном из отличных современных переводов *).

О других источниках мы будем говорить в хронологической последовательности.

ПИФАГОР САМОССКИЙ

В настоящее время Пифагора рассматривают прежде всего как математика. Его именем названа улица в восточной части Амстердама по соседству с улицами Архимеда, Ньютона и Коперника;

*) По-английски с подробным комментарием: T. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge, 2 изд., 1908. Немецкий перевод C. Thaer'a в Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, стр. 235, 236, 240, 241 и 243 (1933—1937). Голландская обработка E. Y. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides* (Hist. Bibl. ex. wet. I и III, 1929—1930) дает краткое изложение текста с ценным комментарием [По-русски — см. издание «Начал» Евклида в трех томах (М., 1948, 1949, 1950) в переводе Д. Д. Мордухай-Болтовского].

его имя сразу заставляет вспомнить знаменитую «теорему Пифагора».

В древности было иначе. Геродот называет его «выдающимся софистом», т. е. учителем мудрости, и рассказывает, что Залмокс, которого геты чтили как святого и который согласно легенде воскрес из мертвых, был учеником Пифагора. Он рассказывает еще, что пифагорейцы не погребали своих мертвецов в шерстяных одеждах*). Это скорее похоже на религию, чем на математику. Пифагорейцы, осмеиваемые комедией, изображались суеверными, весьма разборчивыми вегетарианцами, но совсем не математиками**).

И сам Пифагор был для своих современников, прежде всего, религиозным пророком. Много путешествовавший поэт-писатель Ксенофан осмеивает пифагорово учение о переселении душ. Пифагор, рассказывает он, увидел однажды, как били собаку, и сказал: «Перестань ее бить, в этой собаке живет душа моего друга: я узнал его по голосу»***).

Пифагор считался также и чудотворцем. О нем ходило много сказок: что у него было золотое бедро; что люди видели его в один и тот же час в двух разных местах; когда он переходил через речку, она вышла из своего ложа и приветствовала его, восклицая: «Да здравствует Пифагор»****).

Итак, кем же был Пифагор на самом деле: математиком, философом, пророком, святым или шарлатаном? От каждого из них он имел что-то в себе. Его последователи видели в нем воплощение высшей божественной мудрости, однако Гераклит в нем не усмотрел ничего, кроме «многознания без разума»*****). Он проповедовал бессмертие души, ввел для своих последователей строгие правила жизни и основал братство верующих, пифагорейский орден, который позднее из Кротона распространился на другие греческие города Италии и, должно быть, играл важную роль в политической жизни этих городов*****). Посвященные в этот орден после испытательного периода и строгого отбора могли слушать из-за занавеса голос Учителя, но видеть его самого они могли только через несколько лет, когда их души были очищены музыкой и строгой жизнью согласно обетам. Полагали, что эти очищения, а также посвящение в тайны гармонии и чисел, приближают

*) См.; например, H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker, Pythagoras*, A. 1—2.

**) См. H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker, Pythagoräische Schule*, E.

***) H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker, Xenophanes*, B. 7.

****) Об этих легендах см. прежде всего: Is L é v y, *Les sources de la légende de Pythagore*, Paris, 1926.

*****) H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker, Herakleitos*, B. 40.

*****) A. Delatte, *Essai sur la politique Pythagoricienne* (Liège, 1922); K. von Fritz, *Pythagorean Politics in Southern Italy* (New York, 1940).

душу к божеству и таким образом она сможет освободиться из круга повторных воплощений *).

В эту эпоху существовало немало мистических религий, которые обещали своим последователям вечную жизнь. Орфические пророки странствовали по Греции и Италии. Религия Диониса увлекала в диком экстазе мужчин и женщин. Более спокойным способом приобрести бессмертие можно было посвятившись в Элевзинские мистерии Деметры и Персефоны.

Все эти посвящения начинались с ритуальных очищений. После того как душа освобождалась от земных пятен, она обретала возможность соединиться с божеством. Она возрождалась в боге и таким образом становилась причастной к вечной жизни.

Таким образом, очищение и посвящение были для пифагорейцев общими с разными другими мистическими религиями **). Стремление уйти от мира, замкнутая монашеская жизнь, вегетарианство и общность имущества встречались у многих сект. Но что отличало пифагорейцев от всех других, — это способ, при помощи которого они считали возможным достигнуть очищения души и соединения с божеством; это делалось именно при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии. Бог, учили они, положил числа в основу мирового порядка. Бог — это единство, а мир — множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству и соединяет все в космос, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях. Кто до конца изучит эту божественную числовую гармонию, сам станет божественным и бессмертным.

Музыка, гармония и числа — эти три понятия были неразрывно связаны друг с другом в учении пифагорейцев. Все три были существенными составными элементами пифагорейской системы воспитания и очищения души. «Блаженство есть знание совершенства чисел души», — говорит Пифагор у Гераклида Понтийского. Математика и числовая мистика были фантастически перемешаны в его учении. Однако из этого мистического учения в дальнейшем выросла точная наука поздних пифагорейцев.

Путешествия Пифагора ***)

Мистическая религия и числовая мистика пришли с Востока. Но раз так, то понятно, почему еще в древности уверяли, что

*) Относительно религиозной философии Пифагора и его последователей см. A. R o s t a g n i, *Il Verbo di Pithagora* (Torino, 1924); P. B o u a n s é, *Le culte des muses chez les philosophes Grecs* (Paris, 1936).

**) W. K. C. G u t h r i e, *Orpheus and Greek Religion* (London, 1935).

***) Хороший обзор рассказов о путешествиях с указанием источников можно найти у Th. H ö p f n e r, *Orient und griechische Philosophie*, Beihefte zum Alten Orient 4 (1925). См. также мою статью *Das Grosse Jahr und die ewige Wiedergeburt*, *Hermes* 80 (1952).

Пифагор много путешествовал почти по всем странам Востока. Согласно оратору Исократу, за которым повторяли это последующие авторы, Пифагор ездил в Египет. В Египте, как рассказывалось далее, он попал в плен к Камбизу, персидскому завоевателю, и его увели в Вавилон. Здесь жрецы посвятили его в мистерии. Ямвлих уверял, что он целых семь лет изучал у магов теорию чисел, музыку и другие науки. Тот же Ямвлих во «Введении в никомахову арифметику» говорит, что Пифагор нашел «золотую пропорцию»

$$A : H = R : B,$$

где H и R суть гармоническая и арифметическая средние между величинами A и B , и что этому он научился у вавилонян*).

Более древние писатели говорят только, что он вступил в сношения с «халдеем Заратой» (Заратустрой) или что он учился у халдеев.

Чего стоят все эти указания? Было время, когда люди всему верили без проверки. Затем пришло время критического направления, когда все такие поздние сведения устранялись из рассмотрения, как совершенно недостоверные фантазии.

Но ныне, после работ Делатта и Ростаньи, позднеантичной традиции придают больше ценности. Оказалось, что большая часть этих сообщений основывается на древней традиции, записанной Аристотелем и его учеником Аристоксеном, а также историками вроде Дикеарха и Тимея из Тавромения, жившими в конце 4-го века. Во всяком случае сообщения о путешествиях показывают, что уже в древности устанавливалась взаимная связь между пифагорейской и восточной мудростью**).

В дальнейшем мы найдем еще некоторое число точек соприкосновения между вавилонской математикой и наукой пифагорейцев. Я убежден даже, что именно Пифагор был в Греции передатчиком вавилонской учености, ибо он, как иониец, во всяком случае гораздо ближе стоял к источнику этой древней мудрости, чем итальянские пифагорейцы.

*) Эта пропорциональность играет большую роль в пифагорейской теории музыки (см. мою статью *Harmonielehre der Pythagoreer* в журнале *Hermes* 78 (1943)). Обе средние в современном обозначении могут быть представлены в виде

$$R = \frac{A+B}{2}, \quad H = \frac{2AB}{A+B}$$

или (в обозначениях классической древности)

$$R - A = B - R, \quad (H - A) : A = (B - H) : B.$$

Примем ли мы то или другое определение, мы легко докажем справедливость «золотой пропорции».

**) Пифагор нередко изображался в восточном тюрбане. Возможно, что изображенный на рис. 42 человек в тюрбане — именно Пифагор.



Рис. 42. Бронзовая голова Пифагора (?). Копия с греческого оригинала, вероятно, конца 4-го века до н. э. из Виллы деи Панири в Геркулануме (Неаполитанский национальный музей). Элиан рассказывает, что Пифагор носил восточную одежду; таким образом, можно было бы объяснить тюрбан. Как указывает Шефольд, возможно, что эта голова представляет Архита Тарентского, наиболее значительного пифагорейского математика и теоретика музыки (см. стр. 208). Если это верно, то возможно, что мы имеем подлинный, хотя немного идеализированный портрет.

Но Пифагор заимствовал у вавилонян не только в чисто математической области, но также в области теории музыки и в астрономии. Ведь говорил же Гераклито его «многознании без разума». Этот уничижительный отзыв не может касаться логически построенной теории чисел или геометрии в том виде, в каком мы их находим у поздних пифагорейцев. Но если Пифагор смешал вместе разные еле-еле понятные учения о богах и звездах, музыкальной гамме, священных числах и геометрических вычислениях и возвестил своим последователям всю эту мешанину на манер пророка как божественную мудрость, то тогда нетрудно понять и насмешку Гераклита и восхищение мистиков вроде Эмпедокла.

Пифагор и учение о гармонии *)

Если уменьшить длину струны или флейты вдвое, тон повысится на одну октаву. Совершенно так же, если уменьшать в отношении $3:2$ и $4:3$, то этому будут соответствовать интервалы квинта и кварта. Для пифагорейцев получило перво-степенное значение то, что важнейшие гармонические интервалы могут быть получены при помощи отношений чисел 1, 2, 3 и 4. Это было как бы подтверждением их основного принципа «Все есть число» или «Все упорядочивается в соответствии с числами». Сами эти числа 1, 2, 3, 4, составляли знаменитую «тетраду». Очень древнее изречение гласит: «Что есть оракул дельфийский? Тетрада! Ибо она есть музыкальная гамма сирен».

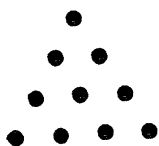


Рис. 43.

Геометрически тетрада изображалась «совершенным треугольником», арифметически — «треугольным числом» $1+2+3+4=10$ (рис. 43). Лукиан рассказывает, что однажды Пифагор попросил кого-то считать, и как только человек этот произнес: «1, 2, 3, 4», Пифагор прервал его: «Видишь, — сказал он, — то, что ты называешь четырьмя, есть не что иное, как 10, совершенный треугольник и клятва наша». Пифагорейцы, действительно, клялись «тем, кто вложил в нашу душу тетраду, — источник и корень вечной природы» **). Эти изречения и эта форма клятвы, действительно, являются древними; и поэтому тетраду, треугольные числа и численные отношения в гармонических интервалах мы, пожалуй, должны приписать самому Пифагору.

Умирая, Пифагор настоятельно советовал своим последователям «изучать монохорды». Согласно Гауденцию, история этого

*) См. B. L. van der Waerden, *Die Harmonielehre der Pythagoreer*, Hermes 78 (1943).

**) См. A. Delatte, *Etudes sur la litterature pythagoricienne* (Paris, 1915), стр. 253.

музыкального инструмента такова. Пифагор разделил линейку на 12 частей и натянул на нее струну. Укорачивая струну длиной в 12 делений до 6, 8 и 9, т. е. в отношениях 2 : 1, 3 : 2 и 4 : 3, он получал тоны, которые были выше на одну октаву, квинту или кварту.

Эти самые числа 6, 8, 9, 12 встречаются почти у всех пифагорейских и неопифагорейских писателей по теории музыки. Все эти авторы определяют средние члены 9 и 8 как арифметическую и гармоническую среднюю между крайними членами 12 и 6. Большой частью числом 12 обозначали высший тон, а числом 6—низший, т. е. не прямо, а обратно пропорционально длинам струн. Что эти числа обозначали эмпирически? По-видимому, для пифагорейцев было не так существенно, обозначают ли они длины струн, или их натяжения, или скорости. Самое важное было в том, что появлялись правильные отношения для гармонических интервалов, например, $12 : 9 = 8 : 6$ для кварты и $12 : 8 = 9 : 6$ для квинты, как преподавал Учитель.

Традиция, приписывающая Пифагору вычисление интервалов диатонической гаммы, также заслуживает доверия; это были целый тон (9 : 8) и большой полутон или «леймма» (256 : 243); действительно, эти соотношения могут быть получены из октавы (2 : 1), квинты (3 : 2) и кварты (4 : 3) при помощи последовательных делений:

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}, \quad \frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{32}{27}, \quad \frac{32}{27} : \frac{9}{8} = \frac{256}{243}.$$

Пифагор и учение о числах

Магия чисел относится к области магии, а мистика чисел — к мистике. Каждый чародей пользуется магической силой слов и чисел, каждый суеверный человек знает свои святые числа, счастливые числа и прочее. У вавилонян и магов все издревле считалось необыкновенно важным, и точно так же было у пифагорейцев. Они, например, называли 10 «превосходным числом», четное и нечетное с их точки зрения были началом всех вещей, абстрактные понятия вроде «справедливости» отождествлялись с определенными числами, как сообщает Аристотель*). Четные числа они называли женскими, нечетные — мужскими**), число 5 — сумма первого женского и первого мужского числа — было символом брака, и так далее.

*) Аристотель, *Метафизика*, кн. 1, гл. 5 [русский перевод А. В. Кубицкого, М., 1934, стр. 27. (Прим. перев.)] или D i e l s, *Fragmente, Pythagoreische Schule*, В. 4.

**) Интересно отметить, что (согласно Тюр-Данжену) у сумерийцев «единица» обозначала мужчину, а число «два» — женщину. (Прим. перев.)

У Плутарха («Изида и Озирис», 42) я заимствую довольно интересный с математической точки зрения пример:

«Пифагорейцы питают отвращение к числу 17. Ибо 17 лежит как раз посередине между числом 16, представляющим полный квадрат, и числом 18, являющимся удвоенным квадратом; оба эти числа являются единственными плоскими числами, для которых периметр (прямоугольника) равен его площади...».

Пояснение. Пусть стороны прямоугольника выражаются целыми числами x и y , и пусть площадь этого прямоугольника — «плоское число» xy — равняется периметру

$$xy = 2x + 2y.$$

Мы можем совершенно так же, как это делается в вавилонском учебном тексте АО 6770, выразить неизвестное y через x :

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Так как y является целым, то $x-2$ должно быть делителем 4; таким образом,

$$x-2=1, \quad x=3, \quad y=6, \quad xy=18,$$

или

$$x-2=2, \quad x=4, \quad y=4, \quad xy=16,$$

или

$$x-2=4, \quad x=6, \quad y=3, \quad xy=18.$$

Следовательно, получаются как раз те две возможности, о которых говорит Плутарх.

Неопифагорейцы вроде Никомаха Гераского (100 н. э.) и Ямвлиха (300 н. э.) наслаждаются такой мистикой чисел. Ямвлих в своем «Арифметическом богословии» без конца говорит о мистическом и божественном значении чисел. Популярное «Введение в арифметику» Никомаха *) ставит себе главной целью изложить в доступной форме чудесные и божественные свойства чисел. Там презабавно рассказывается о треугольных, квадратных, прямоугольных и многоугольных числах, о гномонических и пространственных числах, об отношениях и их частных видах: кратных и эпиморных **), и т. д., затем о простых числах и геометрических прогрессиях; все это иллюстрируется многочисленными приме-

*) Английский перевод с подробным комментарием Martin Luther d'Ooge New York, 1926).

**) Слово «эпиморный» вводится, как равносильное греческому ἐπιμόριος (сверхчастный). Два числа A и B находятся в эпиморном отношении, если разность $B-A$ является некоторой кратной A , или B , т. е. если A или B суть кратные от $B-A$. Таким образом, эпиморным является отношение $\frac{n+1}{n}$. В следующей главе, при обсуждении вопроса о пропорциональности, мы познакомимся с доказательством Архита, что любое эпиморное отношение может быть сведено к виду $\frac{n+1}{n}$.

рами, но нигде не дается доказательств. Никомах знал свою публику; он понимал, что хотя его читатели желают быть посвященными в мистику чисел, но сухие доказательства вызовут у них досаду, а кроме того, и чудеса сильно поблекнут.

Другой источник для пифагорейской теории чисел представляют три арифметические книги (VII, VIII и IX) «Начал» Евклида. Но это уже настоящий научный труд; ни о каких тайнах уже нет и речи и все доказывается строго. Хотя Никомах жил четырьмя веками позже Евклида, он производит, однако, впечатление чего-то более примитивного; он стоит гораздо ближе к первоначальной числовой мистике Пифагора и его школы. Мне кажется, что Пифагор на положении пророка выражал свою мудрость изречениями оракула, в которых надо искать скрытый смысл, и только позже пифагорейцы превратили его теорию чисел в точную науку.

В силу этого, рассматривая учение о числах Пифагора и его непосредственных последователей, мы будем пользоваться главным образом Никомахом, а в следующей главе, при реконструкции математики поздних пифагорейцев, мы будем черпать указания преимущественно из Евклида.

Совершенные числа

У пифагорейцев считалось чем-то в высшей степени замечательным, если число равнялось сумме своих собственных делителей, например

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Они называли такие числа «совершенными». Никомах дает 4 примера: 6, 28, 496 и 8128. Он дает также общее правило, доказательство которого имеется у Евклида («Начала», IX, 36):

Если сумма

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = p$$

является простым числом, то $2^{n+1}p$ будет совершенным числом. Например, $1+2+4=7$ — простое число, следовательно, $4 \cdot 7 = 28$ будет совершенным числом.

При доказательстве необходима формула суммирования геометрического ряда

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

которая встречается также и в вавилонских текстах. Поэтому Пифагор, пожалуй, знал это суммирование.

Числа, названные Никомахом, суть $2(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$ и $2^6(2^7-1)$. Следующее совершенное число есть $2^{12}(2^{13}-1)$. Наибольшее известное будет $2^{126}(2^{127}-1)^*$. См.,

*) В настоящий момент $2^{2280}(2^{2281}-1)$. (Прим. перев.)

далее, Dickson, *History of the Theory of Numbers*, I, или E. T. Frost, *Primzahlen*, Basel, 1953.

Такую же достопримечательность представляют собой и

Дружественные числа

как, например, 220 и 284, каждое из которых равно сумме делителей другого:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

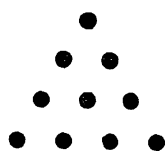
Когда Пифагора однажды спросили, что такое друг, он сказал, что это «второе я», и упомянул о дружественных числах 284 и 220. Такие загадки со взаимным подменом чисел знали также и в Вавилоне.

У Никомаха мы находим гораздо больше точек соприкосновения с вавилонской арифметикой, чем у Евклида. Так, например, он, как и вавилоняне, специально рассматривает квадратные числа n^2 и кубические числа n^3 , а среди параллелепипедальных чисел abc он особо рассматривает числа, имеющие вид $n^2(n \pm 1)$, для которых у вавилонян были таблицы.

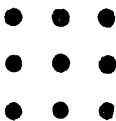
Тут мы, естественно, приходим к любимой теме Никомаха:

Фигурные числа

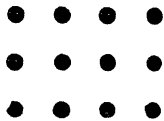
Никомах знает треугольные числа $1 + 2 + \dots + n$, квадратные n^2 , прямоугольные $n(n+1)$, пятиугольные и т. д.



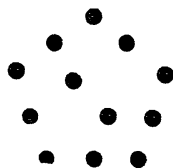
Треугольное
число



Квадратное
число



Прямоугольное
число



Пятиугольное
число

Рис. 44.

Об удивительных свойствах этих чисел можно прочитать у Никомаха (в указанном выше переводе D'Ooge). Они основываются на суммировании простых арифметических рядов вида

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) - \text{треугольное число}, \quad (1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 - \text{квадратное число}, \quad (2)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) - \text{прямоугольное число}, \quad (3)$$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{1}{2} n(3n-1) - \text{пятиугольное число}. \quad (4)$$

Для доказательства (2) при помощи чертежа замечают, что квадрат может быть разделен на меньший квадрат и «угол» или «гномон». При помощи повторения этого процесса можно видеть, что количество полосок в этом квадрате представляет сумму «гномонических чисел», т. е. нечетных чисел, $1+3+5+\dots$

Из формулы суммирования арифметических рядов получается еще и другое, правда не столь наглядное, правило для последовательного суммирования одного, двух, трех... следующих друг за другом нечетных чисел, которое дает Никомах:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3 + 5 &= 2^3 \\ 7 + 9 + 11 &= 3^3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

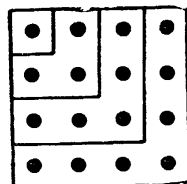


Рис. 45.

Отсюда непосредственно вытекает правило для суммирования кубических чисел, которое было известно римским землемерам (разумеется, из греческого источника *):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2.$$

Подобного рода формулу для $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ мы видели выше в вавилонском тексте.

Пифагору приписывают и правило для нахождения целочисленных решений неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (5)$$

а именно,

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad y = m, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + 1),$$

где m — нечетное число (Прокл, Комментарий к Евклиду, стр. 427).

Что эти значения действительно удовлетворяют уравнению (5), можно показать на чертеже, если к квадрату со стороной $x = \frac{m^2 - 1}{2}$ прибавить гномон с шириной 1, после чего получается квадрат со стороной $z = \frac{m^2 + 1}{2}$ **). Площади первого квадрата, гномона и целого квадрата как раз будут x^2 , y^2 и z^2 , откуда и следует (5). Частный случай $m=3$ приводит к прямоугольным треугольникам со сторонами 3, 4, 5, которые, по словам Витрувия, нашел Пифагор. Как уже говорилось

*) См. M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, I (3 изд.), стр. 559.

**) $\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + 2 \frac{m^2 - 1}{2} + 1 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$. (Прим. перес.)

выше, вавилонянам было известно более общее правило для прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

Почти невероятно, чтобы все эти совпадения между Пифагором и математикой Вавилона были случайными. Пифагор, по-видимому, заимствовал у вавилонян немало любопытных числовых редкостей вместе с их мистическим истолкованием. Его ученики, как мы увидим в следующей главе, стали вести свои исследования более систематическим путем и привели их в логически законченную систему *).

Пифагор и геометрия

Кто, услышав имя Пифагора, не вспомнит знаменитую теорему о квадрате на гипотенузе? К сожалению, свидетельства **) именно относительно этого пункта являются в высшей степени сомнительными. Прокл в своем комментарии к этому предложению (Е в к л и д, I, 47) говорит очень неясно: «Если послушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору; рассказывают, что он в честь этого открытия принес в жертву быка». Плутарх цитирует двустипшие: «Когда Пифагор нашел свой знаменитый чертеж, то он за него принес в жертву быка», и добавляет, что этот чертеж или относился к квадрату на гипотенузе или к приложению площадей ***). Однако в другом месте тот же Плутарх уверяет, что бык был принесен в жертву по случаю решения задачи о построении фигуры, которая была бы равновелика другой и подобна третьей ****). Витрувий полагает, что бык пал жертвой открытия прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5.

Однако этот рассказ совершенно неправдоподобен, ибо, как известно, Пифагор был непримиримым противником убоя и

*) Связи никомаховой теории чисел с вавилонской математикой несомненны, но нельзя с абсолютной достоверностью относить их к самому Пифагору. За 600 лет, протекших от Пифагора до Никомаха, греки столь часто соприкасались с вавилонянами (связи между ними порвались лишь после парфянского завоевания Междуречья, около 100 до н. э.), что нельзя все эти заимствования относить к самому началу этого соприкосновения. Придирчивый критик мог бы указать, что оба упоминаемых автором суммирования $1+2+2^2+\dots+2^n$ и $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ в вавилонской математике засвидетельствованы лишь одним текстом эпохи Селевкидов (АО 6484), который позже не только Евклида, но даже и Архимеда. Если бы от вавилонской математики сохранился только один этот текст, то исследователи с полным правом усмотрели бы в нем греческое влияние. Равным образом вавилонская таблица $n^2(n+1)$ тоже относится к поздним текстам (вторая половина 1-го тысячелетия до н. э.). (Прим. перев.)

**) Собраны у Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889), стр. 26.

***) Plutarchos, *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, IX.

****) Plutarchos, *Quaestiones Convivii*, VIII, Quaest. 2, 4.

жертвоприношений животных, а в особенности крупного рога-того скота *).

Правда, одно время думали, что в эпоху Пифагора, на первой стадии развития геометрии, эта теорема была еще неизвестна. Но теперь этот аргумент отпадает, ибо мы знаем, что за 1200 лет до Пифагора эта теорема уже приводилась в клинописных текстах. Весьма возможно поэтому, что Пифагор узнал о своей теореме в Вавилоне. Кроме этого, мы, собственно, ничего не можем сказать.

Каталог Прокла приписывает Пифагору еще построение правильных многогранников. Но схолия к тринадцатой книге «Начал» говорит, что пифагорейцы знали только три правильных многогранника, именно куб, тетраэдр и додекаэдр, а позже Теэтет открыл еще два других. Как раз по той причине, что эта схолия противоречит традиции, приписывающей Пифагору все возможное и еще сверх того, в настоящее время она вызывает больше доверия, чем сообщение Каталога. Вблизи Падуи был найден этрусский додекаэдр, который датируется временем ранее 500 до н. э.**). Таким образом, весьма возможно, что Пифагор был знаком с кубом, тетраэдром и додекаэдром, но октаэдр и икосаэдр, вероятно были впервые открыты Теэтетом.

Стороны додекаэдра являются правильными пятиугольниками. Диагонали правильного пятиугольника образуют звездчатый пятиугольник.

Эта фигура, символ здоровья, служила опознавательным знаком для пифагорейцев. Когда на чужбине один из них лежал на смертном одре и не мог заплатить человеку, который ухаживал за ним вплоть до его кончины, то он велел ему изобразить на своем жилище звездчатый многоугольник; если когда-нибудь мимо пройдет пифагореец, то он не преминет осведомиться об этом. Действительно, несколько лет спустя один пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение.

Для построения звездчатого пятиугольника (рис. 46) пифагорейцы могли воспользоваться тем его свойством, что каждая из этих пяти линий делит каждую другую в крайнем и среднем отношении, т. е. так, что меньший отрезок $AK = a - x$ относится к большему $KB = x$, как этот больший отрезок x к целому $AB = a$. Справедливость этого можно сразу усмотреть из подобных треугольников AIB и KFB . Пропорция $BF : BK = BI : BA$, или

$$(a - x) : x = x : a,$$

приводит к квадратному уравнению

$$x^2 = a(a - x).$$

*) Доказательства см. у A. Rostagni, *Il verbo di Pitagora* (Torino 1924.)

**) См. F. Lindemann, Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss. 26, 1897, стр. 625—768.

Пифагорейцы прекрасно могли решить это уравнение по способу «приложения площадей», о котором мы будем говорить в следующей главе; мы уже знаем, что и вавилоняне умели это делать. Строили ли пифагорейцы звездчатый многоугольник именно этим или каким-нибудь подобным способом — мы не знаем, но вполне достоверно, что они могли сделать это.

Звездчатый пятиугольник можно также найти на вавилонских рисунках *). Вот еще одно соприкосновение между Вавилоном и древнейшей пифагорейской математикой.

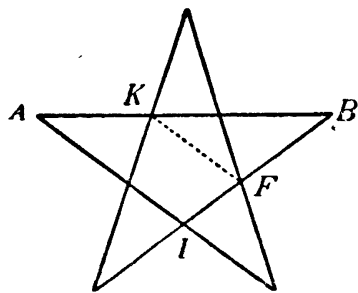


Рис. 46.

Больше нам нечего сказать о геометрии Пифагора. Еще меньше знаем мы об

Астрономии Пифагора

По рассказу Александра Полигистора, Пифагор считал Землю шаром, который находится в центре вселенной, и знал о собственном движении Солнца,

Луны и планет, отличном от суточного движения неподвижных звезд **).

Но компиляция Александра, заимствованная из каких-то «Пифагорейских записей», не заслуживает особого доверия. Он, например, утверждает, что числа получили свое происхождение из единицы и неопределенной двойцы. Но Аристотель вполне определенно говорит, что эта мысль принадлежит платоникам, а вовсе не пифагорейцам. Пифагорейцы считали, что числа произошли из единицы и неограниченности, а Платон заменил неограниченность неопределенной двойцей «большого и меньшего» (А р и с т о т е л ь, *Метафизика*, А 6). Таким образом, компиляция, из которой черпает Полигистор, написана после Платона и притом человеком, который не знал истинных взаимоотношений между учениями Пифагора и Платона. Кроме того, ясно, что в части терминологии на автора оказали влияние идеи Стои. Поистине это совершенно недостоверный свидетель! ***).

*) См. G. J u n g e, *Flächenanlegung und Pentagramm*, Osiris 8 (1948).

**) У Диогена Лаэртца, VIII, 25. См. об этом многократно разбиравшемся фрагменте J. E. R a v e n, *Pythagoreans and Eleatics* (Cambridge, 1948), стр. 160.

***) В отношении теории шаровидности Земли у Пифагора автор неправ. То обстоятельство, что она была известна Пифагору (или ранним пифагорейцам), доказывается, конечно, не фрагментом Александра (вольнотушечник знаменитого Суллы, первая половина 1-го века до н. э.), но тем, что Землю считали шаровидной Парменид и Эмпедокл. Впрочем, теория шаровидности Земли у Пифагора не имела никакой научной основы. Орфики считали мир яйцом (см. «Птицы» Аристофана, стр. 693—702, приведенные в дильсовых

Однако сообщению относительно собственного движения планет можно верить, так как Алкмеон, который был много моложе Пифагора и научные представления которого были родственны пифагорейским, говорит, что планеты движутся с запада на восток противоположно движению неподвижных звезд *). Эта мысль уже наверняка имеет вавилонское происхождение.

Заключение

Итак, в результате мы кое-что знаем о музыкальной теории Пифагора, почти ничего не знаем о его теории чисел, о его астрономии — еще меньше, о его геометрии, если рассудить толком, — ровно ничего. Результат печальный!

Но нет ли в нашем распоряжении каких-либо других указаний относительно развития математики в эти древние времена? Разве не занимались математикой, скажем, те строители, которые построили великолепные храмы в Ионии и на юге Италии? Ведь храм Артемиды в Ефесе был одним из семи чудес мира.

Откровенно говоря, мы этого не знаем. Можно строить великолепные здания и без математики, как это было у римлян. Римский архитектор Витрувий подробно описывает, как строится зал с колоннами, но математики у него никакой нет.

Только в одном случае нам кое-что известно о математической подготовке греческих планов строительства; речь идет о

САМОССКОМ ТУННЕЛЕ

Около 530 до н. э. по повелению могущественного тирана Поликрата Евпалин построил водопровод через известняковую гору Кастро на острове Самосе.

Геродот так описывает эту постройку («Истории», кн. III, 60)

«Я потому так подробно писал о самосцах, что они — создатели трех самых больших сооружений на греческой земле. Первое из них — это подземный ход, пробитый на высоте полутора саженей от подножия высокой горы и имеющий два входа по своим концам; весь этот подземный ход имеет семь стадий в длину, восемь футов в высоту и восемь футов в ширину; везде по всей его длине тянется непрерывно водосток двадцати локтей глубины и трех футов ширины, через который бежит в изобилии ключевая вода и по трубам достигает города Самоса. Строителем этого сооружения был Евпалин, сын мегарца Навстрофа».

«Vorsokratiker»). Земля была желтком, воздух — белком, а небесный свод — скорлупой. Указания на яйцевидность мира имеются также и у Эмпедокла (правда, они не совсем ясны: Эмпедокл считал мир похожим не на вытянутый, но на приплюснутый эллипсоид вращения). (Прим. перев.)

*) H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, Alkmaion, A. 4.

Когда в 1882 году немецкие археологи занимались раскопками древностей на Самосе, они нашли туннель в хорошей сохранности

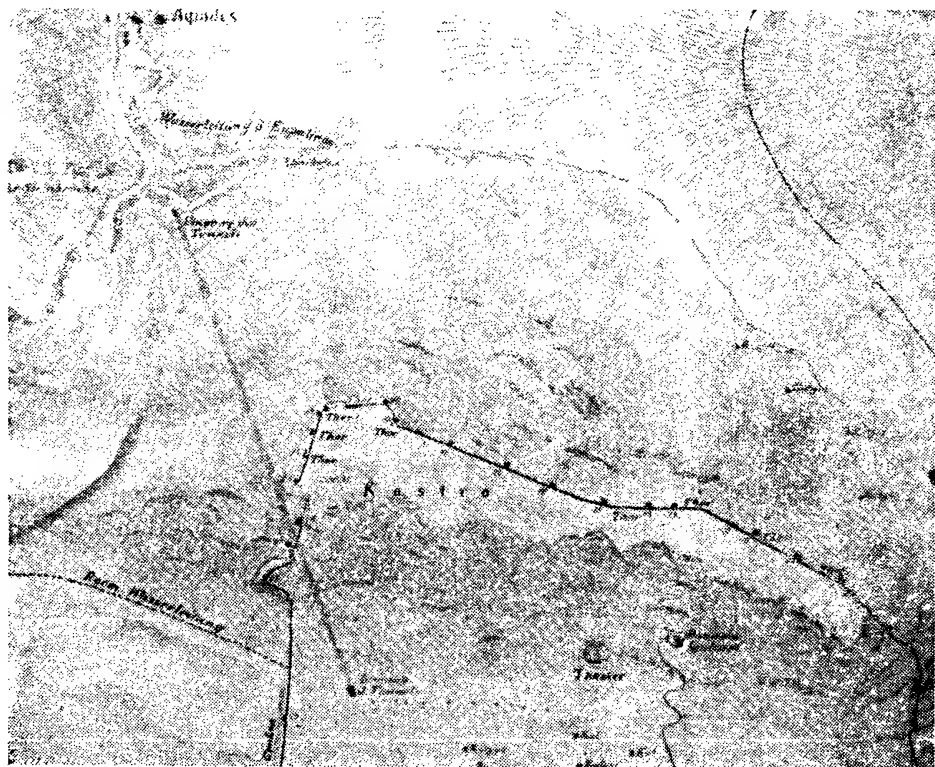


Рис. 47. Гора Кастро на острове Самосе с водопроводом Евпаллина. По Э. Фабрициусу, Mitt. Deutsches Archaeol. Institut, Athen. 9 (1884), стр. 165.

п совершенно таким же, как его описал Геродот: 1 километр длины, 2 метра ширины и высоты, с глубокой выемкой, где находилась

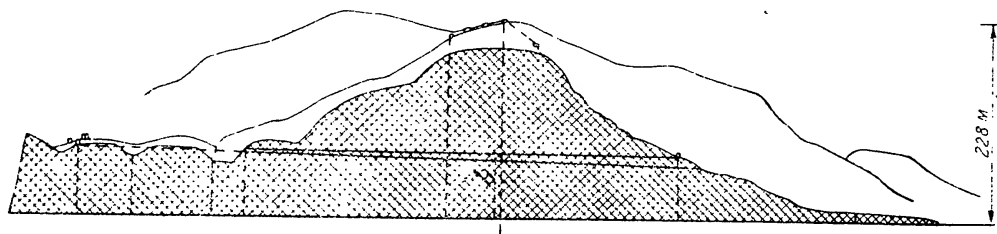


Рис. 48. Поперечное сечение горы Кастро с увеличенным вдвое масштабом высот. Верхняя линия через гору представляет первоначальный туннель, нижняя — прокопанный водосток с большим наклоном.

труба с вертикальными шахтами для вентиляции и очистки от мусора, а также с нишами, в которых рабочие ставили свои светильники. Выемка имеет в верхнем конце 2 метра глубины, а в

нижнем 3 метра, что, вероятно, было сделано потому, что первоначально намеченный скат оказался слишком малым *).

Теперь начинается самое существенное: туннель, по-видимому, копали с обоих концов. Приблизительно в середине работники с обеих сторон встретились с ошибкой, не превышающей 10 метров в горизонтальном и 3 метров в вертикальном направлении. Достижение замечательное!

Когда около 700 года иудейский царь Езекия повелел выкопать подобный акведук в скалах около Иерусалима, его работники вынуждены были самым грубым способом при помощи вертикальных колодцев контролировать сверху, правильно ли берется направление, и в результате получился зигза-

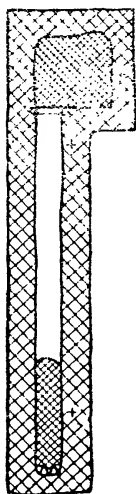


Рис. 49. Поперечное сечение туннеля и водостока.

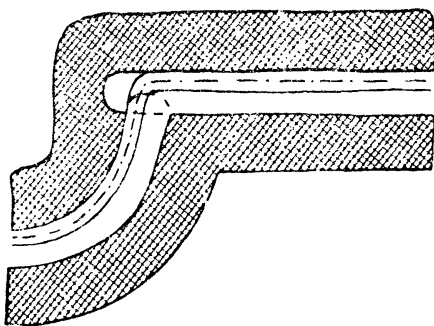


Рис. 50. Каким образом северный туннель был соединен с южным; горизонтальный план.

гообразный туннель в два раза длиннее, чем расстояние между его концами! **).

Евпалин достиг большего: его туннель был почти прямолинейным. Как же это оказалось возможным?

Ответ на это мы находим в «Диоптре» Герона Александрийского (60 н. э.). Герон сначала описывает диоптр, т. е. горизонтальную линейку с двумя смотровыми отверстиями, которую можно поворачивать и при помощи которой на плоскости можно визировать прямые углы. Описав прибор, Герон ставит такую задачу (№ 15): «Через гору АВГΔ надо прорыть прямолинейный туннель, если даны его выходы В и Δ». Он проводит на плоскости произвольную прямую ВЕ, затем при помощи диоптра строит перпендикуляр к ней ЕЗ, затем перпендикуляр ЗΠ к этой последней линии и так далее: НΘ, ΘΚ, ΚΛ. После этого он перемещает

*) См. E. Fabricius, Mitt. deutsch. archäol. Inst. Athen. 9, 1884. стр. 165.

**) См. J. Bidez, *Eos, Platon et l'Orient* (Brussel), 1945, стр. 12.

В № 16 Герон рассматривает еще задачу о том, как строить вертикальные шахты, которые должны выйти в туннель (предполагаемый прямоугольным). Подобные шахты действительно имеются и на Самосе.

АНТИЧНЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Евпалин должен был, кроме этого, еще измерять разности высот. Он, наверное, делал это совершенно так же, как Герон и как мы до сих пор делаем это: переходя от одной точки к другой при помощи вертикальной мерной рейки и горизонтального визирного инструмента. Подзорных труб тогда не было; следовательно, визирный инструмент должен был быть диоптром — горизонтальной вращающейся рейкой с отверстиями для зрения по краям. Горизонтальность установки достигалась у Герона при помощи сообщающихся сосудов (см. рис. 52).

Может быть, читатель сочтет такой инструмент слишком совершенным для эпохи Евпалина. Обычно древних греков представляют себе гораздо более примитивными, чем они были в действительности.

Пусть он тогда обратит внимание на то, что у Анаксимандра Милетского, ученика Фалеса, была мастерская, где, между прочим, изготовлялись из дерева небесные глобусы. Анаксимандру было также поручено установить на рыночной площади

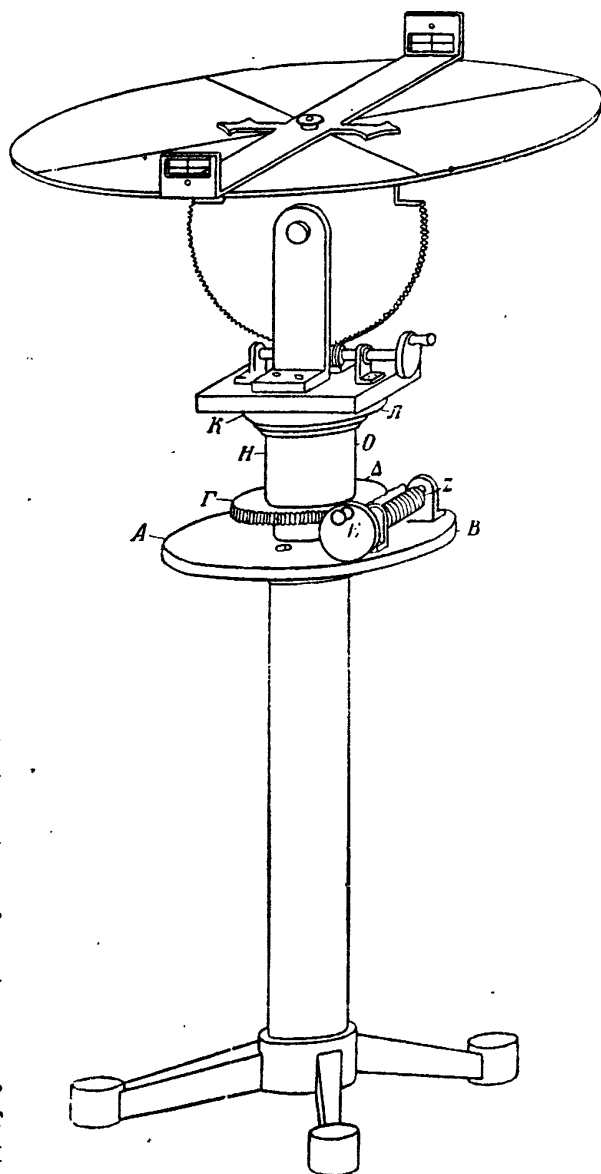


Рис. 52. Реконструированный Шене диоптр Герона по собственному описанию последнего (Heronis Opera, т. III, изд. J. Schöne).

в Спарте гномон, т. е. вертикальные солнечные часы, с рассчитанными, разумеется, заранее делениями для часов и месяцев, которые, как говорит Витрувий, для часов и полагаются*). Это было около 560 до н. э., за тридцать лет до построения Самосского туннеля.

Зная это, можно составить себе более ясную картину научной жизни в 6-м веке, чем на основании одних смутных рассказов о Фалесе и Пифагоре.

Теперь понятно, почему Прокл говорит, что «Пифагор преобразовал математику в форму свободного умственного развития». Ясно, что «свободное развитие» означает умственное развитие, подобающее свободному человеку, в противоположность выучке ремесленника. Ионийцы занимались математикой не только из прирожденного интереса, но иногда и для практических приложений. Землемеры и архитекторы вроде Евпалина должны были знать кое-что из геометрии, а в курс обучения инструментального мастера из мастерской Анаксимандра, без сомнения, входила и астрономия. В противоположность этому Пифагор освободил математику от этих практических приложений. Пифагорейцы предавались математике, как чему-то вроде религиозного созерцания, дабы приблизиться к божеству.

*) См. «Horologium» в P a u l y — W i s s o w a, *Realenzyklopaedie des klassischen Altertums*.

ГЛАВА V

ЗОЛОТОЙ ВЕК

Пятый век, время Перикла, эпоха широчайшего расцвета и падения Афинского государства — это золотой век эллинской культуры. В этот век возникли великолепные храмы Акрополя, скульптура дала мастерские произведения, которые в течение веков поражали людей и с которыми никто не сумел сравняться; это был век великих трагиков Эсхила, Софокла и Еврипида и великих историков Геродота и Фукидида.

Пятый век начинается с неудачного восстания ионийских городов в Малой Азии против персидского владычества; это восстание было поводом для великих персидских войн, из которых вышли победителями Афины и Спарта. Совершенно разоренные Афины с великим блеском отстраиваются заново и кладут основание афинскому господству на море. Всюду, куда распространялась афинская держава, вводилась демократия. Приверженцы аристократии пифагорейцы потеряли свою власть и были изгнаны из Италии (около 430 до н. э.). Все большими и большими становились противоречия между демократическими Афинами и военной аристократией Спарты, пока страшная Пелопоннесская война не положила конец могуществу Афин, а вслед за тем и величию Эллады.

В области философии этот век был эпохой просвещения, временем рационализма. Старая религия и мораль уже осмеивались в кругах образованных людей. Софисты учили, что всякая истина и любые нравственные ценности имеют лишь относительную значимость. Материалистические системы, вроде созданной атомистом Демокритом, распространялись в широких кругах. По Анаксагору и Демокриту, Солнце и Луна были не живыми существами, а просто мертвыми камнями, носящимися туда и сюда в вихре атомов.

В прямой противоположности с этим учением стояла религиозно-мистическая метафизика пифагорейцев*), утверждавших, что планеты являются одушевленными божественными существами,



Рис. 53. Парфенон, вид с юго-востока. Тому, что красота Парфенона (построенного в 447—438 до н. э.) достигает такой высоты, немало способствовало то обстоятельство, что его архитекторы Иктин и Калликрат, чья работа, по словам Плутарха, находилась под наблюдением Фидия, применили к его построению свои обширные и действительно замечательные теоретические познания в области оптических явлений и перспективы. Сами древние рассказывают нам, что Фидий был хорошо знаком с оптикой и геометрией. А что архитекторы Парфенона знали оптические явления, доказывается, между прочим, легкой выпуклостью стилобата (самой верхней из трех ступеней, на которой стоят колонны). Эта выпуклость, встречающаяся также и в других дорических храмах, может быть объяснена как сознательно употребленный прием для исправления оптической иллюзии впадины. Менее достоверно объяснение наклона колонны (назад) и стены внутреннего святилища (назад), абаков у колонн (вперед), архитрава и триглифов (назад), карниза и акротериев (вперед). Римский архитектор Витрувий говорит (*Об архитектуре*, III, 5, 13), что наклон храмовых колонн внутрь и находящихся над колоннами конструктивных деталей наружу служит противодействием оптической иллюзии, для которой он дает математическое объяснение.

которые благодаря своему совершенству и божественному разуму обладают совершенными круговыми движениями.

*) Эта религиозная противоположность получает страстное выражение в десятой книге платоновых *«Законов»*. См. B. L. van der Waerden, *Die Astronomie der Pythagoräer* (North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1951).

Философия и математика достигают наивысшей точки своего развития в 4-м веке, веке Платона. В 5-м веке мы видим процесс их роста, подготавливающий время их расцвета. Что касается математики, то этот процесс роста совершается главным образом в школе пифагорейцев. Наиболее интересной фигурой в их среде в начале 5-го века является, без сомнения,

ГИПАС

Учение Пифагора имело две стороны: оно было и научным, и религиозно-мистическим. Пифагор называл себя не мудрецом, а философом, искателем и любителем мудрости; кроме того, он был чем-то вроде пророка, учения которого рассматривались как нечто непогрешимое, как божественное откровение.

Эта двойственность должна была после его кончины неизбежно привести его учеников к серьезному конфликту. Следовало ли божественное откровение Пифагора, его «сам сказал» (т. е. его собственные слова) рассматривать как источник всего учения о числах, гармонии и светилах? И тогда не имело никакого смысла развивать далее в собственных изысканиях эту совершенную мудрость. А может быть, наоборот, надо было самим, как подобает философам, искать истину при помощи своего собственного мышления? Тогда рассудок, как верховного судию во всех вопросах науки; следовало поставить выше откровения.

К этому присоединяется еще следующее. Тот, кто хочет идти вперед в области науки, не может рассматривать ее как тайное учение только для одних посвященных. Он должен знакомиться с результатами исследований других, а в таком случае невозможно умалчивать и о своих собственных. И тогда он неминуемо должен прийти к конфликту с обетом молчания.

Действительно, вскоре после смерти Пифагора этот конфликт и разразился. Гиппас осмелился добавить к учению Пифагора некоторые новинки и поделиться этим с другими. Он дал построение шара, описанного вокруг додекаэдра; подробно разработал учение о гармонической средней; к трем консонантным интервалам — октаве, квинте и кварте — прибавил еще два: двойную октаву и октаву, соединенную с квинтой; он обсуждал теорию музыкальных отношений с музыкантом Ласом, и тот производил по его указаниям опыты с пустыми и наполненными до половины сосуда^{*)}. Эти и им подобные нарушения тайны привели к

^{*)} Данные источников см. у K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontium*, Ann. Math. 46 (1945).

разрыву со школой. Гиппас был изгнан. Позднее, когда он погиб во время кораблекрушения, его противники утверждали, что это было наказанием за совершенное им осквернение святыни. Его последователи называли себя «математиками» в противоположность «акузматикам», которые строго держались священных пифагорей-



Рис. 54. Афинская школа. Аттическая краснофигурная чаша работы художника Дуриса, около 485—480 до н. э. (Берлинский государственный музей). Рисунок представляет внутренность «гимнасия», где давали уроки учителя музыки и грамматики. Налево происходит урок игры на лире, направо—декламации. Другая сторона чаши (не изображенная здесь) представляет уроки письма и игры на флейте. На свитке, который учитель в центре держит перед учеником, мы читаем начальные слова эпической поэмы, содержание, как принято, воззвание к музам: «Музы, хочу воспеть Скамандр многоводно текущий» (Скамандр — одна из двух рек на троянской равнине). Молодой человек, стоящий перед учителем, по-видимому, декламирует эту поэму. Вероятно, именно к нему относится хвалебная надпись, которую можно видеть на верхнем краю чаши: «Гип(п)одам прекрасен». Направо от ученика сидит «педагог», снокойно ожидающий конца урока, когда он должен будет отвести мальчика домой. «Mus ke», которой обучался этот мальчик («искусство муз»), кроме музыки, обнимала также и литературу; в жизни греков музыка играла очень важную роль.

ских правил жизни и благоговейно передавали друг другу «Akusmata»—священные изречения. Обе секты жестоко боролись друг с другом, как это обычно и случается с сектами одной и той же религии.

Спустя сто лет после Гиппаса существовали различные группы пифагорейцев, и каковы были их отношения между собой и с обеими старыми сектами — сказать трудно. Одна из таких групп была около 430 года изгнана из Италии победоносной демократией. Последних представителей этой группы, учеников Филолая и Еврита, еще знал Аристоксен (ученик Аристотеля, около 320 до н. э.), как он сам говорит об этом. Верно ли это — мы не знаем,

Аристоксен далеко не всегда придерживался истины*). Другая группа, однако, еще могла оставаться в Италии; по крайней мере позднее, в 4-м веке, там еще решались справлять пифагорейские «оргии». Третью группу, которая, очевидно, продолжала традицию «математиков», составляют так называемые «италийские пифагорейцы», о которых постоянно говорит Аристотель. Одной из наиболее важных и наиболее интересных фигур среди них был Архит Тарентский, друг и современник Платона, о котором мы будем говорить в следующей главе. Около 350 года упоминаются еще астрономы Экфант и Гикет из Сиракуз, которые учили о вращении Земли вокруг своей оси.

Имена «математиков» между Гиппасом и Архитом неизвестны. Однако более важным, чем имена, является само развитие математики в школе пифагорейцев, а об этом мы кое-что знаем.

«МАТЕМАТА» ПИФАГОРЕЙЦЕВ

Пифагорейцы знали четыре «*mathemata*», т. е. четыре отрасли науки: учение о числах (Арифметика), теория музыки (Гармония), учение о фигурах и измерениях (Геометрия) и астрономия (Астрология). Об астрономии мы будем подробно говорить в другом месте. Относительно теории музыки я отсылаю к моей статье в журнале «*Hermes*» 78 (1953). Итак, мы начнем с

Теории чисел

Когда в дальнейшем мы будем говорить о «числах», то под этим согласно греческому словоупотреблению всегда будем подразумевать *целые положительные числа***). Таким образом, теория чисел представляет собой учение о натуральных числах.

Древнейший отрывок теории чисел, который мы можем реконструировать, представляет собой

Учение о четном и нечетном

Если мы раскроем IX книгу «Начал» Евклида, то найдем в ней ряд предложений (21—34), которые совершенно не связаны с предыдущим и которые вместе с предложением IX, 36, как показал

*) «Кто поверит Аристоксену?»—воскликает Аристотель у Евсевия. Pгаер Evang., XV, 2. См. E. F r a n k, Amer. J. of Philology 64, стр. 222.

**) Греки даже единицу исключали из чисел, поскольку единица не является множеством. Это приводило к пространным формулировкам: «Если *a* есть число или единица...». Мы не смущаемся подобными тонкостями и обычно причисляем 1 к числам.

О. Беккер*), представляют собой архаический и типично пифагорейский математический отрывок. В сокращенной формулировке они гласят следующее:

21. Сумма четных чисел является четной.
 22. Сумма четного количества нечетных чисел будет четной.
 23. Сумма нечетного количества нечетных чисел будет нечетной.
 24. Четное минус четное есть четное.
 25. Четное минус нечетное есть нечетное.
 26. Нечетное минус нечетное есть четное.
 27. Нечетное минус четное есть нечетное.
 28. Нечетное число раз четное есть четное.
 29. Нечетное число раз нечетное есть нечетное.
 30. Нечетное число, измеряющее четное, будет измерять и его половину.
 31. Если нечетное число является взаимно простым с другим числом, то оно будет взаимно простым и с удвоенным этим числом.
 32. Число, получающееся в результате (повторного) удвоения 2, может быть только четно-четным.
 33. Число, половина которого нечетна, может быть только четно-нечетным.
 34. Каждое число, которое не принадлежит к упомянутым в предложениях 32 и 33, может быть одновременно и четно-четным и четно-нечетным.
- Теория завершается предложением 36, утверждающим, что числа

$$2^n (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)$$

являются совершенными, если только

$$p = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$$

— простое число.

Это предложение, как заметил Беккер, может быть доказано при помощи только предложений 21—34. Евклид дает несколько иное доказательство, вероятно, для установления связи с теорией чисел, изложенной в книгах VII—IX, но первоначальное доказательство, несомненно, основывалось на учении о четном и нечетном. В частности, кажется, что предложение 30 специально введено, чтобы можно было сразу показать, что $2^n p$ не имеет никаких других делителей, кроме 1, 2, $2^2, \dots, 2^n$ и $p, 2p, \dots, 2^n p$.

*) O. B e c k e r, Quellen u. Studien Gesch. Math. [B] 4 (1938), стр. 533.

Предложения 32—34 связаны с разделением четных чисел на четно-четные и четно-нечетные, которое мы в другой форме находим и у Никомаха Геразского и на которое не раз намекает Платон.

Платон всегда определяет арифметику как «учение о четном и нечетном».

Для пифагорейцев четное и нечетное являются не только основными понятиями арифметики, но и действительно заключающими основные начала всех вещей природы. [Их точка зрения выражена Аристотелем («Метафизика», кн. 1, 5) в следующих словах:

«Началами числа являются четное и нечетное... Единица состоит из того и другого... Число возникает из единицы... Числа составляют всю вселенную.

Другие из той же самой школы говорят, что существует 10 начал, которые они соединяют в пары:

ограниченное	— неограниченное,
нечетное	— четное,
единица	— множество,
мужское	— женское, и т. д.»

Отсюда ясно, что противоположение четного и нечетного играло поистине основополагающую роль в пифагорейской метафизике.

Во фрагменте древнего комического поэта Эпихарма (около 500 до н. э. или даже раньше) мы находим забавный намек на философию пифагорейцев. Происходит следующий диалог:

«Если у меня есть четное число — ну, пускай, хоть нечетное — и кто-нибудь хочет прибавить один камешек или отнять один, то ты как полагаешь, после этого число останется таким же?»

— Ни в каком случае, клянусь богами!

— А если кто-нибудь захочет прибавить какую-нибудь длину к локтю или отрезать от него кусочек, что же, по-твоему, мера останется той же?

— Конечно, нет.

— Ну, хорошо. А взгляни на людей: один растет, а другой, может быть, даже меньше становится, люди постоянно меняются, но то, что по своему характеру изменчиво и не остается все время таким же — выходит, что оно отличается от того, что изменилось. Следовательно, на основании сказанного ты и я — мы тоже отличаемся от того, чем мы были вчера, а в будущем мы тоже будем не такие. Следовательно, по тому же самому доказательству, мы никогда одними и теми же не остаемся». (Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, Epicharmos, A. 2)

Чтобы оценить это по достоинству, надо припомнить, что этот разговор происходит в комедии, а совсем не в философском рассуждении. По-видимому, первый персонаж задолжал другому некую сумму денег и при помощи философской аргументации старается доказать, что это не он занял деньги, а кто-то совсем другой.

Эпихарм, очевидно, подшучивает над философскими спорами своих современников. Но о каких же философах идет у него

речь? Конечно, о пифагорейцах*). Зачем же иначе станет он в первой своей фразе говорить о противоположении четного и нечетного? Эпихарм жил в Сицилии, а пифагорейцы в это время играли важную роль на всем юге Италии; поэтому слушателям, вероятно, намек был вполне ясен.]**)

Из всего этого видно, что учение о четном и нечетном является основной частью пифагорейской математики и Евклид взял его в свои «Начала» ради уважения к традиции.

Единственное место в «Началах» Евклида, где применяется учение о четном и нечетном, — это доказательство (в конце десятой книги), что сторона и диагональ квадрата взаимно несоизмеримы; мы приводим его в сокращении.

Если диагональ AC и сторона AB квадрата $ABCD$ взаимно соизмеримы, то пусть $m : n$ есть их отношение, выраженное в наименьших числах m и n . Из пропорции

$$AC : AB = m : n$$

следует $AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2$; но

$$AC^2 = 2AB^2,$$

таким образом, $m^2 = 2n^2$; следовательно, m^2 является четным. Вследствие этого будет четным также и m ; действительно, если бы m было нечетным, то, согласно предложению 29, было бы нечетным и m^2 .

Таким образом, число m — четное, пусть половина m есть h . Теперь m и n являются взаимно простыми, но m — четное, следовательно, n будет нечетным. Из равенства $m = 2h$ следует $m^2 = 4h^2$; таким образом, $n^2 = 2h^2$. Итак, n^2 четно; тогда, согласно тому же рассуждению, что и выше, будет четным также и n . Значит, одно и то же число n должно быть одновременно четным и нечетным. А это невозможно.

Аристотель часто упоминает об этом доказательстве. Феодор из Кирены (около 430 до н. э.), по словам Платона, доказал иррациональность $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д. до $\sqrt{17}$ (точнее говоря, несоизмеримость сторон квадратов с площадями 3, 5, ..., 17), но он обошел молчанием $\sqrt{2}$. Отсюда Цейтен заключает, что иррациональность $\sqrt{2}$ или диагонали единичного квадрата была уже известна до него. С другой стороны, Папп говорит, что теория иррациональностей получила свое начало в школе Пифагора, и действительно, пифагорейская теория четного и нечетного уже давала возможность доказать иррациональность $\sqrt{2}$; поэтому в высшей степени вероятно, что приведенное доказательство принадлежит пифагорейцам.

*) См. об этом A. R o s t a g n i, *Il Verbo di Pitagora* (1924).

**) Отрывок, заключенный нами в квадратные скобки, имеется только в английском переводе. (Прим. перев.)

Числовые отношения и делимость целых чисел

Систематическое построение теории числовых отношений и делимости, которое мы находим в VII книге «Начал», появилось позже, чем учение о четном и нечетном. По моему мнению, всю эту книгу можно приписать пифагорейцам, предшественникам Архита. Чтобы убедиться в этом, мы должны подробнее рассмотреть, какова была теория чисел самого Архита.

В принадлежащей Архиту теории музыки главную роль играют два следующих теоретико-числовых предложения, которые мы обозначим через А и В.

А. *Между двумя числами, находящимися в эпиморном отношении, нельзя вставить никакого среднего пропорционального числа*).*

В. *Если отношение чисел, будучи сложено с самим собой**), дает кратное отношение***), то оно является кратным.*

Эти два предложения, например, стоят в начале евклидова «Sectio canonis». По свидетельству Боэция, Архит доказывал первое предложение следующим образом:

Пусть $A : B$ — данное эпиморное отношение и пусть C и $D + E$ — два наименьших числа, выражающих это отношение ****). Тогда $D + E$ превосходит число C на разность D , которая будет делителем самого $D + E$ и C . Теперь я утверждаю, что D есть единица. Действительно, если предположить, что D является числом, большим единицы, и делителем $D + E$, тогда D будет также делителем E , т. е. делителем C . Таким образом, D будет общим делителем D и $D + E$; но это невозможно, ибо наименьшие числа, имеющие данное отношение, являются взаимно простыми (ср. Евклид, VII, 22). Итак, D является единицей; иными словами, $D + E$ превышает C на единицу. Поэтому-то между числами C и $D + E$ и невозможно найти никакого среднего пропорционального. Следовательно, не может также быть никакого среднего пропорционального между первоначальными числами A и B , имеющими то же самое отношение, что C и $D + E$.

*) Два числа A и B находятся в эпиморном отношении, если разность $A - B$ составляет некоторую часть и A , и B , иными словами, если A и B являются кратным от $A - B$. Например, отношение $(n + 1) : n$ является эпиморным, и из нижеследующего доказательства можно увидеть, что каждое эпиморное отношение можно привести к виду $(n + 1) : n$.

**) «Сложенное»: из $a : b$ и $b : c$ отношение будет $a : c$. Можно всегда «сложить» два отношения $a : b$ и $c : d$, если привести их к виду $ac : bc$ и $bc : bd$. Эта операция соответствует нашему умножению дробей.

***). Два числа находятся в «кратном отношении», если одно из них является кратным другого.

****) Для ясности я пишу $D + E$. В латинском тексте обычно стоит DE . Из дальнейшего ясно, что C полагается равным E .

В этом доказательстве почти дословно цитируется одно предложение из книги VII, а именно:

VII, 22. *Если два числа являются наименьшими из всех пар чисел, имеющих между собой то же самое отношение, то они будут взаимно простыми.*

Далее, в конце доказательства применяется одно предложение из книги VIII, а именно:

VIII, 8. *Если между двумя числами имеются числа в непрерывной пропорции (иными словами, если имеется геометрический ряд, крайними членами которого являются заданные числа), то сколько чисел стоит между ними в непрерывной пропорции, столько же будет стоять в непрерывной пропорции между двумя другими, имеющими между собой то же самое отношение.*

Доказательство предложения А в «Sectio canonis» Евклида в основных чертах совпадает с Архитовым. Предложение В доказывалось в «Sectio canonis» при помощи ссылки на другое предложение «Начал», именно:

VIII, 7. *Если имеется произвольное количество чисел в непрерывной пропорции и первое из них измеряет последнее, то оно будет измерять и второе.*

Как мы видим, в теории музыки Архита предполагается, что уже известен целый раздел теории чисел. Отсюда Таннери и Хизс вполне правильно заключают, что в эпоху Архита, т. е. около 400 до н. э., в пифагорейской школе должен был существовать некий «*traité d'arithmétique*»*) или «*treatise of some kind on the Elements of Arithmetics*»**) — в общем нечто близкое к книгам VII—IX «Начал» Евклида.

В моей работе «*Arithmetik der Pythagoräer*» (Math. Ann. 130, стр. 127) я исследовал, какие предложения должны были бы самое меньшее заключаться в упомянутых пифагорейских «Началах». Употребленный мной метод заключается в расчленении доказательств упомянутых предложений VII, 22 и VIII, 7—8. Результаты этого расчленения представлены в родословной таблице на страницах 158—159.

Предложения 7 и 8 книги VIII необходимо должны основываться на

VIII, 3. *Если имеется произвольное количество чисел в непрерывной пропорции***) и это будут наименьшие из имеющих то же самое отношение ****), то крайние их члены будут между собой взаимно простыми.*

Это предложение опирается на VII, 27 и на

*) «Трактат по арифметике» (слова Таннери). (Прим. перев.)

**) Трактат вроде «Начал арифметики» (слова Хизса). (Прим. перев.)

***) То есть $a:b=b:c=c:d=\dots$

****) То есть не существует чисел $a', b', c', \dots$, имеющих то же отношение, что $a, b, c, \dots$, и меньших, чем эти последние.

VIII, 2. *Найти любое заданное количество чисел в непрерывной пропорции и наименьших из всех, имеющих заданное отношение.*

Решение задачи таково: пусть данное отношение, выраженное в наименьших числах, будет $A : B$. Если мы умножим A и B на самих себя и друг с другом, то получим геометрический ряд из трех членов A^2, AB, B^2 . Если мы умножим эти члены на A , а крайний, кроме того, еще и на B , то получим ряд из четырех членов: A^3, A^2B, AB^2, B^3 , и т. д. Эта самая схема

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & B & & \\ & A^2 & & AB & & B^2 & \\ A^3 & & A^2B & & AB^2 & & B^3 \end{array}$$

имеется также и у Никомаха и применяется в теории музыки.

Таким образом, это построение геометрических рядов наверняка принадлежит арифметике пифагорейцев. То же самое справедливо и для остальной части книги VIII, ибо как раз в тех диалогах Платона, где больше всего включено пифагорейских мыслей («Тимей» и «Эпиномис»), много раз встречаются упоминания предложений и понятий книги VIII. Так, например, в «Тимее» говорится, что между двумя квадратными числами имеется одно среднее пропорциональное, а между двумя кубическими — два средних пропорциональных, а в «Эпиномисе» говорится о подобных плоских и пространственных числах. (Два «плоских» числа $A \cdot B$ и $C \cdot D$ называются подобными, если их «стороны» пропорциональны, и аналогично для «пространственных чисел» $A \cdot B \cdot C$ и $D \cdot E \cdot F$.) Таким образом, содержание книги VIII должно быть приписано пифагорейцам, точнее сказать, Архиту и его окружению.

Однако книга VIII основывается на книге VII. Мы уже видели, что Архит почти слово в слово цитирует VII, 22. Логическое родословное дерево предложений А и В Архита выглядит следующим образом*) [см. таблицу на стр. 158 — 159].

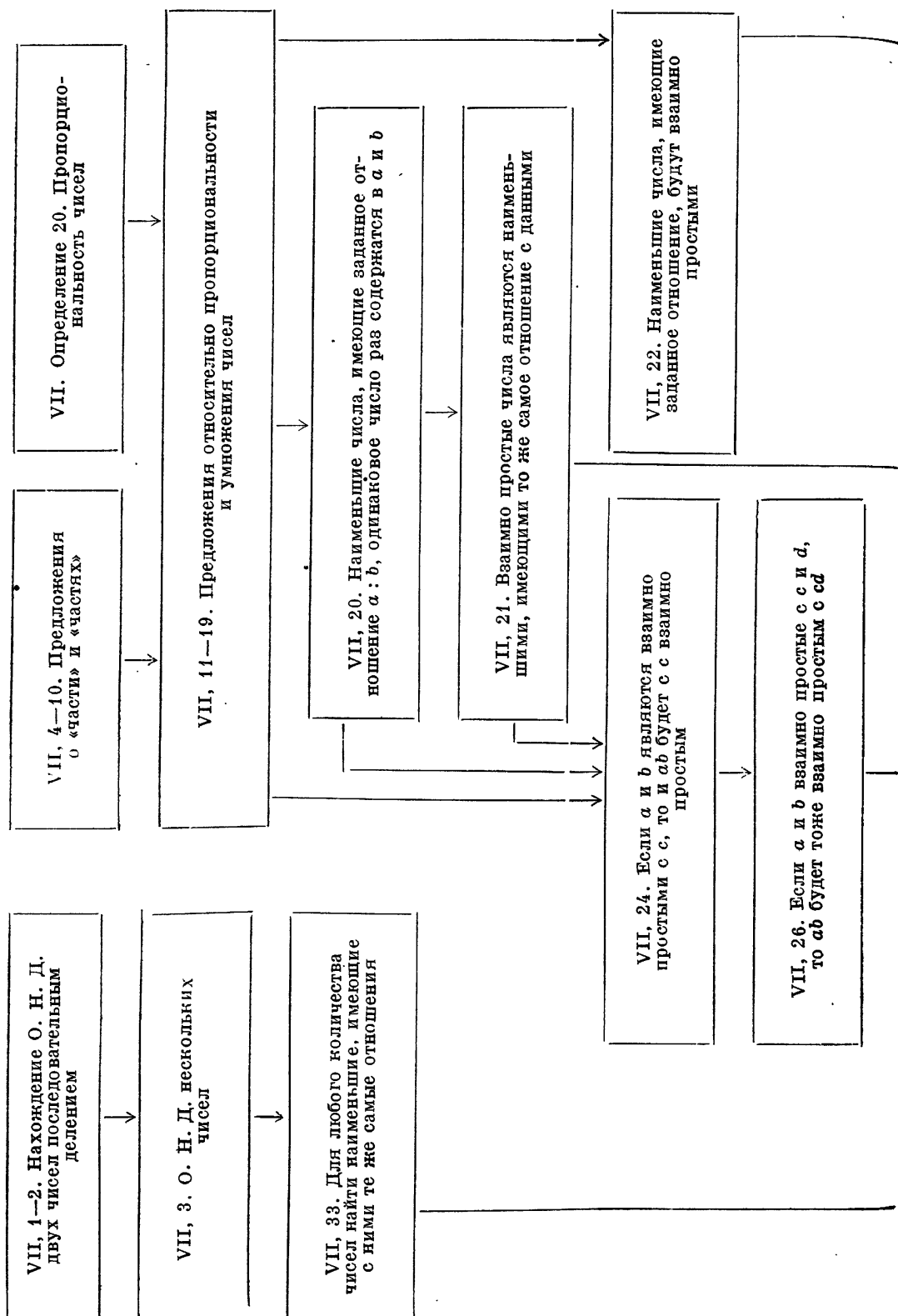
Отсюда видно, что в доказательствах предложений VIII, 2—3, 7—8, а также предложений А и В уже предполагается известной вся книга VII вплоть до предложений VII, 27—33.

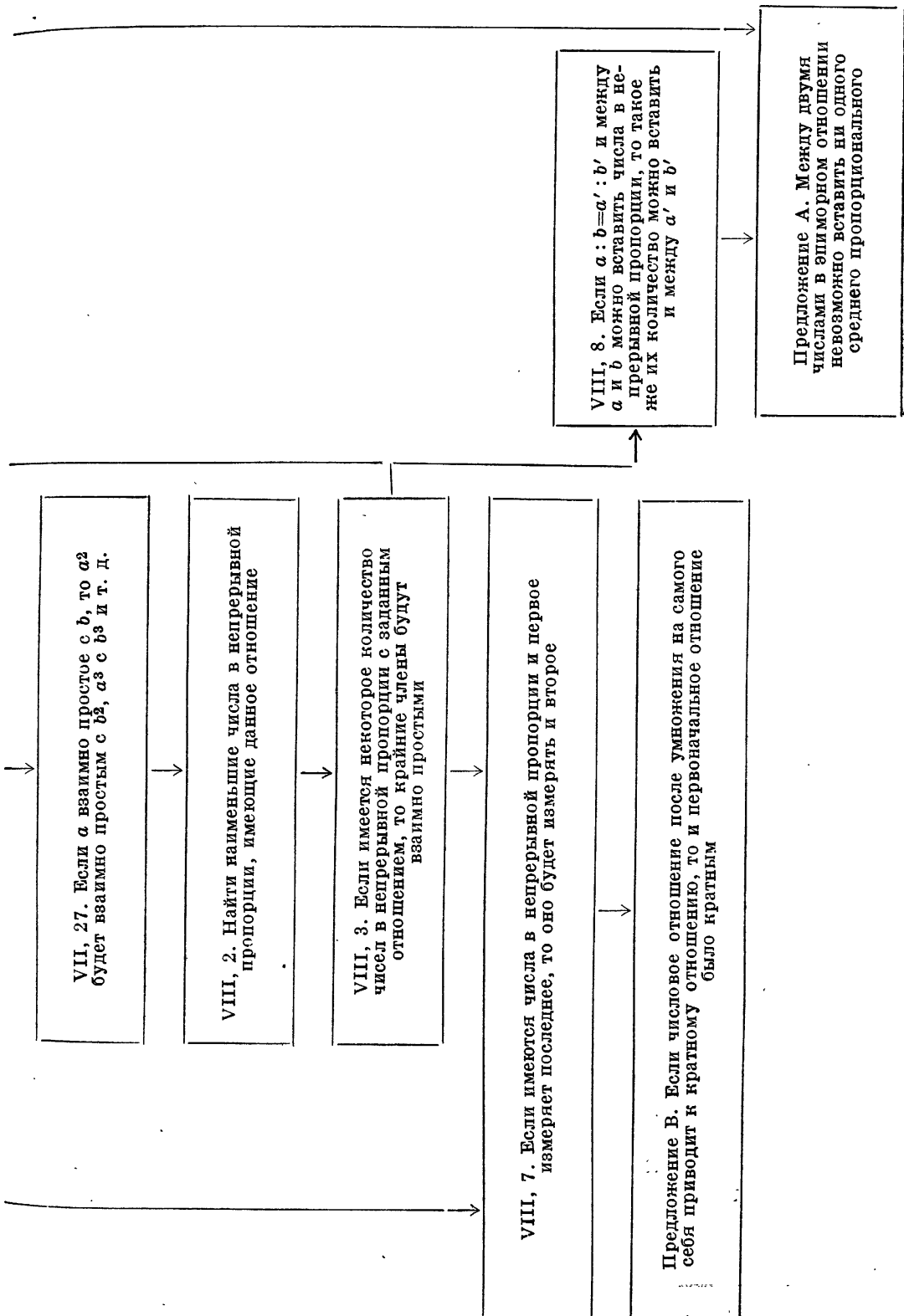
Книга VII построена настолько строго логически, что из нее нельзя выбросить ни одного камня, что представляет полную противоположность беспорядочной структуре книги VIII с ее окольными доказательствами, ненужными повторениями и логическими промахами.

Какова же историческая связь между книгой VII, комплексом предложений VIII, 2—3, 7—8 и предложениями А и В Архита и его школы? Имеются три возможности:

*) Для более детальной разработки см. мою статью *Arithmetik der Pythagoräer*, Math. Ann. 130 (1948), стр. 127.

Логическое родословное дерево Архитовых предложений А и В





1) Архит и его школа сперва принимали нужные для дальнейшего предложения VII, 21—22 и 27 без доказательства, как самоочевидные; строгие доказательства, которые мы находим в книге VII, принадлежат позднему времени;

2) предложения VII, 21—22 и 27 первоначально доказывались иначе, и книга VII представляет позднейшую переработку этой теории;

3) во времена Архита книга VII была уже полностью закончена, и Архит мог просто сослаться на предложения VII, 21—22 и 27.

То обстоятельство, что Архит у Боэция дословно цитирует VII, 22, делает третью возможность наиболее вероятной. Но мы можем пойти еще дальше и полностью устранить возможности 1) и 2), так что у нас только 3) и останется.

Предположение 1) невозможно. Действительно, пифагорейцы обычно доказывали свои теоретико-числовые предложения очень подробно, переходя постепенно от одной ступени к другой. Это можно видеть из подробного доказательства, которое Архит дает для предложения A и в котором тщательно разработан каждый самый тривиальный силлогизм; это можно также видеть и из пифагорейской теории четного и нечетного, где детально доказываются самые очевидные вещи вроде того, что любое количество четных чисел дает в сумме четное число (IX, 21), а также и в разобранном ранее доказательстве иррациональности диагонали квадрата, в котором, например, заключение «если m^2 четное, то будет четным и m » правильно получается доказательством от противного; наконец, это можно видеть из тщательно разработанных доказательств самой книги VII.

Предположение 2) также невозможно. Действительно, учение о пропорциях в книге VII построено на определении 20: *Числа пропорциональны, если первое от второго и третье от четвертого представляют то же самое кратное, ту же самую часть или такое же количество тех же самых частей**). Но это определение древнее. В применении к геометрическим величинам оно встречается уже у Гиппократы Хиосского, который называет два круговых сегмента пропорциональными их соответственным кругам, если они оба составляют одинаковые части своих кругов, например, каждый равен половине своего круга или одной трети. Строго говоря, это определение имеет смысл только для соизмеримых величин, ибо, возьмем ли мы m -кратное, n -ю часть или m n -х частей, где m и n являются числами в греческом смысле этого слова, мы всегда получим рациональное соотношение. Позднее, как мы увидим, давались другие определения, пригодные и для несоизмеримых величин, например определение Евдокса, которым

*) Например, вдвое большим, или третьей частью, или двумя третями.

пользуется Евклид в книге V «Начал» (V, определение 5). Напротив, в книге VII Евклид оставил старое определение VII, 20, очевидно, вследствие того, что в противном случае всю книгу пришлось бы переработать и приспособить к новому определению. Таким образом, книга VII не более поздняя переработка, а просто обломок древней математики.

В пользу этого говорит и то, что книга VII представляет собой законченное целое и не имеет, как другие книги, следов более поздней переработки. Способ выражения в книге VII также оставляет впечатление чего-то архаического, например в определении 15 прибавление «и если получится число», которое для книги VII является стереотипным *).

Таким образом, мы пришли к важному результату: *книга VII представляет собой элементарный учебник теории чисел, употреблявшийся в пифагорейской школе*. То обстоятельство, что эта книга так сохранилась, объясняется не случайностью, но строгой логической структурой этого сочинения. Евклид не нашел в ней ничего, что следовало бы улучшить, а кроме того, он и не мог ничего изменить, не нарушив всего строения и не переделав ее заново, так совершенна была вся структура этой книги.

Книга VII содержит несколько предложений о простых числах, но в ней нет предложения о том, что каждое число или является простым, или единственным способом может быть представлено в виде произведения простых чисел, предложения, которое играет такую большую роль в нашей современной элементарной теории чисел. Теория общего наибольшего делителя и общего наименьшего кратного, как и определение взаимно простых чисел, выводится без применения разложения на простые множители. Вся структура покоится на «алгоритме Евклида» для определения общего наибольшего делителя с помощью последовательных делений. Ударение делается не столько на свойствах делимости чисел, сколько на теории отношений и на приведении данного отношения к наименьшим числам.

Вероятно, поводом к построению этой теории были *вычисления с дробями*. В официальной греческой математике до Архимеда дроби не встречаются, но в торговой и инженерной практике они, конечно, употреблялись. Основанием для изгнания дробей из теории была теоретическая *неделимость единицы*. Платон говорит в «Государстве» (525 E): «Если ты захочешь делить единицу, то ученые математики высмеют тебя и не позволят это сделать; если же ты размениваешь единицу на мелкие деньги, они полагают ее обращенной во множество и остерегаются рассматривать единицу не как единое, но состоящее из многих частей». Теон Смирнский

*) Последняя фраза отсутствует в немецком и английском изданиях (Прим. перев.).

Решением, естественно, будет

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) - s}{n-2}.$$

Неопифагореец Ямвлих, приписывающий это решение древнему пифагорейцу Тимариду, показывает далее, каким образом к виду (1) можно также приводить системы вида

$$x + y = \alpha (z + u),$$

$$x + z = \beta (u + y),$$

$$x + u = \gamma (y + z).$$

Отсюда мы видим, что пифагорейцы, как и вавилоняне, занимались решением систем уравнений более чем с одним неизвестным.

Геометрия

Таннери обратил внимание на одно замечательное место в Ямвлиховом «Жизнеописании Пифагора», где мы читаем:

«Вот как пифагорейцы объясняют, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги пифагорейской общины. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги при помощи геометрии — и геометрия получила название «Предание Пифагора».

В пояснение к этому Таннери (*La géométrie grecque*, стр. 81) напоминает о том, что у пифагорейцев существовала общность имущества. Таннери не очень верит тому, что первоначально математическая наука была тайной (я этому верю), но полагает (и вполне правильно), что приведенная легенда может содержать некое зерно истины. Действительно, около середины 5-го века было вполне возможно зарабатывать деньги наукой, даже царил в некотором смысле голод на образование. Софисты, «учителя мудрости», оплачивались очень высоко; богатые считали честью отдать своих сыновей в науку лучшим и самым славным софистам. Следовательно, вполне возможно, что пифагорейцы победнее могли таким образом стараться повысить свои доходы.

Последняя фраза приведенного фрагмента указывает, что существовал некоторый учебник геометрии под названием «Предание Пифагора», нечто вроде записанного курса, при помощи которого пифагорейцы зарабатывали деньги. Этим также объясняется и то, что позднейшие писатели приписывали Пифагору все геометрические открытия, хотя некоторые из них (например, иррациональность) были, весьма вероятно, найдены позже. Для этого достаточно только согласиться, что все это могло находиться в «Предании Пифагора».

Таннери предполагает еще, что именно из этой книги были заимствованы сообщения Евдема о пифагорейской геометрии. Согласно Евдему, пифагорейцы открыли предложение о том, что в каждом треугольнике сумма углов равняется двум прямым и доказывали его следующим образом (рис. 55):

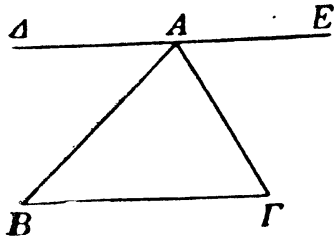


Рис. 55.

«Пусть АВГ будет треугольник. Проведем через А прямую ΔЕ, параллельную ВГ. Так как ВГ и ΔЕ параллельны, то накрест лежащие углы равны; следовательно, угол ΔАВ равен углу АВГ и ЕАГ равен АГВ. Прибавим с обеих сторон угол ВАГ. Тогда углы ΔАГ, ВАГ и ГАЕ, составляющие вместе два прямых угла, должны равняться сумме трех углов треугольника. Следовательно, сумма углов треугольника равна двум прямым. Так доказывали пифагорейцы». (Прокл, Комментарий к Евклиду I, 32).

Отсюда мы видим, что геометрия пифагорейцев была построена логически и что, кроме теоремы о сумме углов треугольника, они знали и теорему о равенстве накрест лежащих углов у параллельных.

Вероятно, пифагорейцы имели также теорию правильных многоугольников. Во всяком случае они знали звездчатый пятиугольник и додекаэдр; кроме того, им было известно, что только три правильных многоугольника могут своими углами заполнить плоскость вокруг точки, а именно треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Вероятно, эта теорема стояла в связи с исследованиями правильных многоугольников.

Вспомним, что Плутарх, говоря о двустииши: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую фигуру, за которую он принес в жертву быка», сомневался, идет ли в ней речь о гипотенузе, или о приложении площадей, или же, наконец, о задаче «построить фигуру, равную другой и подобную третьей». Мне кажется вероятным, что эти три вещи собраны вместе не случайно, но что Плутарх или его источник взяли эти три важных предложения из «Предания Пифагора». Они ведь и действительно непосредственно связаны друг с другом. Начнем с последнего.

Общая задача о построении многоугольника, подобного заданному и равновеликого другому, может быть сведена к частному случаю: построить квадрат, равный данному прямоугольнику («Начала» II, 14). Это сводится к построению средней пропорциональной между основанием и высотой прямоугольника. Построение средней пропорциональной $x = \sqrt{ab}$ при помощи полукруга (рис. 56) дважды применяется Архитом в качестве вспомогательного построения при решении задачи об удвоении куба, о чем мы будем говорить ниже. Это построение, как мы сейчас увидим,

необходимо также в качестве вспомогательного средства и для «приложения площадей», которое, по Евдему, было открытием пифагорейцев.

Доказательство предложения $x^2 = ab$ идет у Евклида так:

$$x^2 = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s) = ab.$$

Как видно, здесь применяется «теорема Пифагора»:

$$r^2 = x^2 + s^2.$$

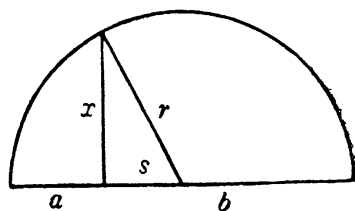


Рис. 56.

Полагаю, что это доказательство заимствовано из «Предания Пифагора».

Но что подразумевает Плутарх под «приложением площадей»? Эту в высшей степени важную тему следует рассмотреть особо.

«Геометрическая алгебра»

Раскрыв II книгу «Начал», мы найдем ряд предложений, которые представляют собой не более как геометрические формулировки алгебраических правил. Таково например, предложение II, 1 (рис. 57):

«Если одна из двух линий разделена на произвольное число частей, то прямоугольник между этими линиями равен вместе взятым прямоугольникам, содержащимся между неразделенной линией и отдельными частями другой», которое соответствует формуле

$$a(b + c + \dots) = ab + ac + \dots$$

Предложения II,2 и II,3 представляют ее частные случаи. Предложение II,4 соответствует формуле

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

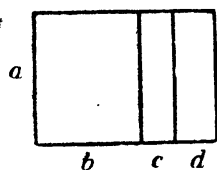


Рис. 57.

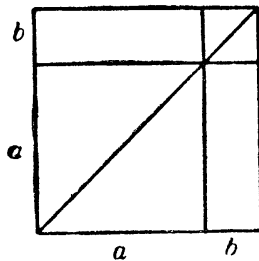


Рис. 58.

Доказательство непосредственно следует из чертежа (рис. 58). В предложении II,7 можно узнать подобную же формулу для $(a - b)^2$. Перед нами нечто вроде первых страниц нашего учебника алгебры, но только в геометрической форме. Рассматриваемые величины всегда представляют отрезки прямых, вместо «произведения ab » говорится «прямоугольник, содержащийся между a и b », а вместо a^2 — «квадрат на a ».

В связи с этим Цейтен говорит с полным правом о «геометрической алгебре». Повсюду в греческой математике встречаются

многочисленные применения этой алгебры. Ход мысли всегда алгебраический, формулировка — геометрическая. На этом методе основывается большая часть учения о правильных многоугольниках и многогранниках и вся теория конических сечений целиком. В 4-м веке Теэтет, а в 3-м веке Архимед и Аполлоний были истинными виртуозами по этой части.

Как мы сейчас выясним, геометрическая алгебра представляет собой продолжение вавилонской алгебры. Вавилоняне тоже называли произведение $xу$ «прямоугольником», а вторую степень x^2 «квадратом», но они наряду с этим, и даже как бы не отличая одно от другого, употребляли и арифметические выражения, как умножение, извлечение корня и т. д. Греки совершенно избегали таких выражений, за исключением лишь действий с целыми числами и простыми дробями: они все переводили на геометрическую терминологию. Но так как это действительно просто перевод, а мысль идет алгебраически, то мы можем, не опасаясь исказить ход мыслей древних, давать выводы на языке алгебры и пользоваться нашими современными обозначениями. Поэтому в дальнейшем такие выражения, как «квадрат на a », «прямоугольник, содержащийся между a и b », мы будем просто передавать с помощью современной символики в виде a^2 и ab , если это упрощает изложение. Точно так же мы будем записывать и пропорции в современных обозначениях, например

$$a^2 : ab = a : b.$$

Для нашей цели нет надобности в обозначениях, введенных Дейкстергейсом: $O(a, b)$, $T(a)$ и $\Lambda(a, b)$ вместо ab , a^2 и $a : b$; однако мы должны остерегаться *употреблять такие алгебраические преобразования, которые не могут быть немедленно переформулированы в греческих терминах*. Например, Кантор*) из непрерывной пропорции

$$a : x = x : y = y : b$$

выводит

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

а затем

$$x^4 = a^2y^2 = a^2bx,$$

так что

$$x^3 = a^2b.$$

*) M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. 1, 3 или 4 изд., стр. 213.

Это не соответствует греческому образу мыслей, ибо можно еще выразить геометрически x^3 , скажем, в виде объема куба, но x^4 уже нельзя. Из непрерывной пропорции мы можем вывести:

$$x^2 = ay, \quad xy = ab,$$

затем

$$x^3 = axy = a^2b$$

и, далее,

$$a^3 : x^3 = a^3 : a^2b = a : b.$$

Словесно это выражается так: *Если x и y суть две средние пропорциональные между a и b , то куб на a относится к кубу на x , как a к b .*

После этого отступления мы снова возвращаемся к геометрической алгебре книги II. В качестве следующей формулы нам следовало бы ожидать:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (1)$$

или, так как Евклид избегает вычитания площадей,

$$a^2 = (a - b)(a + b) + b^2. \quad (2)$$

Действительно, она имеется но в замечательной двойственной форме. Предложения II, 5 и 6 гласят (рис. 59 и 60):

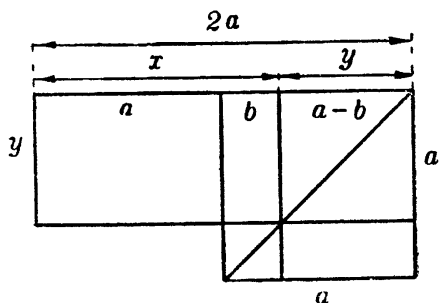


Рис. 59.

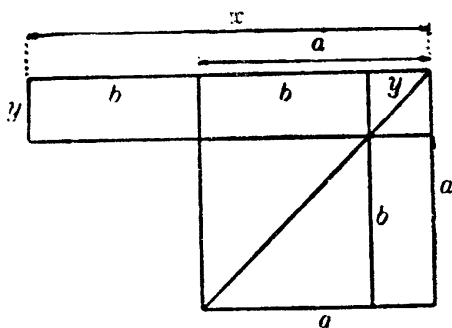


Рис. 60.

II, 5. *Если прямая линия разделена на равные и неравные части, то прямоугольник, содержащийся между неравными частями всей прямой, вместе с квадратом отрезка между точками деления равен квадрату на половине прямой.*

II, 6. *Если прямая линия разделена пополам и к ней по той же прямой прибавлен отрезок, то прямоугольник, содержащийся между всей прямой, вместе с прибавленным к ней отрезком, и самим этим отрезком, сложенный с квадратом на половине, равен квадрату на прямой, составленной из половины и прибавленного отрезка.*

Если в предложении II,5 обозначим заданную прямую через $2a$, а отрезок между точками деления — через b , то II,5 выразится при помощи формулы (2). Но при помощи той же самой формулы можно выразить и II,6, если заданную прямую обозначить через $2b$, а ее половину вместе с прибавленным отрезком — через a . Если смысл обоих предложений заключается только в том, чтобы представить формулу (2) в геометрическом одеянии и доказать ее, то к чему тогда два предложения для одной и той же формулы?

Подойдем к этому с другой стороны. Обозначим через x и y два неравных отрезка, на которые разделена прямая $2a$ в предложении II,5. Тогда II,5 выразится формулой

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2, \quad (3)$$

или

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy. \quad (4)$$

Но если обозначить через x сумму данной в II,6 прямой вместе с ее продолжением, а через y само продолжение, то предложение II,6 приводится к той же формуле (3).

Доказательство в обоих случаях одно и то же: разность между квадратами на a и b представляет «гномон» (плотничий угольник), который может быть преобразован в прямоугольник xy , если отнять его правый прямоугольник (в первом случае ay , во втором by) и приставить его опять слева.

Таким образом, снова получаются два предложения для одной формулы. Почему? Каков был ход мысли человека, который так формулировал оба эти предложения?

Мы найдем ответ, если посмотрим, как предложения II,5 и II,6 применяются в самих «Началах» и в других трудах Евклида. В «Данных» (предложения 84 и 85) речь идет о том, чтобы доказать, что два отрезка x и y известны, если даны их сумма $x+y$, или разность $x-y$, и, кроме того, площадь xy прямоугольника, построенного на этих прямых. Если дана сумма $x+y=2a$, то применяется II,5 и находится полуразность $\frac{1}{2}(x-y)=b$; если же дана разность, то применяется II,6 и по формуле (3) находится полусумма.

Таким образом, мы видим, что II, 5 и II, 6 представляют собой, в сущности, не предложения, но *решения задач*; в II,5 дело идет о построении двух отрезков x и y , сумма и произведение которых даны, в то время как в II, 6 даны их разность и произведение.

Этому соответствуют также применения этих предложений в самих «Началах». В предложении II,11 нужно разделить линию a в крайнем и среднем отношениях. На языке геометрической алгебры задача формулируется так: «Заданную прямую разде-

лить таким образом, чтобы прямоугольник, построенный на всей прямой и одной из частей, равнялся квадрату на другой части». Это приводит к уравнению

$$y^2 = a(a - y),$$

т. е.

$$y^2 + ay = a^2$$

или

$$y(y + a) = a^2. \quad (5)$$

Итак, нужно найти два отрезка y и $y + a$, для которых даны разность a и произведение a^2 . Поскольку дана разность, задача решается при помощи II,6.

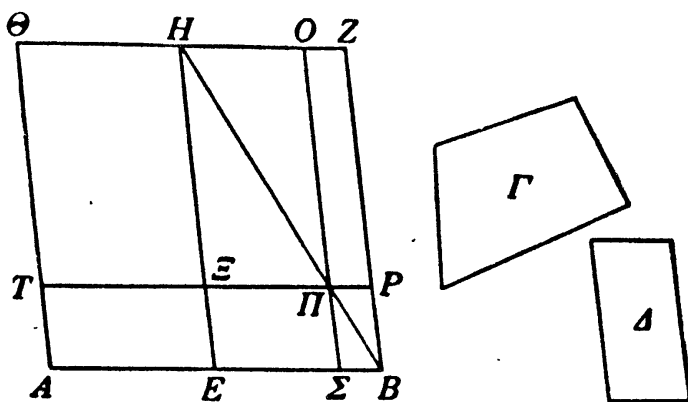


Рис. 61.

Толкование II,5 и II,6 как способов решения задач становится совершенно достоверным при помощи обобщений VI,28 и VI, 29, которые уже совершенно явно формулируются как задачи (рис. 61 и 62).

VI,28. К заданной прямой АВ приложить параллелограмм (АП), равный данной прямолинейной фигуре Γ, с недостатком в виде параллелограмма (ВΠ), подобного заданному параллелограмму Δ.

VI,29. К заданной прямой АВ приложить параллелограмм (АΕ), равный заданной прямолинейной фигуре Γ, с избытком в виде параллелограмма, подобного заданному параллелограмму Δ.

Чертежи поясняют поставленные задачи. В предложении VI,28 нужно построить параллелограмм АΠ (у Евклида параллелограммы обозначаются по двум противолежащим вершинам), равный заданному многоугольнику Γ, причем на данной прямой недостающий параллелограмм ВΠ должен быть подобен заданному параллелограмму Δ.

Аналогично и в случае VI, 29.

Дефект и эксцесс, т. е. недостающий и избыточный параллелограммы заданной формы, называются по-гречески Elleipsis и Hyperbolé, тогда как *приложение* параллелограмма данной площади к данному прямолинейному отрезку называется Parabolè. Об истории этих приложений Прокл в своем комментарии к «Началам» Евклида, I, 14, рассказывает:

«Эти вещи, как говорит перипатетик Евдем, открыты пифагорейской музыкой, а именно приложение (parabolè) площадей с недостатком (elleipsis) или избытком (hyperbolé). Позднее эти названия были перенесены и на три конических сечения»*).

Решение задач (6) и (7) играет чрезвычайно важную роль в греческой математике. Мы уже сказали, что они дважды рассматриваются в «Началах» и один раз в «Данных». Точно так же в книге X, в теории иррациональных отрезков, одно из важных построений (X, 33—35) основывается на эллиптическом приложении площадей.

Когда грекам нужно было решать квадратные уравнения, они приводили их к одной из следующих форм:

$$x(x+a) = F,$$

$$x(a-x) = F,$$

$$x(x-a) = F,$$

и решали их при помощи приложения площадей. В первом и третьем случаях имелись два прямолинейных отрезка x и $x \pm a$, разность и произведение которых были заданы, т. е. применялось приложение с избыточным квадратом; во втором случае имелись два прямолинейных отрезка x и $a-x$, сумма и произведение которых были заданы, т. е. применялось приложение с недостаточным квадратом. Если перед членом с x^2 стоял еще множитель $\gamma = p:q$,

$$\gamma x^2 + xa = F,$$

$$ax - \gamma x^2 = F,$$

$$\gamma x^2 - ax = F,$$

то применялись более общие приложения VI, 28 и VI, 29 с избытком и недостатком заданной формы (например, прямоугольной).

Таким образом, согласно Евдему, значительная часть геометрической алгебры представляет изобретение пифагорейцев. Однако вследствие того, что в обоих приложениях — как с избытком, так и недостатком — необходимо превращать заданную площадь в квадрат (ибо надо извлекать квадратный корень), пифагорейцы должны были знать и предложение II, 14, решающее эту задачу при помощи теоремы Пифагора.

*) О связи «приложений» с коническими сечениями будет рассказано ниже (в разделе об Аполлонии).

Встречается еще один случай, когда одна и та же формула выражается в двух предложениях. Эти два предложения по своей формулировке вполне аналогичны II, 5 и II, 6:

II, 9. *Если прямая линия разделена на равные и неравные части, то квадраты на неравных частях, вместе взятые, вдвое больше квадратов на половине прямой и на отрезке между точками деления, взятых вместе.*

II, 10. *Если прямая линия разделена пополам и к ней по прямой добавлен отрезок, то квадрат на всей линии вместе с добавленным отрезком, взятый вместе с квадратом на добавленном отрезке, будет вдвое больше квадрата на половине прямой вместе с квадратом на прямой, состоящей из половины первоначальной прямой и прибавленного отрезка.*

Оба предложения приводят к формуле

$$x^2 + y^2 = 2 \left\{ \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 + \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right\}.$$

И опять оба они могут рассматриваться как решения задач. Для II, 9 задача гласит: даны $x+y$ и x^2+y^2 , ищутся x и y . Для II, 10: даны $x-y$ и x^2+y^2 , ищутся x и y . Таким образом, речь снова идет о решении систем уравнений

$$x+y=s, \quad x^2+y^2=F, \quad (8)$$

$$x-y=d, \quad x^2+y^2=F. \quad (9)$$

Решение этих систем при помощи II, 9 и II, 10 полностью совпадает с вавилонским решением

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{F}{2} - \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{F}{2} - \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (10)$$

и соответственно

$$x = \sqrt{\frac{F}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d}{2}, \quad y = \sqrt{\frac{F}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2}. \quad (11)$$

Для доказательства искусно применяется «теорема Пифагора».

То обстоятельство, что все четыре нормальные формы парных уравнений, которые мы встречали в клинописных текстах, приняты Евклидом вместе с их решениями, доказывает, что геометрическая алгебра книги II происходит по прямой линии от вавилонской алгебры. *Пифагорейцы, очевидно, геометрически формулировали и доказали вавилонские правила для решения этих систем.*

Заметим еще, что простое линейное уравнение

$$ax = F$$

в геометрической формулировке сводится к простому приложению площади к заданной прямой без избытка или недостатка. Простое квадратное уравнение $x^2 = F$ сводится к преобразованию заданной

площади в квадрат (II, 14). Кубическое уравнение $x^3 = V$ в геометрической формулировке приводит к построению куба заданного объема. И этими задачами также занимались древние; частным случаем является знаменитое «удвоение куба», к которому мы еще вернемся.

Смешанные кубические уравнения

$$x^2(x+1)=V \text{ и } x^2(x-1)=V$$

решались вавилонянами при помощи таблиц, и числа, помещенные в этих таблицах, суть как раз специальные «объемные числа» $n^2(n \pm 1)$, которые Никомах называет «Arithmoi parametepipedoi»^{*)}.

Таким образом, мы видим, что все без исключения вавилонские нормальные уравнения оставили свой след в арифметике и в геометрии пифагорейцев. Не может быть и речи о том, что это только случайность. То, о чем раньше можно было только предполагать, ныне сделалось достоверностью, а именно, что вавилонская традиция дала материал, из которого греки, и в частности пифагорейцы, построили свою математику.

Почему появилась геометрическая формулировка?

[Что же помешало грекам попросту принять вавилонскую алгебру, вместо того чтобы облекать ее в геометрическую форму? Почему они были до такой степени привержены ко всему осязаемому и зримому, что, совершенно отвернувшись от чисел, занялись исключительно фигурами?

Бесспорно, что чувство восхищения тем, что можно было видеть, являлось у греков основной движущей силой. Изображенная на рис. 63 скульптура, а также многочисленные другие бессмертные произведения искусства, показывают это с полной ясностью. Кроме того, имеется еще много и других свидетельств в чудесных по своей живости гомеровских описаниях и в платоновых картинах образах пещеры.

Но все-таки этого еще недостаточно для того, чтобы можно было полностью исключить алгебру. Мы должны помнить, что, по надежному свидетельству Евдема, именно пифагорейцы заложили основания геометрической алгебры. Но ведь для пифагорейцев числа были «неколебимым основанием всей вселенной», мир был создан «в подражание числам», а небеса были для них «числовой гармонией». И, как говорит Аристотель («Метафизика», I, 5), эти взгляды сформировались у них именно по той причине, что они занимались математикой. Неужели же эти поклонники чисел решали квадратные уравнения не в числах, но обязательно при

^{*)} См. O. Becker, Quellen u. Studien [B] 4 (1938), стр. 181.

помощи отрезков и площадей, только из-за своей влюбленности в зримое? Поверить этому трудно; должна существовать какая-то иная причина для геометризации алгебры.

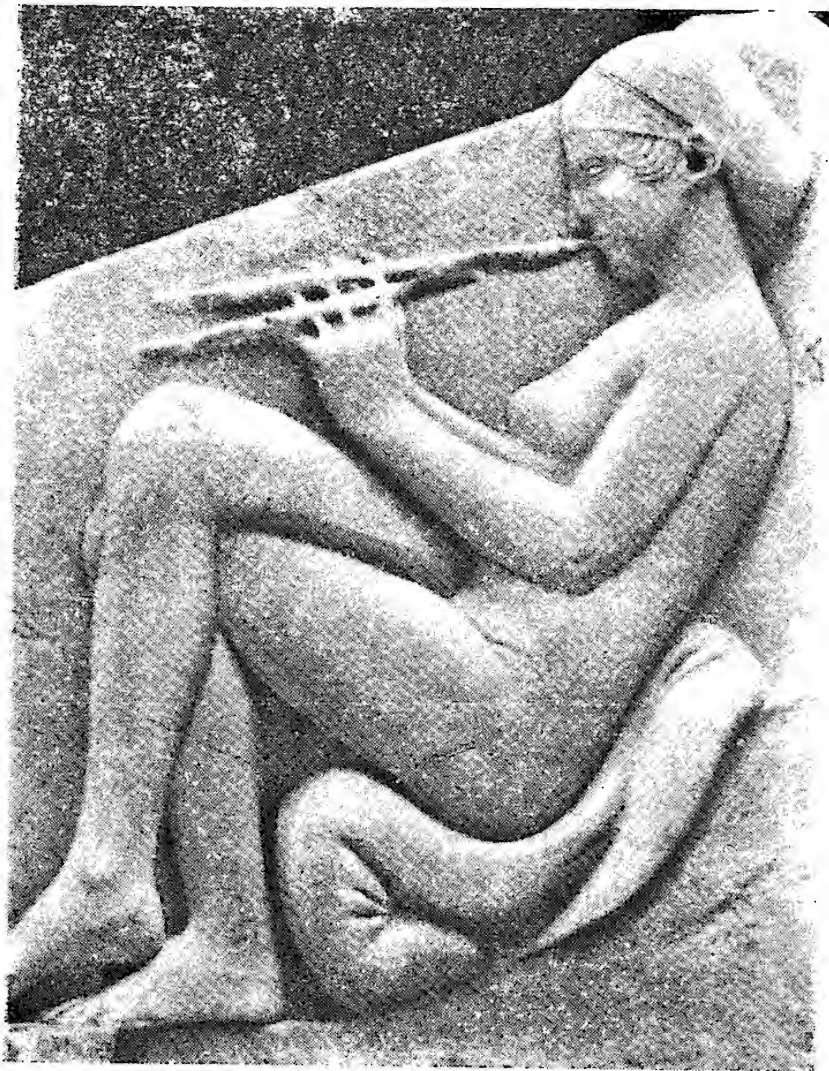


Рис. 63. Флейтистка с так называемого «трона Венеры». Греческая скульптура начала 5-го века. (Рим, Национальный Музей у Терм.)

В самом деле, найти эту причину нетрудно: это было открытие иррациональности, которое, как говорит нам Панин, действительно, было сделано в пифагорейской школе. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Но ведь это значит, что при выборе стороны квадрата в качестве единицы длины диагональ его не может быть измерена; ее длина не может быть выражена не только целым числом, но даже и дробью.

Мы в настоящее время говорим, что длина диагонали выражается «иррациональным числом» $\sqrt{2}$, и чувствуем свое превосходство над бедными греками, которые «не знали, что такое иррациональные числа». Однако греки знали очень хорошо иррациональные отношения. Как мы увидим далее, они имели очень ясное представление об отношении диагонали к стороне квадрата и были в состоянии совершенно безукоризненно доказать, что это отношение не может быть выражено в целых числах. И если они не рассматривали $\sqrt{2}$ как число, то это было результатом не их неведения, но только того, что они строго держались своего определения числа. «Arithmos» обозначает количество, а следовательно, и целое число. Логическая строгость не позволяла им допускать даже дробей, и они заменяли их отношением целых чисел.

Для вавилонян же каждый отрезок и каждая площадь представляли собой просто-напросто число. Они даже и не задумывались, когда приходилось площадь прямоугольника сложить с его основанием. Когда они не могли точно извлечь квадратный корень, то спокойно удовлетворялись приближением. Инженеры и естествоиспытатели во все времена поступали точно так же. Но для греков имело значение точное знание, «диагональ в самой своей сущности», как выражает это Платон, а не допустимое приближенное значение.

Уравнение $x^2 = 2$ не может быть разрешено ни в области целых чисел, ни даже в области отношений чисел. Но оно вполне разрешимо в области прямолинейных отрезков: действительно, его решением является диагональ квадрата со стороной, равной единице. Следовательно, для того чтобы получить точное решение квадратного уравнения, нам надлежит из области чисел перейти в область геометрических величин. Геометрическая алгебра приложима также и к иррациональным отрезкам и тем не менее является точной наукой. Следовательно, не только наслаждение зримым, но и логическая необходимость заставила пифагорейцев преобразовать их алгебру в геометрическую форму] *).

Боковые и диагональные числа

Платон в «Государстве» (546 С) называет число 7 «рациональной диагональю», соответствующей стороне 5. В пояснение к этому Прокл дает следующее определение «боковых и диагональных чисел», которое он приписывает пифагорейцам и с которым мы также встречаемся у Теона Смирнского**) и у Ямвлиха.

*) Этот раздел добавлен автором в английском и немецком изданиях книги. (Прим. перев.)

**) *Expositio rerum math. ad legendum Platonem* (E. Hiller), стр. 43—44.

«Единица, как начало всех чисел, в потенции является и стороной, и диагональю. В таком случае возьмем две единицы: одна будет боковой, а другая — диагональной. Теперь образуем новую сторону, прибавив к единице-стороне единицу-диагональ, и новую диагональ, прибавив к единице-диагонали дважды единицу-сторону».

Таким образом, получается боковое число 2 и диагональное число 3. После этого с полученными числами поступают подобным же образом:

$$2 + 3 = 5, \quad 2 \times 2 + 3 = 7$$

и т. д., следуя формуле

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n. \quad (1)$$

Название боковых и диагональных чисел объясняется тем, что отношение $a_n : d_n$ представляет приближенное значение отношения стороны квадрата к его диагонали. Это вытекает из тождества

$$d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1, \quad (2)$$

которое согласно Проклу *) доказывается при помощи предложения II,10. Действительно, предложение II,10 «Начал» Евклида, которое выше мы привели дословно, может быть алгебраически записано следующей формулой:

$$(2a + d)^2 + d^2 = 2a^2 + 2(a + d)^2.$$

Если теперь положить $d^2 = 2a^2 \pm 1$, то, вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$(2a + d)^2 = 2(a + d)^2 \mp 1.$$

Таким образом, если (2) справедливо для некоторого значения n , то оно будет также справедливо и для $n + 1$, но при этом знак меняется на обратный. Но (2) справедливо для $n = 1$ если $a_1 = d_1 = 1$, следовательно, оно будет справедливо и для $n = 2$ и т. д.

Отсюда мы видим, что пифагорейцы, в сущности, знали принцип полной индукции и что они применяли геометрическую алгебру к задачам из теории чисел.

Но как они пришли к рекуррентным формулам (1)? Полагаю, что это произошло следующим образом.

Для определения общей наибольшей меры двух взаимноизмеримых величин a и b греческая математика знает способ попеременного вычитания (*antanairesis*): меньшую величину, например a , вычитают из большей, так что получаются две новые величины a и $b - a$, затем снова меньшую вычитают из большей и т. д. Если существует общая мера, то этот процесс неизбежно приведет

*) Комментарий к «Государству» Платона, II, главы 23 и 27.

к двум равным величинам $c = d$, каждая из которых и есть общая наибольшая мера. В VII книге «Начал» этот метод применяется для нахождения общего наибольшего делителя чисел, а в начале книги X — для произвольных величин, чтобы установить, имеется ли у них общая мера и если да, то какова она. Однако, если применить этот способ к двум несоизмеримым величинам, то процесс становится бесконечным.

Если, например, a есть сторона, а b — диагональ квадрата, то a можно один раз отнять от b (рис. 64). Остаток $b - a = AD = DE = EB = a'$ можно снова отнять от $a = AB$; в остатке получится $b' = AE$. Теперь a' и b' опять представляют сторону и диагональ меньшего квадрата, и из

$$b' = a - a', \quad a' = b - a \quad (3)$$

следует:

$$a = a' + b', \quad b = 2a' + b'. \quad (4)$$

Формулы (4) уже имеют тот же вид, что рекуррентные формулы (1). Если мы продолжим процесс повторяющегося вычитания, то опять получим еще меньшую сторону и диагональ, a'' и b'' . Если мы дойдем до того, что разность между a''' и b''' станет чрезвычайно малой, и остановимся на приближении $a''' = b'''$, выбрав a''' в качестве единицы длины, тогда a'' и b'' , a' и b' , наконец, a и b по формуле (4) будут представлены в виде ряда последовательных боковых и диагональных чисел.

Задача о получении в рациональных числах приближенного значения для отношения диагонали квадрата к его стороне была поставлена и решена вавилонянами. Но для этой старой проблемы пифагорейцы сделали бесконечно больше, чем вавилоняне. Они нашли целый ряд приближений неограниченно возрастающей точности, а кроме того, создали научную теорию этих приближений и доказали общее предположение (2) при помощи полной индукции. Снова и снова мы видим, какие великолепные теоретики в области чисел были в пифагорейской школе.

Посмотрим теперь, что делалось за пределами этой школы.

АНАКСАГОР ИЗ КЛАЗОМЕН

был известен преимущественно как натурфилософ. Он пользовался большим уважением в Афинах; Перикл был его учеником и находился с ним в тесных дружеских отношениях. Незадолго перед Пелопоннесской войной, когда популярность Перикла упала, его политические противники, вероятно, чтобы

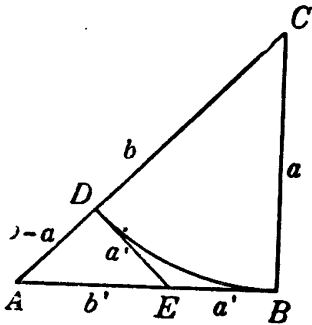


Рис. 64.

досадить ему, обвинили Анаксагора в безбожии, ибо по его учению Солнце и звезды были мертвыми пламенеющими камнями. Анаксагор был осужден и должен был покинуть Афины.

Анаксагор учил, что Луна получает свой свет от Солнца и дал правильное объяснение солнечных и лунных затмений. Он дал оценку и величине Солнца: именно, он сказал, что Солнце гораздо больше Пелопоннеса.

Таким образом, заслуги Анаксагора как астронома несомненны, но вместе с тем его влияние на развитие астрономии было не вполне благоприятным. Это объясняется главным образом тем, что он представлял себе небесные светила как мертвые, неодушевленные предметы, которые движутся не по математическим законам, но увлекаются вихревым движением эфира. Он рассуждал следующим образом: планеты и, прежде всего, Луна, находящиеся ближе к Земле, увлекаются вихрем медленнее, чем неподвижные звезды; вследствие этого они в дневном обращении и отстают от звезд. Но как же получается, что, например, Солнце и Луна не перемещаются, как неподвижные звезды, по параллельным экватору кругам, а удаляются от экватора иногда к северу, иногда к югу, возвращаются и снова приближаются к экватору? Анаксагор и для этого имел механистическое объяснение (И п п о л и т, *Refutatio*, I, 8):

«Солнце и Луна постоянно возвращаются потому, что они на севере отталкиваются назад холодным воздухом. Луна возвращается чаще, потому что она не может совладать с холодным воздухом».

[Компилятор Аэций объясняет это «отталкивание» подробнее: «Солнцевороты происходят оттого, что Солнце отталкивается северным воздухом, который сжимается Солнцем и от уплотнения делается сильнее». Очевидно, следовало представлять, что холодная Луна не была в состоянии размягчить воздух и поэтому отталкивалась чаще, в то время как Солнце могло своей собственной теплотой делать воздух теплее и мягче.

Как видно, движение Солнца и Луны в данном случае разлагалось на две составляющие, из которых одна была перпендикулярна к экватору, а другая параллельна ему. Кинематически такое разложение вполне допустимо, но астрономически оно совершенно бесплодно. Для этих двух составляющих движений давались два совершенно различных объяснения: одно движение объяснялось круговым обращением эфира, а другое — сопротивлением северного воздуха. Поэтому чистой случайностью казалось то обстоятельство, что Солнце по истечении года возвращается не только к тому же самому тропику, но и к тому же созвездию (это же можно было сказать и относительно Луны по истечении сидерического месяца), а кроме того, что оба эти светила, равно как и планеты, всегда находятся в пределах зодиака.

Более поздние астрономы совершенно естественно объясняли солнцевороты при помощи собственного движения Солнца (а также и Луны) по зодиаку с запада на восток в направлении, противоположном суточному движению неподвижных звезд. Нельзя допустить, что это движение по зодиаку было Анаксагору неизвестно; ведь наклон эклиптики, по преданию, был известен уже Анаксимандру, Клеострату и Энопиду. Однако Анаксагор не мог воспользоваться этим объяснением: принятая им система вынуждала его рассматривать движение по зодиаку как случайное событие.

Но если движение Солнца, Луны и планет по эклиптике (или в ее непосредственной близости) не рассматривается как основной факт, то тем самым закрывается путь к построению какой бы то ни было научной астрономии. Любая астрономия солнечной системы должна начинаться с разложения движения всех небесных тел на общее им всем суточное движение параллельно экватору и на другое, противоположно ему направленное, движение по зодиаку. Астрономические же воззрения Анаксагора, наоборот, заводят в тупик.

В данном случае дело идет не о каком-нибудь случайном несовершенстве системы Анаксагора, которое, как можно думать, в дальнейшем удалось бы устранить при помощи видоизменения его гипотез, но о принципиальном отказе от всех механических теорий, которые хотели объяснить небесные явления при помощи вихревых движений, давлений и ударов. Если планеты являются только мертвыми камнями, уносимыми круговращением вселенной и бросаемыми туда и сюда какими-нибудь течениями, то как же могла бы возникнуть какая-нибудь математическая закономерность их движений? Таким образом, Демокриту, исходившему из таких же механистических основных положений, не осталось ничего другого, как утверждать, что планеты движутся не противоположно неподвижным звездам, но так же, как и эти звезды, с востока на запад, только немного медленнее, потому что они ближе к Земле. Такие воззрения встречаются еще и в дидактической поэме Лукреция «О природе вещей».

Материалистические взгляды Анаксагора и атомистов в рассматриваемую эпоху Просвещения были очень популярны. В 10-й книге «Законов» Платон выставляет тяжелое обвинение против «новых учителей мудрости», виновных во всем зле безбожия. Афинянин, устами которого говорит Платон, выражается так: «Когда мы, стремясь получить доказательства существования богов, ссылаемся на Солнце, Луну, звезды и Землю как на божественные существа, то ученики этих новых мудрецов возражают нам, что все это ведь только земля и камни и совершенно не в состоянии заботиться о людских делах». Ведущих такие речи и в высшей степени опасных людей очень много. «Какой же вред для семьи и государства получается из таких настроений у молодежи!»—

восклицает честный спартаец Клиний. Но афинянин может привести целый ряд доводов в пользу того, что Солнце и остальные светила суть вечные, одушевленные, одаренные разумом существа, а следовательно, и боги. «В настоящее время»,—говорит он в 11-й книге,—«дело обстоит совершенно противоположно тому, как было раньше, когда такие ученые рассматривали светила как что-то неодушевленное. Теперь мы знаем, что светила движутся по кругам согласно разумным законам. Истинная наука, исследуя эти законы, приводит людей не к безбожию, а, наоборот, к познанию божественного».

Астрономия, которую здесь защищает Платон, является пифагорейской. Представители этой школы всегда держались мнения, что небесные светила суть божественные, одушевленные, живые существа, которые вследствие своей вечной божественной природы вечно одинаково выполняют совершенные круговые движения. Светила разумом познают закон своего движения и движутся сознательно, точно так же как нравственный человек не позволяет изменчивым страстям властвовать над собой, но живет сообразно требованиям разума.]*)

ДЕМОКРИТ ИЗ АБДЕРЫ

разработал воззрения Анаксагора в гораздо более материалистическом духе. Он удалил из системы Анаксагора разум (*νοῦς*), который, по воззрениям последнего, привел все в порядок и сообщил веществу вихревое движение. Демокрит оставил все на волю слепого случая, давления и толчков, и, по его теории, планеты, и больше всего Луна, отставали от звезд потому, что они были ближе к нам и, следовательно, не так сильно увлекались вихревым движением неба. В противоположность этому пифагорейцы считали, что планеты представляют собой божественные, одушевленные, живые существа, которые, обладая разумом, совершают свои вечные круговые обращения по математическим законам. Эта точка зрения оказалась для астрономии более плодотворной, ибо она побуждала людей своим собственным разумом проникнуть в сущность этих законов и определить круговые орбиты планет.

[Демокрит и совсем не пытался искать законы планетных движений, ибо в беспорядочном вихревом движении никаких

*) Помещенный в квадратных скобках конец предыдущего раздела имеется только в немецком издании. Приводим его для характеристики эволюции идей автора со времени написания им первоначального (голландского) текста своей книги (1950). Само собой разумеется, что в немецком переводе уничтожен даже помещенный ниже специальный раздел, посвященный Демокриту, имевшийся как в голландском оригинале, так и в английском переводе. (Прим. перев.)

законов не существует. Но математически упорядоченный космос познать возможно.]

В темнице Анаксагор попытался заняться квадратурой круга. К трудам Анаксагора и Демокрита в области перспективы мы вернемся позднее, когда будем говорить о стереометрии.

Астрономом пифагорейского направления, работавшим также в области математики, был

ЭНОПИД ХИОССКИЙ

По словам Прокла, он был немного моложе Анаксагора; следовательно, он, должно быть, достиг вершины своей жизни около 440 до н. э. Он известен главным образом как астроном. Согласно Евдему *), он нашел «опоясание» зодиака и «великий год». Что подразумевается под «опоясанием», не вполне ясно. Под «великим годом» Платон подразумевал большой период времени, по истечении которого все планеты возвращаются в исходное положение, т. е. общее кратное времен обращения всех планет (включая Луну и Солнце) **). Впрочем, неизвестно, совпадают ли понятия «великого года» у Энопида и Платона. Позднейшие доксграфы вроде Аэция, ставили «великий год» Энопида в один ряд с календарными периодами, как, например, 8 и 19 лет. Они утверждали, что Энопид установил «великий год» в 59 лет, а обыкновенный год — в $365\frac{22}{59}$ дня. Может быть, в этом содержится зерно истины; я этого не знаю. Вавилоняне знали период Сатурна, равный 59 годам или 2 периодам сидерического обращения, но я не знаю, какие выводы можно сделать из этого ***).

Во всяком случае сообщение Евдема доказывает, что Энопид занимался временами обращения и календарными периодами и что он точнее определил положение и разделение эклиптики. Таким образом, он принадлежал не к защитникам вихревого движения, а к направлению пифагорейцев, которые полагали, что планеты движутся по зодиаку согласно вечным законам.

По поводу известного построения для опускания перпендикуляра («Начала», I, 12) Прокл сообщает, что Энопид был первым, занимавшимся этой задачей, потому что он находил это построение полезным для астрономии. Кроме того, Прокл, ссылаясь на Евдема, утверждает, что Энопид нашел способ перенесения данного угла («Начала», I, 23).

Из этих сообщений заключали, что в эпоху Энопида геометрия находилась на самой начальной стадии своего развития, так как

*) У Теона Смирнского (изд. E. Hiller), стр. 198.

**) См. B. L. van der Waerden, *Dass grosse Jahr und die ewige Wiederkehr*, Hermes 80, (1952).

***) Фраза о вавилонянах в немецком переводе опущена. (Прим. перев.)

еще не были известны даже и такие простые построения. Это заключение кажется мне совершенно неосновательным. Напротив, рассматривая квадратуру луночек Гиппократов, который был младшим современником Энопида, мы увидим, что геометрия этого времени стояла на очень высоком уровне, судя по числу известных предложений и по требованиям, которые предъявлялись к строгости доказательства.

Я скорее склоняюсь к предположению, что до Энопида не было потребности в упомянутых построениях, что, например, прямые углы строились в полукруге на основании теоремы Фалеса или их просто чертили при помощи угольника и что впервые Энопид нашел указанные построения ради их применения к астрономии.

КВАДРАТУРА КРУГА

[Мы уже упомянули, что, томясь в темнице, Анаксагор занимался квадратурой круга. Вообще эта задача к концу 5-го века стала очень популярной. Автор комедий поэт Аристофан даже шутил на эту тему. В своей комедии «Птицы» он выводит астронома Метона, который держит такую речь:

Возьму линейку, проведу прямую,
И мигом круг квадратом обернется,
Посередине рынок мы устроим,
А от него уж улицы пойдут —
Ну, как на Солнце! хоть оно само
И круглое, а ведь лучи прямые!...

«Поистине это сам Фалес премудрый!» — восклицает на это предводитель птиц Пейфетер и гонит Метона прочь, осыпая его тумаками.

Я думаю, ясно, каким образом здесь был «начерчен квадратный круг» при помощи двух взаимно перпендикулярных улиц, встречающихся в его центре. Но разве не удивительно, что ученая проблема была настолько общеизвестна в Афинах того времени, что из нее можно было сделать забаву для театральных зрителей.

Метонova квадратура была только шуткой. Но квадратура круга у софиста

АНТИФОНА,

не будучи, правда, точной, задумана была вполне серьезно.

Справочник позднейших времен Суда, которого обыкновенно называют Свидой *), содержит такую заметку:

*) Сuida (Suidas) — имя автора поздневизантийской эпохи, которому приписывается обширный биографический словарь. (Прим. перев.)

«Антифон, афинянин — толкователь примет, эпический поэт и софист. Его прозвали слововаром».

Согласно Ксенофону (Воспоминания о Сократе, 16), Антифон упрекал Сократа за его простой образ жизни, который только делал несчастными его и тех, кто ему подражал. По его словам, со стороны Сократа было очень неразумно излагать свои учения бесплатно.

Этот типичный представитель корпорации софистов считал, что нахождение квадратуры — совсем пустяковое дело. Его метод дошел до нас вследствие того, что Аристотель мимоходом раскрытиковал его. В «Физике» (185а) Аристотель говорит, что нет даже необходимости опровергать квадратуру круга у Антифона, поскольку она не основана на общепризнанных принципах геометрии. После этого комментаторы (Симпликий, Фемистий и Иоанн Филон) объяснили, каким образом Антифон выполнял свою квадратуру.

Он вписывал в круг какой-то многоугольник, может быть, треугольник или квадрат. Разделяя пополам дуги, соответствующие сторонам, он получал многоугольник с удвоенным числом сторон, т. е. шестиугольник или восьмиугольник. Он думал, что, продвигаясь таким путем далее, он в конце концов получит многоугольник, который благодаря крайней малости своих сторон совпадет с окружностью. Поскольку для всякого многоугольника можно построить равновеликий ему квадрат и так как полученный им многоугольник следовало считать равным кругу, то Антифон заключал, что круг можно квадрировать*).

Антифон был, конечно, совершенно прав, думая, что таким образом можно с достаточной для практики точностью квадрировать круг. Одинаково правы были и его оппоненты, говорившие, что утверждение, будто многоугольник может совпасть с кругом, противоречит основным началам геометрии.]**)

Квадратурой круга также занимался самый знаменитый геометр 5-го века

ГИППОКРАТ ХИОССКИЙ

(не смешивать с еще более знаменитым врачом Гиппократом из Коса).

Гиппократ начал свою жизнь купцом, но, если верить Аристотелю, плохим купцом, так как позволил обобрать себя в Визан-

*) См. F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphons und des Hippokrates* (Leipzig, 1907). Расхождения между рассказами трех комментаторов совершенно незначительны. Вероятно, их общим источником был Евдем.

**) Два последних раздела, заключенные нами в квадратные скобки, добавлены в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

тии плутам сборщикам налогов (или, по другим сведениям, морским разбойникам). Позднее он (вероятно, около 430 до н. э.) приехал в Афины и там сделался очень знаменитым геометром.

Как он подходил к проблеме квадратуры круга, мы можем узнать из отрывка, который Симпликий, самый ученый и надежный комментатор Аристотеля, заимствует у своего учителя Александра Афродизского *). Упомянутый Александр пишет, что Гиппократ взял сначала равнобедренный прямоугольный треугольник и доказал, что сумма площадей двух луночек, образованных двумя полукругами на сторонах прямого угла и полукругом, опи-

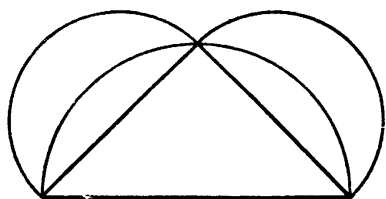


Рис. 65.

санным вокруг треугольника, равна площади этого треугольника (рис. 65). Эта квадратура двух луночек соответствует первой из трех квадратур гиппократова фрагмента, о котором мы будем сейчас говорить. После этого Гиппократ взял равнобокую трапецию, образованную диаметром круга и тремя соседними сторо-

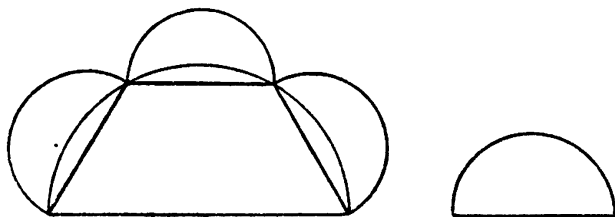


Рис. 66.

нами вписанного шестиугольника (рис. 66), и доказал, что сумма площадей полукруга на одной из сторон шестиугольника и трех луночек, образованных полукругами на трех сторонах шестиугольника и полукругом, описанным около трапеции, равна площади этой трапеции. Таким образом, если возможно квадрировать эти три луночки, то можно будет квадрировать и полукруг, а следовательно, и круг. Это привело Гиппократа к исследованию квадратур луночек, ограниченных дугами окружностей.

Способ, которым он квадрировал такие луночки, можно изучить по знаменитому отрывку, который Симпликий, как он сам говорит, слово в слово переписал из «Истории математики» Евдема с прибавлением некоторых разъяснительных указаний из Евклида. Оллмэн, Дильс и Узенер, Таннери, Рудио, Гейберг и, наконец,

*) Александр Афродизский жил около 200 н. э., а Симпликий — в 6-м веке н. э.; следовательно, он никак не мог быть учеником Александра. (Прим. перев.)

Беккер*) постарались очистить текст Евдема от добавлений Симпликия. Очищенный, таким образом, текст начинается так:

«Квадрирование луночек, которые из-за своего родства с кругом ранее считались замечательными фигурами, было впервые описано Гиппократом и его изложение было найдено вполне правильным; поэтому рассмотрим эту тему подробнее.

Сначала он рассмотрел в качестве основы первое необходимое для его цели предложение, что подобные сегменты кругов находятся друг с другом в том же самом отношении, как квадраты их оснований. Он доказал это, показав сначала, что квадраты диаметров имеют то же отношение, что и круги».

Все еще является вопросом, было ли это действительно строго доказано Гиппократом. Доказательство у Евклида, XII, 2, как мы увидим, восходит к Евдоксу, а строгое доказательство без вспомогательных средств Евдокса очень трудно себе представить. Текст продолжает:

«Ибо как относятся друг к другу круги, так относятся и подобные сегменты, потому что подобные сегменты суть такие, которые составляют ту же самую часть круга».

Что это пояснение надо приписать не Симпликию, а Гиппократу или Евдему, убедительно доказал Дейкстергейс **). Гиппократ пользуется здесь тем же самым понятием о пропорциональности, которое лежало и в основании пифагорейской теории чисел: четыре величины пропорциональны, если первая от второй является той же самой частью или кратным, как третья от четвертой. Собственно говоря, это определение применимо только к рациональным отношениям, но до строгого употребления иррациональных отношений Гиппократ еще не дошел.

«После того как он это доказал, он поставил сначала вопрос, каким образом можно будет квадрировать луночку, внешний обвод которой составляет полуокружность. Он выполнил это, описавши полукруг около прямоугольного равнобедренного треугольника и построив на основании круговой сегмент, подобный сегментам, отсеченным сторонами прямого угла. Вследствие того, что сегмент на основании равен (сумме) обоих (сегментов) на других (сторонах), и если прибавить к тому и другому ту часть треугольника, которая находится над построенным на основании сегментом, то эта луночка будет равна треугольнику. И поскольку теперь доказано, что эта луночка равна треугольнику, то ее можно квадрировать. Таким образом, он легко квадрировал луночку, приняв, что ее внешний обвод является полуокружностью».

Заметим, что эта квадратура совпадает с первой квадратурой, упомянутой Александром: в обоих случаях внешний обвод

*) B. Becker, Quellen u. Studien Gesch. Math. [B] 3, стр. 411. См., кроме того, очаровательную книжечку: F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*, Leipzig, 1907.

**) E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, I, Groningen, 1929, стр. 34.

луночки представляет половину окружности, а внутренний — четверть окружности.

«После этого он начал разбирать случай, когда (внешний) обвод был больше полукруга. Он построил трапецию, три стороны которой были равны друг другу, но квадрат четвертой, большей из двух параллельных сторон, был в три раза больше квадрата каждой из остальных. Около этой трапеции он описал круг, а на большей ее стороне — сегмент, подобный круговым сегментам, отсеченным тремя другими сторонами».

Квадратуру этой луночки Евдем предоставляет читателю. Эта луночка, очевидно, будет равна трапеции: доказательство вполне аналогично предыдущему случаю.

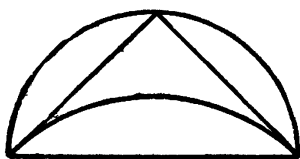


Рис. 67.

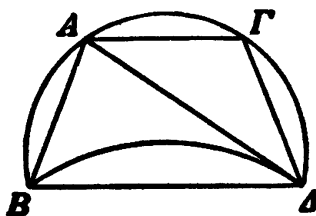


Рис. 68.

«А что упомянутый сегмент будет больше полукруга, станет ясно, если мы проведем диагональ трапеции. Действительно, необходимо, чтобы линия, стягивающая снизу две стороны этой трапеции, была в квадрате более чем в два раза больше оставшейся (стороны) и самая большая сторона трапеции была бы (в квадрате) меньше, чем диагональ и та из других сторон, которая с диагональю стягивает упомянутую наибольшую сторону. Тогда угол, опирающийся на наибольшую сторону, будет острым. Таким образом, сегмент, в котором он заключается, будет больше полукруга, а он и представляет-ет внешний обвод луночки».

В качестве пояснения Симпликий чертит приложенную фигуру.

В современной символике рассуждение можно передать следующим образом:

$$BD^2 = 3AB^2, \quad AD^2 > A\Gamma^2 + \Gamma D^2 = 2AB^2,$$

$$BD^2 = 2AB^2 + AB^2 < AD^2 + AB^2.$$

Гиппократ, очевидно, применяет следующие предложения: 1) квадрат стороны (AD) треугольника (AΓD), лежащей против тупого угла (Γ'), больше, чем сумма квадратов других сторон; 2) если квадрат стороны меньше суммы квадратов других сторон, то противолежащий угол — острый; 3) если угол, вписанный в круговой сегмент, — острый, то этот сегмент больше полукруга. Очевидно, он хорошо знаком с понятием «сегмента, вмещающего данный угол» и знает, что все вписанные углы, соответствующие одной и той же дуге, равны друг другу и что меньшему вписанному углу соответствует и меньшая дуга.

«Затем, полагая, что сегмент будет меньше полукруга, он показал то же на основании следующего построения. Возьмем круг с диаметром AB и центром K , и пусть $\Gamma\Delta$, перпендикулярная к (прямой) BK , делит ее пополам. И пусть EZ находится между этой прямой (перпендикулярной к середине) и кругом, имеет направление на B и в квадрате в полтора раза больше радиуса».

Здесь Гиппократ применяет часто встречающееся в греческой математике построение «neusis», в котором прямолинейный отрезок (EZ) заданной длины строится так, чтобы его концы лежали на заданных прямых или кривых линиях (прямая $\Gamma\Delta$ и окружность,) а продолжение проходило через данную точку (B). Слово «neusis» обозначает «наклонность». Мы не знаем, выполнял ли он это построение, приводящее

к квадратному уравнению относительно $x = BZ$, при помощи циркуля и линейки или же он пользовался так называемой «вставочной линейкой», т. е. линейкой, на которой нанесено заданное расстояние EZ и которая передвигается, вращаясь вокруг B , пока концы E и Z не попадут на окружность и на перпендикуляр $\Gamma\Delta$ в середине прямой. Во всяком случае Гиппократ должен был предварительно построить отрезок EZ , являющийся средней пропорциональной между радиусом AK и $\frac{3}{2} AK$.

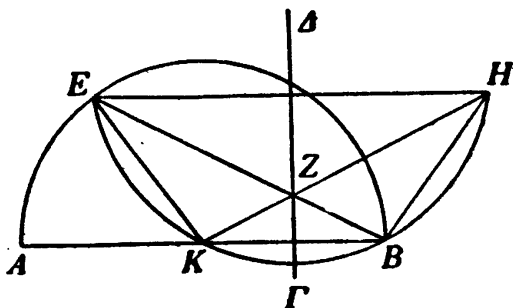


Рис. 69.

Он знал, следовательно, построение средней пропорциональной x между двумя заданными отрезками a и b , и ему было известно, что ее квадрат x^2 равен прямоугольнику ab .

«Теперь проведем $ЕН$ параллельно AB и соединим K с точками E и Z . И пусть прямая, идущая к Z , пересечется в H с прямой $ЕН$, и пусть из B будут проведены к Z и H соединительные прямые. Тогда ясно, что продолжение линии BZ пройдет через E и что BH должна быть равна EK . А если так, то трапеция $E\Delta BH$ будет вписана в круг. Далее, пусть эта трапеция содержит внутри круговой сегмент, описанный около треугольника EZH . Полученная таким образом луночка должна равняться прямолинейной фигуре, составленной из трех треугольников (EZK , HZB и KZB). Действительно, сегменты, которые отсекаются прямыми EZ и ZH внутри этой луночки от прямолинейной фигуры, равны сегментам, находящимся вне прямолинейной фигуры, ибо каждый из двух внутренних сегментов в полтора раза больше каждого из внешних сегментов. Теперь, так как рассматриваемая луночка состоит из трех сегментов и прямолинейной фигуры без двух сегментов, а сама прямолинейная фигура получается, если опять добавить эти два сегмента и отнять три внешних, причем два первых сегмента равны трем вторым, то рассматриваемая луночка должна равняться упомянутой прямолинейной фигуре.

А что эта луночка имеет внешний обвод, меньший полуокружности, он доказывает тем, что угол, находящийся во внешнем сегменте, является тупым.

Что этот угол тупой, он доказывает так: вследствие того, что прямая EZ в квадрате будет в полтора раза больше радиуса, а прямая KB в квадрате более чем вдвое больше BZ, ясно, что KE в квадрате будет более чем вдвое больше KZ. Прямая EZ в квадрате в полтора раза больше, чем EK.

Таким образом, квадрат EZ будет больше вместе взятых (квадратов) EK и KZ. Следовательно, угол при K — тупой, а значит, сегмент, в который он вписан, меньше полукруга».

Не совсем ясно, из чего Гиппократ заключает, что KB^2 будет больше, чем $2BZ^2$. В рукописях стоит пояснение: «Потому что угол при Z больше». Вероятно, ход мыслей был таков: из равенства $EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2$ следует $EZ > EK$; следовательно, угол EZK — острый, а угол KZB — тупой; значит,

$$KB^2 > KZ^2 + BZ^2 = 2BZ^2.$$

Дальше согласно тексту рассуждение идет следующим образом:

$$KE^2 > 2BZ^2,$$

$$EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2 = EK^2 + \frac{1}{2} EK^2 > EK^2 + KZ^2,$$

следовательно, угол при K тупой.

«Таким образом Гиппократ квадрировал каждую луночку, будет ли ее внешний обвод полукружностью или же больше или меньше полукружности.

Луночку вместе с кругом он квадрировал следующим образом: Пусть около центра K описаны два круга, причем квадрат диаметра внешнего в шесть

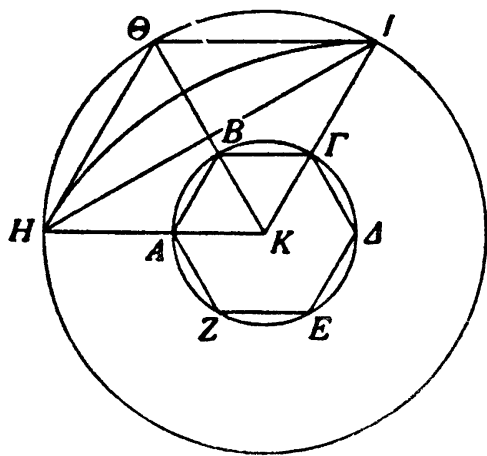


Рис. 70.

раз больше квадрата диаметра внутреннего; пусть во внутренний круг вписан шестиугольник ABΓEZ и линии KA, KB и KΓ продолжены из центра до пересечения с внешним кругом в точках H, Θ и I. Пусть на прямой HI будет описан сегмент, подобный тому, какой отсекается прямой HΘ. Тогда вследствие того, что в квадратах прямая HI в три раза больше стороны HΘ шестиугольника, последняя же в шесть раз больше AB, ясно, что построенный на HI сегмент равен вместе взятым сегментам, отсеченным от внешнего круга прямыми HΘ и ΘI, и всем (вместе взятым сегментам), отсеченным от внутреннего круга сторонами шестиугольника. Поэтому луночка HΘI будет меньше обозначенного теми же буквами треугольника как раз на (взятые вме-

сте) сегменты, отрезанные от внутреннего круга сторонами шестиугольника. Следовательно, луночка вместе с отрезанными шестиугольником сегментами равна треугольнику. И если к каждой из этих (фигур) прибавить шестиугольник, то выходит, что треугольник и шестиугольник вместе будут равны луночке с внутренним кругом. Так как упомянутые прямолинейные фигуры могут быть квадрированы, то можно также квадрировать круг вместе с луночкой».

Таким образом, Гиппократ, очевидно, знал и свойства правильного шестиугольника, например что квадрат его диагонали втрое больше квадрата стороны. Поэтому он должен был знать также, что сторона вписанного шестиугольника равна радиусу круга.

Если мы окинем взглядом все это в целом, то увидим, что Гиппократ уже владел значительным числом предложений элементарной геометрии. Как указывает каталог Прокла, он составил «Начала геометрии»; эти «Начала», кроме материала I и II книг Евклида, которые были уже «детской игрой» для пифагорейцев, должны были содержать большие разделы книг III и IV относительно круга и вписанных в него многоугольников. Гиппократу известна связь между вписанными углами и дугами, построение правильного шестиугольника, он может описать круг около треугольника и знает, что можно описать круг около равнобедренной трапеции. Он хорошо знаком с понятием подобия и знает, что площади подобных фигур относятся, как квадраты соответственных линий. Ему известна не только теорема Пифагора для прямоугольного треугольника («Начала»; I, 47), но и ее обобщения для тупоугольного и остроугольного треугольников («Начала», II, 12—13). Он может также квадрировать произвольную прямолинейную фигуру, т. е. построить для нее квадрат равной площади. Благодаря этому он в состоянии также строить отрезки, которые в квадратах относятся к заданному отрезку, как 3 : 2 или 6 : 1.

Для нашей оценки уровня математического развития во второй половине 5-го века и, в частности, у Гиппократа всего важнее его превосходная техника ведения доказательства и высокие требования строгости, которые тогда предъявлялись к доказательству. Гиппократ не удовлетворяется тем, что после построения луночки можно установить из чертежа, будет ли внешний обвод ее больше или меньше полуокружности, но хочет еще и строго доказать это. Его вычисления с неравенствами представляют нечто, к чему современная математика пришла много позже. Эйлер еще не очень заботился о сходимости или расходимости своих бесконечных рядов: он без всяких колебаний пользовался в вычислениях расходящимися рядами и получал правильные результаты. Необходимость «эпсилонтики», т. е. вычислений с ε и δ , и оценки остаточных членов была усмотрена только много позже, когда наступил «критический период» современной математики.

Греческая математика и прошла через такой «критический период» в начале 4-го века. Оценки, делаемые Евдоксом, который доказывает, что разность между вписанным или описанным многоугольником и кругом может быть сделана произвольно малой, стоят на одном уровне с современными оценками остаточных членов. Однако такого рода оценки стали возможными только

благодаря тому, что уже Гиппократ показал, как надо точно доказывать неравенства.

Гиппократ занимался также удвоением куба или, точнее говоря, задачей, каким образом для данного куба построить другой куб так, чтобы их объемы находились между собой в определенном отношении (например, $1 : 2$).

По преданию *), именно Гиппократ был первым, кто заметил, что задача будет решена, если между двумя прямолинейными отрезками a и b , находящимися в заданном отношении между собой, вставить две средние пропорциональные x и y :

$$a : x = x : y = y : b. \quad (1)$$

Если справедливо (1) то, как мы показали ранее, a^3 будет относиться к x^3 , как $a : b$.

А это естественно приводит нас к

СТЕРЕОМЕТРИИ 5-ГО ВЕКА И ПЕРСПЕКТИВЕ

Как пишет Витрувий, Агафарх был первым, кто написал в перспективе декорации для кулис, когда исполнялись трагедии Эсхила. Витрувий говорит также, что Агафарх оставил даже сочинение на эту тему. «Побужденные этим Демокрит и Анаксагор писали на ту же тему, а именно, как приводить линии к естественным соотношениям, к которым привык глаз, и как должны расходиться лучи из некоторой определенной точки, выбранной центром, для того, чтобы определенные образы от определенной вещи создавали на театральной декорации впечатление зданий и чтобы изображенные на плоскости вещи казались в некоторых частях отступающими назад, а в некоторых — выдвигающимися вперед» (В и т р у в и й, Об архитектуре, предисловие к книге VII) **).

Анаксагор и Демокрит очень высоко ценились как ученые. Если они писали монографии о перспективе, то, конечно, они не могли ограничиваться одними практическими указаниями для рисовальщиков, как это, пожалуй, было в труде художника Агафарха (что, например, на рисунке параллельные линии должны сходиться в одну точку); в этих монографиях все правила были, наверно, обоснованы и с точки зрения стереометрии. «Расхождение лучей», о котором пишет Витрувий, вероятно, должно относиться к лучам, собирающимся в точке зрения, которые связывают

*) Евтокий в «Archimedis Opera» (изд. Гейберга), III, 104. Относительно истории этой задачи и надежности предания мы еще будем говорить в следующей главе.

**) В главе I, 2, 2 Витрувий определяет сценические декорации, как «рисунок фасада и уходящих вглубь сторон путем сведения всех линий к центру».

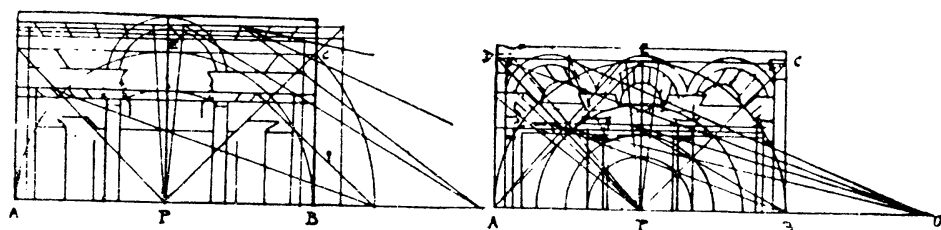
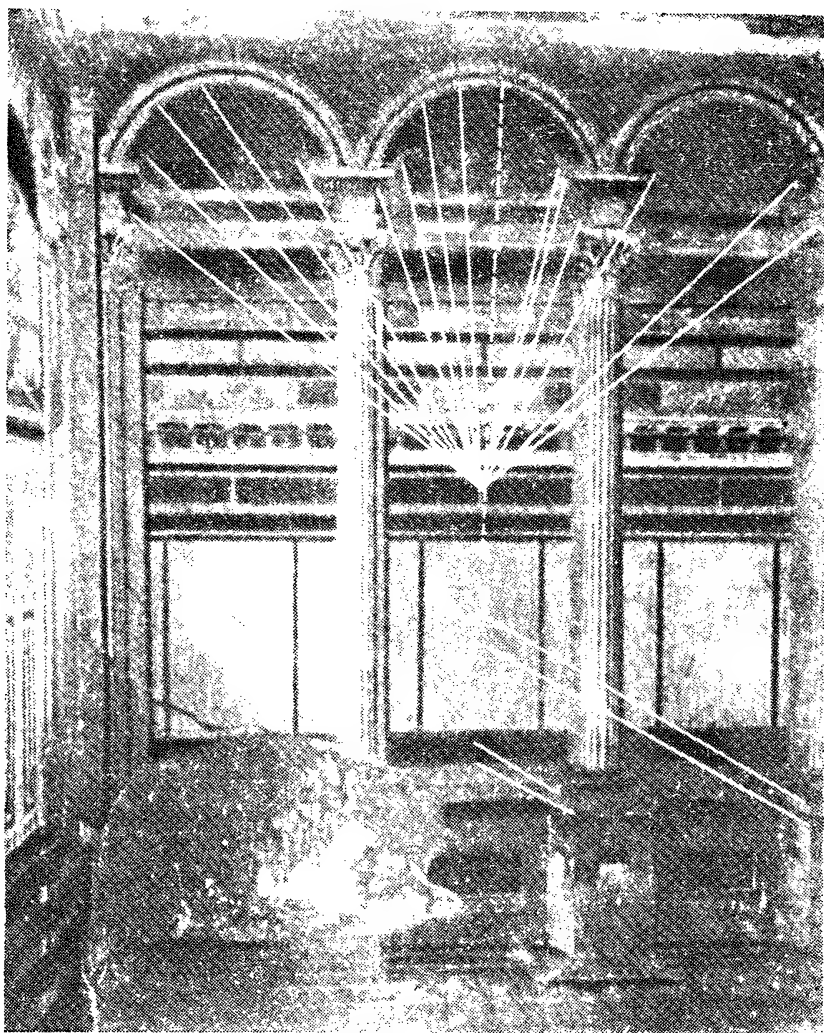


Рис. 71 Декорация стены в Помпеях «второго стиля» (около 60 до н. э.). Эти декорации в верхней своей части (двойной квадрат $ABCD$) обнаруживают наличие перспективной конструкции. Наиболее важные отступающие назад линии при своем продолжении сходятся в одной точке P . То же самое справедливо и по отношению к диагоналям панелей на покрытии. Если мы предположим, что панели были построены как квадраты, то можно заключить, что OP было взято в качестве теоретического расстояния между глазом и стеной. После публикации этих перспективных стенных декораций Х. Г. Вейеном (*Jahrb. deutsch. archäol. Inst.*, 1939) нельзя уже более сомневаться, что цитированное в тексте выражение Витрувия действительно относится к центральной перспективе. Относительно связей Витрувия с современными ему художниками по росписи стен см. *Об архитектуре*, VII, 3–14. В этом месте Витрувий дает указания художникам. Подокруги на чертежах добавлены потому, что Витрувий говорит о центре круга, в котором должны встретиться отступающие назад линии.

ее с точками изображаемого пространства и пересекают плоскость рисунка в точках изображения.

Отсюда можно заключить, что около 450 до н. э. стереометрия уже достигла такого развития, что можно было ставить и решать задачи, связанные с перспективными изображениями.

ДЕМОКРИТ

действительно приобрел известность как геометр. Среди сохранившихся заглавий его произведений имеются несколько математических: о касании круга или шара, о геометрии, о числах, об иррациональных отрезках, о «развертываниях» (*ekpetasmata*), т. е. об изображении поверхности шара на плоской поверхности *). Он сам хвалится тем, что в «составлении линий» с нужными доказательствами никто не мог его превзойти, даже так называемые египетские гарпедонанты. Он, должно быть, побывал в Египте, Персии, Вавилоне и, как передают некоторые, даже в Индии и Эфиопии.

Конус и пирамида

Архимед говорит (во введении к «Методу»), что Демокрит впервые открыл, что объем конуса или пирамиды составляет треть объема цилиндра или призмы с тем же основанием и той же высотой, но что он не дал этому никакого действительного доказательства (это впервые сделал Евдокс). Демокрит мог узнать в Египте формулу объема пирамиды, но неясно, какие рассуждения убедили его, что эта формула и соответствующая для конуса действительно правильны.

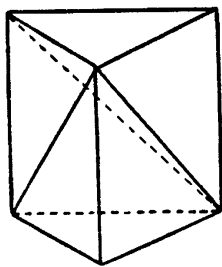


Рис. 72.

Если это предложение справедливо для трехгранной пирамиды (тетраэдра), то оно будет иметь место и для произвольной пирамиды, а при помощи предельного перехода можно установить это предложение и для конуса. Трехгранную призму можно легко разложить на три тетраэдра, которые имеют попарно равные основания и высоты. Таким образом, если показать, что пирамиды с равными основаниями и высотами равны по объему, то отсюда следует, что каждый из этих трех тетраэдров составляет $\frac{1}{3}$ рассматриваемой призмы.

По Кавальери, в равенстве двух пирамид (или конусов) с равными основаниями и высотами можно убедиться, если рассечь

*) Это объяснение слова заимствовано из «Географии» Птолемея (VII, 7).

их плоскостями параллельно основанию на тонкие слои, которые приближенно можно рассматривать как призмы (или цилиндры). Возможно, что Демокрит действительно рассуждал именно так. Во всяком случае так можно было бы объяснить сообщение Плутарха*), что Демокрит поставил вопрос: «Если конус пересекается плоскостями, параллельными основанию, то будут ли поперечные сечения равными или неравными? Если бы они были неравными (и мы могли бы добавить от себя: если получающиеся тонкие слои рассматривались бы как цилиндры), то конус был бы похож на лестницу, а если бы они были равны, то все сечения были бы тоже одинаковы и конус имел бы вид цилиндра и был бы построен из равных кругов, а это совершенно нелепо».

ПЛАТОН О СТЕРЕОМЕТРИИ

Мы видим, таким образом, что в 5-м веке стереометрией ревностно занималось немало ученых. Если прибавить к этому сообщение, что пифагорейцы знали три из пяти правильных тел и что Гиппократ задачу об удвоении куба свел к построению двух средних пропорциональных между двумя заданными отрезками, а также учесть, какой солидный запас стереометрических знаний нужен для архитова решения той же задачи, то никак нельзя понять жалобы Платона в «Государстве» по поводу недостаточного развития стереометрии. Он пишет «Государство», 528 В):

(Сократ:) «После плоских фигур мы переходим к телам вращения, прежде чем вообще рассматривать тела сами по себе. Однако в правильной последовательности нам следовало бы после второго измерения взяться за третье. И это, мне кажется, имеет отношение к увеличению кубов и всего, что обладает глубиной».

(Главкон:) «Правильно, это так, но эти вещи, Сократ, как будто еще не найдены».

(Сократ:) «Да, и для этого есть две причины. Во-первых, ни в одном государстве эти науки не в чести, так что исследования из-за их трудности ведутся вяло. Во-вторых, исследователям таких вопросов необходим руководитель, без которого ничего не добьешься. Но если бы он даже и существовал, его нелегко было бы найти, а если бы он и нашелся, то в нынешнем положении все те, которые занимаются подобными исследованиями, самонадеянно отказались бы подчиниться ему. Но если целое государство взяло бы на себя, руководя и направляя, то эти ученые слушались бы, и тогда исследования стали бы производиться упорно и постоянно и выяснилось бы, как обстоит дело с этими предметами. А теперь поистине эту науку в народе не почитают и исследователи не видят, что в ней полез-

*) См. H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker, Demokritos*, В. 155. См. также S. Luria (С. Лурье), *Die Infinitesimaltheorie der Atomisten*, Quellen u. Studien z. Gesch. Math. [В] 2, стр. 106.

ного, и препятствуют ей, но она, несмотря на все препятствия, растет и усиливается благодаря присущему ей очарованию. И не придется удивляться, когда истина относительно этих вещей выйдет на свет».

Тэйлор*) видит в этом отрывке жалобу на состояние стереометрии, относящуюся не к 374 году, когда Платон писал «Государство», а к 422 году, в котором происходил этот диалог. Против этого Дейкстергейс правильно возражает, что тогда остается необъяснимым тот характер злободневности, которым проникнуто все цитированное место. Какие у нас основания думать, что Платон 50 лет спустя только ради исторической правильности картины стал бы так резко выражаться по поводу уже давно изжитых недостатков в науке? Скорее мы готовы согласиться с Евой Сакс**), что Платон здесь, так сказать, имеет в виду руководство своей Академией. Он хотел, чтобы математики в Академии занимались стереометрией более систематически под его руководством и, может быть, это ему и удалось, как видно из последней фразы (возможно, прибавленной позднее).

Но что здесь понимает Платон под стереометрией, или, как он сам ее называет, учением о «sterea» — пространственных телах? Включается ли сюда вся теория плоскостей и линий в пространстве, как она изложена в XI книге «Начал», и учение о перспективе, о котором Демокрит и Анаксагор писали книги, и найденный Демокритом объем пирамиды и так далее? Тогда было бы непонятно, почему Главкон с согласия Сократа мог сказать, что эти вещи «еще не найдены». Поэтому мы вынуждены признать, что у Платона понятие стереометрии имеет другой, более узкий смысл.

Этот узкий смысл намечается собственными словами Платона «увеличение кубов». Одна из знаменитых задач греческой математики — увеличить куб в определенном отношении, т. е. построить такой куб, который к заданному кубу имел бы то же отношение, какое имеют два данных прямолинейных отрезка один к другому. Если это отношение будет $2 : 1$, то мы получаем всем известную делийскую задачу:

УДВОЕНИЕ КУБА

Историю этой задачи мы знаем главным образом по комментарию Евтокия к Архимеду, и в следующей главе я подробно поговорю о ней. Здесь я коснусь только некоторых основных пунктов.

Как мы уже видели, Гиппократ Хиосский свел общую задачу об увеличении куба в заданном отношении к задаче о построении

*) A. E. T a y l o r, *A commentary on Plato's Timaeus*, Oxford, 1928.

**) E v a S a c h s, *Die fünf platonischen Körper*, Berlin, 1917.

двух средних пропорциональных между двумя заданными прямолинейными отрезками. Архит Тарентский нашел в высшей степени искусное стереометрическое решение этой задачи. После него решения дали Евдокс, Менехм, Платон (?), Эратосфен, Никомед, Аполлоний, Герон, Филон Византийский, Диокл, Спор и Папп. Ясно, что этой задаче придавалось очень серьезное значение.

В «Эпиномис» — добавлении к «Законам» Платона, которое носит имя Платона, но было издано лишь после его смерти, — задача о двух средних пропорциональных рассматривается именно как главная проблема стереометрии*). В этой книге планиметрия определяется, прежде всего, как наука, которая учит нас делать подобными числа, которые по своей природе подобными не являются. При этом два числа ab и cd (всегда рассматриваемые как площади прямоугольников со сторонами a и b и соответственно c и d) называются подобными, если стороны этих прямоугольников пропорциональны:

$$a : b = c : d.$$

Согласно Евклиду («Начала», VIII, 18), два числа только тогда являются подобными, если между ними существует среднее пропорциональное число. Однако планиметрия учит, как построить среднюю пропорциональную для каждой пары отрезков и преобразовать любой прямоугольник в квадрат; таким образом, при помощи планиметрии можно действительно сделать подобными два любых числа, хотя бы они сами по себе и не были подобны.

Затем «Эпиномис» переходит от плоских чисел к пространственным, состоящим из трех множителей. В этом новом смысле два числа abc и def называются подобными, если их стороны соответственно пропорциональны:

$$a : d = b : e = c : f.$$

После этого стереометрия определяется как «новое искусство, которое учит нас, как сделать подобными два числа, которые не были в указанном смысле подобны». Следовательно, стереометрия, учит, в частности, из каждого пространственного числа делать куб и также строить два куба, которые относятся между собой, как два любых целых числа. По «Эпиномис» это, очевидно, и является основной задачей стереометрии; другого определения стереометрии не дается.

Если теперь мы сравним с этим то место из «Государства» Платона, где цель стереометрии определяется как «увеличение кубов и всего, что имеет глубину», то мы увидим, что Платон рассматривал увеличение куба в данном отношении как важнейшую

*) См. O. Toeplitz, *Die mathematische Epinomisstelle*, Quellen u. Studien [B] 2, стр. 334 (1933) и O. Becker, *Quellen u. Studien* [B] 4 (1938), стр. 191.

задачу стереометрии. После этого становится ясным, почему он мог написать, что «эти вещи пока еще не найдены». Очевидно, около 375 года, когда Платон набрасывал «Государство», решение Архита еще не было получено, или по крайней мере не было известно в Афинах. Быть может, Платон узнал об этом решении как раз перед опубликованием «Государства» и в соответствии с этим придал более оптимистический тон концу разбираемого отрывка.

Но почему же все-таки Платон и его друзья математики придавали этой задаче об увеличении куба такое огромное значение?

Посмотрим сначала, как аналогичная проблема ставилась в планиметрии. В вышеприведенном отрывке Платон в качестве наиболее важных планиметрических действий называет: квадрирование (*τετραγωνίζειν*), приложение и прибавление площадей. Конечно, все эти действия заимствованы из геометрической алгебры: превращение произвольной прямолинейной фигуры F в равновеликий квадрат приводит к решению простого квадратного уравнения $x^2 = F$, приложение F к отрезку a без избытка или недостатка — к решению линейного уравнения $ax = F$, а с избытком или недостатком — к решению общего квадратного уравнения, или системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$x + y = a, \quad xy = F$$

или

$$x - y = a, \quad xy = F.$$

Наконец, «прибавление» площадей или линий друг к другу представляет не что иное, как геометрический эквивалент сложения.

Итак, Платон называет планиметрией то, что является главным образом геометрической алгеброй пифагорейцев. И теперь уже не удивительно, что под стереометрией он понимает обобщение геометрической алгебры на пространство трех измерений, т. е. геометрическую интерпретацию вычислений с произведениями из трех множителей. Первая новая задача, которая здесь возникает, есть решение простого уравнения третьей степени $x^3 = V$, т. е. построение куба заданного объема. Таким образом, с логической точки зрения это представляет центральную задачу стереометрии. Конечно, это не единственная задача: существуют уравнения вида $x^2(x+a) = V$ и другие в том же роде. Поэтому Платон к словам «увеличение кубов» прибавляет еще «и всего, что имеет глубину», оставляя тем самым место для дальнейших задач.

Наиболее важный результат этого исследования заключается для нас в том, что все более ясно выявляется линия развития геометрической алгебры от вавилонян через пифагорейцев к математикам платонова века.

И вот в конце 5-го века в связи с геометрической алгеброй задача об *иррациональных* начинается все более отчетливо становиться в центре внимания. В высшей степени важный вклад для выяснения этого вопроса сделал знаменитый геометр

ФЕОДОР ИЗ КИРЕНА

Кто был этот Феодор? Диоген Лаэртский называет его учителем Платона. Ямвлих упоминает его в своем Каталоге пифагорейцев, но это не много нам говорит, ибо Ямвлих был фантазером и склонен был причислить к пифагорейцам всех знаменитых математиков. Поэтому будем лучше держаться Платона, который в своем диалоге «Теэтет» выводит на сцену самого седовласого Феодора и позволяет нам из уст главного действующего лица, Теэтета, узнать весьма интересные вещи относительно его исследований рациональных квадратов с иррациональными сторонами.

ФЕОДОР И ТЕЭТЕТ

В упомянутом диалоге, действие которого происходит в 399 году, Феодор Киренский выступает уже седовласым старцем; значит, он должен был быть современником Гиппократы и Демокрита. Однако он еще не слишком стар и может сделать доклад о несоизмеримых отрезках, который вызывает интерес у афинского юноши Теэтета и Сократа. После этого доклада Теэтет начал сам размышлять дальше и решил вообще ту задачу, которую Феодор разобрал только для некоторых частных случаев: он дал классификацию всех отрезков, производящих рациональные квадраты, и выяснил, какие из них соизмеримы и какие нет. Так об этом рассказывается в диалоге «Теэтет».

В 369 году Теэтет пал на поле брани, и диалог Платона посвящен памяти юного героя. Во вступлении много говорится о его характере и заслугах. В этом самом диалоге, в кратком отступлении, которое кажется более или менее притянутым за волосы, Платон описывает математическое открытие своего юного друга и рассказывает при этом, что уже было найдено ранее Феодором и что прибавил к этому Теэтет. Поэтому можно, пожалуй, принять, что граница между исследованиями Феодора и Теэтета дана исторически правильно, хотя, быть может, другие подробности диалога и были сочинены автором. Платону незачем было приписывать Феодору то, что принадлежало Теэтету, или наоборот.

Вот каким образом устами главного действующего лица в диалоге Теэтета излагается содержание доклада Феодора:

«Здесь наш Феодор нарисовал (или «написал») кое-что относительно сторон квадратов (περὶ δυνάμεων τι ἔγραψε) и показал (ἀποδείκνυσι), что соответствующие трех- и пятифутовым не будут линейно соизмеримыми с однофутовым; таким образом, прибавляя по одному футу, он дошел до 17-футового, здесь что-то его задержало (или: здесь он остановился)».

Выражение «линейно соизмеримый» (μήκει σύμμετρος) встречается также у Евклида в книге X и обозначает, что существует общая мера. Оно применимо исключительно к отрезкам прямой; поэтому слово δυνάμεις не может, как это было позднее у Диофанта, обозначать «квадраты», но только «стороны квадра-

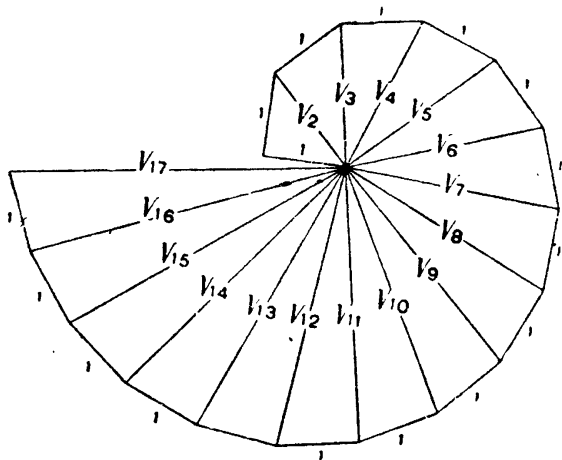


Рис. 73.

тов». Впрочем, немного далее сам Теэтет говорит, что он определенные стороны квадратов будет называть δύνამις (в узком смысле). С филологической точки зрения δύνამις (производящая сила) может обозначать и сторону, производящую квадрат; нет необходимости, как делает этот Таннери, заменять δύνамις словом δυνάμειν (производящая).

Таким образом, «трех- и пятифутовые» обозначают стороны квадратов, имеющих площади, равные трем или пяти квадратным футам. Мы выражаем длины их сторон при помощи чисел $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$, но $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ не являются числами в греческом смысле этого слова и названные отрезки не имеют длин, которые можно было бы выразить числами: они несоизмеримы. Поэтому мы уж лучше будем избегать современного обозначения $\sqrt{3}$ и называть сторону «трехфутового» квадрата ω_3 .

Не так важно, как именно Феодор строил стороны $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ квадратов в 3, 5, ..., 17 квадратных футов. Возможно, что это делалось при помощи прямоугольников с площадью 3, 5, ..., 17, превращаемых по Евклиду («Начала», I, 14) в квадраты той же

площади, а может быть, и по теореме Пифагора, переходя от одного к другому, как показано на прилагаемом рисунке 73, заимствованном из интересной монографии Андерхуба*).

При помощи этой фигуры Андерхуб объясняет, почему Феодор остановился как раз на ω_{17} ; впрочем, это можно объяснить и по-другому, как мы сейчас увидим. Более важным, однако, является вопрос: как доказывал Феодор, что $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ не имеют общей меры с ω_1 ?

Можно попробовать распространить на $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ то «апагогическое», т. е. не прямое доказательство иррациональности ω_2 , о котором мы уже говорили выше. Это действительно возможно: если принять, что ω_q измеримо, т. е. имеет с ω_1 общую меру, то можно получить уравнение вида

$$m^2 = qn^2,$$

и при помощи теоретико-числовых предложений книги VII «Начал» которая, вероятно, уже существовала в эпоху Феодора, показать, что это уравнение возможно только в том случае, когда само q является квадратом, иными словами, не для $q=3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ или 17 .

Но нельзя полагать, что Феодор шел этой дорогой. Ибо если бы он рассуждал таким образом, то совершенно непонятно, почему он случаи $q=3, q=5$ и т. д. рассматривал каждый в отдельности один за другим, как вполне определенно говорит Платон, и остановился на $q=17$; ибо вышеупомянутое доказательство легко может быть проведено и для общего случая.

Феодор был не арифметиком, а геометром. Может быть, он геометрически доказал несоизмеримость $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$? Геометрический критерий несоизмеримости двух отрезков дан у Евклида («Начала», X, 2):

«Если для двух величин при постоянном попеременном вычитании меньшей от большей остаток никогда не будет измерять предыдущий, то данные величины несоизмеримы».

Мысль о попеременном вычитании пришла из теории чисел; в применении к двум числам она дает способ определения общего наибольшего делителя, а в более общем случае для двух соизмеримых величин — их общей наибольшей меры. Если этот процесс никогда не прекращается, то общей меры не может и быть.

Если Феодор пользовался этим критерием, то сразу же становится ясно, что он и должен был рассматривать каждый из случаев $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ в отдельности, ибо при попеременном

*) J. H. A n d e r h u b, *Joco-Seria. Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes*, Ausgabe der Kalle-Werke, Wiesbaden, 1941.

вычитаний в каждом из этих случаев будет иметь место особый ход процесса.

Как же он показывал, что это попеременное вычитание никогда не прекращается, т. е. что остаток никогда не будет измерять предстоящего? Андерхуб подчеркивает, что ἀποφαίνειν не значит «доказывать», но скорее «показывать, давать видеть, делать ясным, выявлять». Он думает при этом, что Феодор, собственно, и не доказывал бесконечности этого процесса, но только показывал наглядно, что если в начале процесса всегда получается остаток, то так будет происходить и далее, пока остатки не станут настолько малы, что при ограниченной точности черчения на песке так или иначе придется остановиться.

Я не считаю это вероятным. В эпоху Феодора к концу 5-го века, как мы видели при разборе Гиппократова фрагмента, к строгости доказательств предъявлялись уже настолько высокие требования, что даже простейшие факты вроде того, что будет ли данная дуга больше или меньше полуокружности, устанавливали не просто по чертежу, но считали необходимым их доказывать. Конечно, не следует, чтобы каждый геометр обязательно был таким же чрезмерно совестливым, как Гиппократ, но в случае Феодора дело обстоит несколько иначе. Из наглядно очевидного факта, что после первых пяти-шести попеременных вычитаний получается остаток, еще ничего нельзя заключить относительно конечности или бесконечности этого процесса (даже если принять это без доказательства), а следовательно, ничего нельзя сказать и относительно соизмеримости или несоизмеримости $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$. Как же тогда математик Теэтет или строгий критик Платон могли утверждать, что Феодор «показал» или «сделал ясной» эту несоизмеримость? Самое большее можно было бы сказать, что Феодор с помощью чертежа сделал несоизмеримость $\omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{17}$ довольно вероятной. Однако Теэтет, который в диалоге старается сделать возможно более ясным логическое различие между тем, что сделал Феодор и что получил он сам, ищет это различие не в мере вероятности, но скорее в том, что существует бесконечное множество несоизмеримых сторон квадратов, которые он хочет охватить некоторым общим понятием, тогда как Феодор разобрал один за другим лишь несколько частных случаев.

Платон так охотно опирается на математику для того, чтобы показать, что точные выводы возможны не по отношению к видимым и слышимым вещам, но исключительно по отношению к идеальным объектам, которые существуют только в мышлении. Говоря о математиках и, вероятно, думая о доказательстве несоизмеримости стороны квадрата с его диагональю, он пишет:

«Разве ты не знаешь, что они пользуются чувственно воспринимаемыми фигурами и рассуждают о них, однако думают не о них, но о вещах, образом которых они являются; доказательство они ведут для квадрата и диагонали

в самой их сущности, но не для начерченных фигур?... они именно и пытаются уяснить то, что можно видеть только умственными очами» («Государство», шестая книга, 510 DE).

Платон, очевидно, уверен в том, что математики согласятся с ним. И действительно, для прямолинейных отрезков, которые можно видеть и эмпирически измерять, является бессмысленным вопрос, имеют ли они общую меру или нет: ширина волоса уложится целое число раз в любом начерченном отрезке. Вопрос о соизмеримости имеет смысл только для отрезков, создаваемых мыслью. Следовательно, Феодор не мог ссылаться на наглядность, чтобы показать несоизмеримость сторон своих квадратов.

Каким же образом он тогда установил это? Развивая более подробно гипотезу Цейтена, я думаю, что это было сделано так: если можно показать, что в процессе попеременного вычитания после некоторого определенного числа действий получаются две линии, которые имеют друг к другу то же отношение, что и исходные, то можно заключить, что рассматриваемый процесс никогда не закончится. Но так действительно и обстоит дело для сторон квадратов с площадью 3, 5, ..., 17 квадратных футов. Пусть, например, $\omega = \omega_3$ — сторона трехфутового квадрата, а $e = \omega_1$ — единица длины. В таком случае

$$\omega^2 = 3e^2.$$

Отнимем e от ω ; останется $\omega - e$. Мы, таким образом, получили два отрезка: e и $\omega - e$. Продолжая этот процесс, мы можем заменить e и $\omega - e$ любой другой парой отрезков, которые имеют то же самое отношение. Тогда

$$e : (\omega - e) = (\omega + e) : 2e, \quad (1)$$

так как произведение средних членов равно произведению крайних

$$(\omega - e)(\omega + e) = \omega^2 - e^2 = 2e^2. \quad (2)$$

К отрезкам $\omega + e$ и $2e$ мы применим тот же самый процесс: отнимем $2e$ от $\omega + e$ и снова получим $\omega - e$. Теперь заменим $2e$ и $\omega - e$ двумя отрезками с тем же самым отношением

$$2e : (\omega - e) = (\omega + e) : e. \quad (3)$$

Пропорция (3) доказывается точно так же, как и (1). Мы берем отрезки $\omega + e$ и e и снова отнимаем e от $\omega + e$, получаем ω и e . Но это как раз те самые отрезки, с которых мы начали. Таким образом, наше соотношение повторяется: процесс будет периодическим и никогда не прекратится.

Равенство (2) может быть следующим образом доказано при помощи операций с площадями: $\omega^2 - e^2$ (разность квадратов ω^2 и e^2) представляет «гномон», как показано на рис. 74. Если мы отсечем его верхнюю часть и снова приставим ее справа, то получим

прямоугольник со сторонами $w - e$ и $w + e$. Таким образом,

$$(w + e)(w - e) = w^2 - e^2.$$

Этот способ доказательства совершенно аналогичен тому, который применялся пифагорейцами для приложения площадей с недостатком или избытком. Следовательно, в распоряжении Феодора были вспомогательные средства для того, чтобы дать это или подобное доказательство.

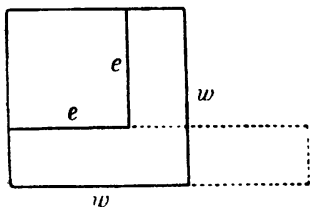


Рис. 74.

Аналогичное доказательство можно дать для всех случаев $w_3, w_5, w_6, \dots, w_{17}$.

Случай w_{17} , а также w_5 особенно просты, потому что здесь требуется только одна пропорция

$$e : (w - 4e) = (w + 4e) : e.$$

Следующий случай w_{18} не представляет интереса, так как $w_{18} = 3w_2$. Напротив, w_{19} является особенно трудным, поскольку для него требуется целых шесть пропорций:

$$\begin{aligned} e : (w - 4e) &= (w + 4e) : 3e, \\ 3e : (w - e) &= (w + 2e) : 5e, \\ 5e : (w - 3e) &= (w + 3e) : 2e, \\ 2e : (w - 3e) &= (w + 3e) : 5e, \\ 5e : (w - 2e) &= (w + 2e) : 3e, \\ 3e : (w - 4e) &= (w + 4e) : e, \end{aligned}$$

которые все могут быть доказаны при помощи вычислений с площадями. Таким образом, вполне понятно, что Феодор в своем изложении остановился на $\sqrt{17}$.

Конечно, нельзя думать, что доказательство Феодора было в точности таким, как описано выше, но, однако, в высшей степени вероятно, что для доказательства несоизмеримости $w_3, w_5, \dots, w_{14}$ он пользовался именно критерием иррациональности 2-го предложения X книги «Начал».

Феодор о высших кривых и «соединениях»

Феодор, по-видимому, занимался также кривыми линиями. Действительно, Прокл, отличающий различного рода «соединения прямого и кривого» среди линий и поверхностей и называющий их «synthesis, krasis и synchysis», пишет, что «Феодор говорит неправильно о кразисе кривых линий». Что это обозначает, в сущности, мы не знаем.

Однако мы знаем, что в это время были еще и другие, кто занимался высшими кривыми.

ГИППИЙ И ЕГО КВАДРАТРИСА

Гиппий Элидский, знаменитый софист, живший около 420 до н. э., исследовал плоскую кривую, которая называется квадратрисой. Прокл, в своем комментарии к Евклиду пишет об этом:

«Так, Аполлоний вывел основной признак для каждого из конических сечений, Никомед — для конхоид, Гиппий — для квадратрисы, а Персей — для спиралей»*).

Поясним: под основным признаком (*symptoma*) какой-нибудь кривой древние понимали условие, которому должна удовлетворять точка для того, чтобы она лежала на кривой. Так, например, уравнение

$$x^2 = 2py$$

(или, по-гречески, квадрат на отрезке x равен прямоугольнику на отрезках $2p$ и y) есть «симптом» параболы, причем x и y представляют косоугольные координаты точки параболы. При этом подразумевается, что ось x касается параболы в своем начале, а ось y параллельна оси параболы.

Квадратриса Гиппия является той самой кривой, которую Папп описывает в четвертой книге своего большого «Собрания» (глава 30) и о которой он говорит: «Для квадратуры круга Динострат, Никомед и более поздние математики пользовались кривой, которая получила от этого свое имя, ибо они называли ее квадратрисой (тетраγωνιζουσα)». Гиппий в этом месте не упоминается. Это, пожалуй, объясняется тем, что Гиппий не применял еще этой кривой для квадратуры круга, но пользовался ею для другой цели, например для трисекции угла. К Диностратовой квадратуре круга мы вернемся в следующей главе; там же мы дадим и Паппово построение квадратрисы.

ОСНОВНЫЕ ЛИНИИ РАЗВИТИЯ

Делая общий обзор математики золотого века, мы можем отметить шесть основных линий развития.

1. Систематическое обоснование плоской геометрии: теория параллельных, сумма углов треугольника, площади многоугольников, пропорциональность, теорема Пифагора, углы и дуги в круге, правильные многоугольники. Эта линия развития находит свое предварительное завершение в «Началах» Гиппократов. В качестве нерешенной проблемы остается построение теории отношений, включающей и взаимно несоизмеримые величины.

2. Развитие теории чисел началось из числовой мистики Пифагора, приняло затем строго научный характер в учении о четном

*) Proclus, *In Euclidem*, изд. Friedlein, стр. 356.

и нечетном и привело в заключение к систематическому построению теории делимости и пропорциональности чисел в том виде, как мы это находим в книге VII «Начал».

3. Третья важная проблема—это определение площади круга: она естественно возникла из правил вычисления, заимствованных у египтян и вавилонян. У Гиппократы мы находим точную формулировку основного предложения о том, что площадь круга пропорциональна квадрату диаметра; на этом основывалась точная квадратура различных луночек.

4. Четвертой важной линией развития является алгебраическая. Пифагорейцы двинули вперед вавилонскую алгебру («эпантема Тимарида») и преобразовали ее в геометрическую алгебру.

При распространении этой геометрической алгебры на пространство трех измерений возникла в качестве наиболее важной проблема о построении куба данного объема, геометрический эквивалент уравнения $x^3=V$. Эта проблема была сведена Гиппократом к задаче о двух средних пропорциональных, но не решена.

5. Стереометрия была развита настолько, что Анаксагор и Демокрит могли дать первый очерк теории перспективы. Демокрит нашел правило для определения объема пирамиды и конуса, но не мог найти для него строгое доказательство. Из правильных многогранников пифагорейцы знали только тетраэдр, куб и додекаэдр. Гиппас описал шар около додекаэдра. В этой области осталась нерешенной важная задача: определение числа и построения всех правильных многогранников.

6. Наконец, была поставлена проблема иррациональности. Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной, равной 1, была доказана при помощи пифагорейского учения о четном и нечетном; иррациональность сторон квадратов с площадями 3, 5, ..., 17 показал Феодор Киренский при помощи процесса неограниченно продолжающегося попеременного вычитания (антанайресиса). Нерешенной осталась общая проблема: «какие стороны. производящие рациональные квадраты, являются сами рациональными?».

Теперь мы рассмотрим, каким образом эти линии развития продолжались в 4-м веке и как вышеназванные задачи стали исходной точкой для дальнейшего развития.

ГЛАВА VI

ВЕК ПЛАТОНА

Промежуток времени, который мы теперь будем рассматривать, начинается с кончины Сократа, отравленного цикутой (399 до н. э.), и кончается, когда Александр Великий распространил семена эллинской культуры по всему древнему миру (333 до н. э.).

В политическом отношении это время было периодом упадка, но для философии и точных наук,—напротив, временем еще невиданного расцвета. В центре научной жизни стояла фигура Платона. Он руководил и воодушевлял научную работу как внутри, так и вне своей Академии. Великие математики Теэтет и Евдокс и все другие, перечисленные в Каталоге Прокла, были друзьями Платона, его учителями в области математики и его учениками в области философии. Его великий ученик Аристотель, учитель Александра Великого, провел двадцать лет жизни в чудной атмосфере Академии.

Почему же Платон придавал такое огромное значение взра-



Рис. 75. Статуэтка Сократа 2-го века н. э., копия с бронзового оригинала около 335 до н. э. Согласно К. Шефольду, это, возможно, была знаменитая статуя Лисиппа в афинском Ломпейоне (Британский Музей).

щиванию великой «Mathesis»? Почему требовал он от всех своих учеников, чтобы они основательно изучили математику, прежде чем он посвятит их в свою философию? Ответ можно усмотреть уже из приведенного выше его отрывка относительно «идеального квадрата» и «идеальной диагонали»: только математика может научить нас, что точно рассуждать можно лишь о вещах, которые не слышны и не видны, но существуют только в мышлении. В «Государстве» (527 DE) он пишет:



Рис. 76. Платон (427-348 г. до н. э.). Прекрасная римская мраморная копия ранней империи с греческого оригинала около 370 до н. э., вероятно, сделанного Силанном. Частное собрание (см. R. Voehlinger, *Platon, Bildnisse und Nachweise*, Breslau, 1935).

«При помощи математики очищается и получает новую жизненную силу орган души, в то время как другие занятия уничтожают его и лишают способности видеть, тогда как он значительно более ценен, чем тысяча очей, ибо только им одним может быть обнаружена истина».

Истина—это идеи. Только одни идеи, но не чувственно воспринимаемые вещи обладают подлинным бытием. Можно иногда постигать идеи в моменты, ниспосланные свыше, как бы вспоминая о времени, когда душа пребывала вблизи Божества в царстве Истины; но сначала необходимо напряженным мышлением преодолеть заблуждения чувств. Дорогой к этому является диалектика,

и диалектический способ доказательства есть доказательство от противного.

Истина не может быть в противоречии с самой собой. Таким образом, если, исходя из некоторой предварительной гипотезы, мы приходим к противоречию, то эта гипотеза должна быть отброшена. И так, диалектически переходя от одной гипотезы к другой, преодолевают заблуждения, в которые мы впадаем, а это позволяет, наконец, свободно взглянуть на истину.

Таков метод, который постоянно применяется в подлинно диалектических диалогах, в которых не обучают, но ведут философские беседы. Собеседник ставит на обсуждение какое-нибудь мнение; Сократ опровергает его. После этого изменяется точка зрения, формулировка делается более точной, и снова Сократ показывает, что эта формулировка также приводит к противоречию и поэтому не может быть сохранена. Так дело идет и далее. Достигнуть положительного результата невозможно, но дискуссия все время подымается на более высокую ступень, все больше

заблуждений отбрасывается и, наконец, иногда заходят так далеко, что истина может быть высказана в форме мифа. Но это теперь уже не диалектика: по собственным словам Платона, диалектика есть точный метод доказательства, и в диалогах Платона никогда не встречается иного метода доказательства, кроме опровержения принятых гипотез.

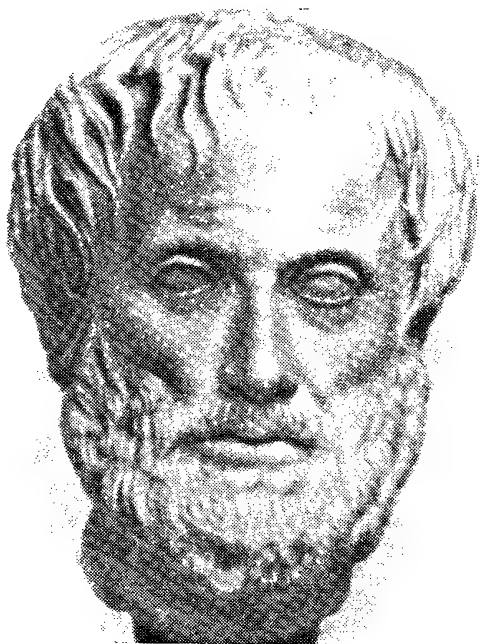


Рис. 77. Аристотель (384—322 до н. э.). Мраморная копия (30—50 н. э.) со знаменитой статуи, вероятно бронзовой, выполненной во время жизни философа (около 325 гдо н. э.). Можно предположить, что это была статуя, воздвигнутая Александром Великим, в честь своего великого учителя (мнение К. Шефольда).



Рис. 78. Евклид (?). Миниатюра 6-го века н. э. из рукописи римских землемеров (агрименсоров) в Вольфенбюттельской областной библиотеке (Брауншвейг) (M. S. 2403). Возможно, что это изображение восходит к греческому портрету, времени самого Евклида. Диадема в волосах является античной и, по-видимому, взята с древнего оригинала (Шефольд).

Рейдемейстер в своей «*Mathematik und Logik bei Platon*» (Leipzig, 1942) подчеркивает, что этот метод доказательства при помощи приведения к абсурду заимствован из математики. Сам Платон неоднократно приводит доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата как типичный пример математического рассуждения и при этом указывает, что как раз при помощи такого приведения к абсурду можно кое-что узнать о вещах самих по себе. Чувственно воспринимаемые вещи изменчивы и противоречивы, но истинное бытие, которое за ними скрывается, напротив, не может обладать двумя взаимно противоречивыми свойствами.

Таким образом, согласно Платону в математике учатся рассуждать о вещах самих по себе, подготавливая мышление к диалектике. По его мнению, математические объекты стоят между видимыми вещами и идеями, а математическое мышление находится как бы посередине между «мнением» и философским проникновением. И поэтому Платон придавал такое исключительное значение математической подготовке.

В ранних диалогах Платона почти совсем нет математики. Человек, который познакомил Платона с точными науками, был уже несколько раз упомянутый нами пифагореец.

АРХИТ ТАРЕНТСКИЙ

Многосторонность этого замечательного южноиталийского дорийца является беспримерной даже для того времени. Он решил знаменитую делийскую задачу об удвоении куба при помощи необыкновенно остроумного стереометрического построения. Он не только вывел в связи со своей музыкальной теорией несколько вспомогательных предложений относительно пропорциональности чисел и несколько неравенств, касающихся трех средних, но вся книга VIII «Начал» с ее арифметической теорией непрерывных пропорций, подобных чисел и т. д. в основе является его произведением. Он сделал также очень значительный вклад в теорию несоизмеримых величин. Птолемей с полным правом называет его крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки; систематически применяя арифметическую и гармоническую средние, Архит не только рассчитал числовые отношения новых гамм, которые вошли в употребление в его время, но также положил теоретико-числовое обоснование музыкальной теории, которое мы находим в «Sectio Canonis» Евклида*). Он размышлял также относительно взаимной связи наук и о физической природе звука**). По Диогену Лаэртцию (VIII, 79—83) он был первым, кто дал систематическую разработку механики на математических основаниях. Согласно Витрувию он писал о машинах и даже сам строил машины: деревянного голубя, который мог летать***) и детскую трещетку****). Он был очень дружен с Платоном, который главным образом им и был посвящен в тайны точных наук и философию пифагорейцев. В своем родном городе Таренте он пользовался большим уважением как государственный деятель: семь лет подряд он выбирался стратегом, хотя по закону

*) B. L. van der Waerden, *Harmonielehre der Pythagoräer*, Hermes 78 (1943), стр. 185.

**) H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, Archytas, B. 1.

***) Aulus Gellius, *Noctes Atticae*, X, 12.

****) Аристотель, *Политика*, E 6, 1340 b 26.

это разрешалось только на один год, и он не проиграл ни одного сражения. После того как близкие ему по духу аристократические пифагорейцы были изгнаны из Италии, он сумел, сохраняя внешние формы демократии, удержать полуаристократический режим. Написавши письмо Дионисию, сиракузскому тирану, который держал Платона в плену, он, как говорят, спас жизнь философу.

Эта разнообразная картина относится, впрочем, только к внешним событиям его жизни и работ. Еще большие неожиданности мы встретим, когда проникнем глубже в его образ мышления и заметим, какой странный контраст представляли его гениальные идеи, его творческое воображение, великолепное мастерство, которым он владел, с одной стороны, а с другой,—его логические промахи, его неумение выражаться точно и ясно, его погрешности в рассуждениях и многословие. Разбирая критически книгу VIII «Начал» и «Sectio Canonis», которые обе носят имя Евклида, но, по существу, принадлежат Архиту, можно видеть, как Архит бьется над необходимой строгостью доказательства и ясностью изложения, которых требовали математики его времени и которые так естественно и легко были выполнены в более старой книге VII «Начал». Мы начнем с его наиболее блестящего достижения: его решения делийской задачи в том виде, как оно было описано Евдемом у Евтокия*).

Удвоение куба†

или общее увеличение куба в определенном отношении было сведено, как мы уже видели, к построению двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками. Согласно изложению Евдема, Архит решил эту задачу следующим образом.

«Пусть даны два прямолинейных отрезка AD и Γ . Надо между AD и Γ найти две средние пропорциональные. Около большей линии AD опишем окружность $AB\Delta Z$, построим в ней (хорду) AB , равную Γ , и пусть она в продолжении с проведенной в Δ касательной к кругу пересечется в Π . Проведем прямую BEZ параллельно PAO ; представим себе прямой полуцилиндр на полукруге $AB\Delta$ и на AD —вертикальный полукруг, лежащий в прямоугольнике полуцилиндра. Если мы будем вращать этот полукруг (оставляя его вертикальным) по направлению от Δ к B , в то время как конец A его диаметра остается неподвижным, то он будет пересекать поверхность цилиндра и начертит на ней некоторую линию. С другой стороны, если, оставляя AD неподвижной, будем вращать треугольник $AP\Delta$ в направлении, противоположном движению полукруга**), то прямая AP опишет коническую поверхность и в своем вращении встретится в некоторой точке с линией на цилиндре. Одно-

*) *Archimedis Opera*, изд. I. L. Heiberg, 3, стр. 84.

**) То есть по направлению к плоскости прямоугольника, тогда как полукруг движется от этой плоскости.

вить перпендикуляр к $АД'$, который пересечет построенный на $АД'$ полукруг). Он хотел выбрать точку I так, чтобы отрезок $АМ$ был равен заданному прямолинейному отрезку Γ . Когда $АI$ изменяется от $АI$ до нуля, то $АМ$ тоже должна изменяться от $АД$ до нуля; таким образом, безусловно найдется положение, когда $АМ$ будет равна Γ .

Для того чтобы определить это положение, у Архита появилась следующая идея: он сделал $АI$ переменной, заставив I пробегать окружность с диаметром $АД$ в горизонтальной плоскости, и поставил на эту плоскость перпендикулярный к ней полукруг $АКД'$.

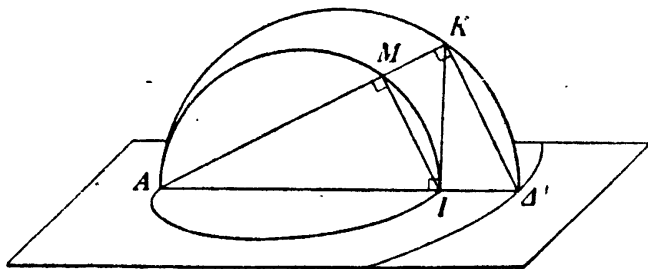


Рис. 80.

Тогда точка K будет всегда лежать на перпендикуляре из I и, следовательно, на цилиндре, основанием которого является упомянутый круг. При этом точка K будет описывать пространственную кривую, которая вырезается на цилиндре вращающимся полукругом $АКД'$. В то же время полукруг $АМI$ описывает полусферу с диаметром $АД$ (это всего проще видеть, исходя из шара с диаметром $АД$ и пересекая этот шар вращающейся вертикальной плоскостью: тогда кривая пересечения и дает как раз полукруг на диаметре $АI$). Если теперь $АМ$ имеет заданную длину Γ , то M будет лежать на некоторой определенной окружности этого шара; таким образом, прямая $АМК$ находится на определенном конусе с вершиной A . В том месте, где этот конус пересекает упомянутую пространственную кривую, и будет искомая точка K .

На чертеже Архита все находится в движении: его мышление кинематично. Уже в древности заметили, что он ввел в геометрию механические методы. Затем мы видим, что он, точно так же, правда, как и большая часть греческих математиков, без всяких колебаний пользовался принципом непрерывности. Этот принцип можно, например, сформулировать так: если непрерывно изменяющаяся величина будет сперва больше, а затем меньше некоторой заданной величины, то когда-нибудь она будет также и равна ей*).

*) См. об этом О. В е с к е r, Quellen u. Studien [В] 2 (1933), стр. 369; [В] 3 (1936), стр. 236.

Стиль Архита

Из вышеприведенного отрывка можно видеть, как был богат идеями Архит, как живо было его пространственное и кинематическое воображение. Нет сомнения, что его идеи оказали очень большое влияние на других, и прежде всего на Платона. Когда Аристотель говорит, что Платон очень много заимствовал у пифагорейцев, то при этом скорее всего нужно думать об Архите.

Но в одном отношении Архит стоит ниже Платона: у него совершенно отсутствует дар коротко и ясно излагать свои мысли. Если Платон иногда и выражается загадками, то для этого у него есть основания, но, когда ему захочется, он — сама ясность. Напротив, если прочитать у Дильса («Fragm. d. Vorsokr.») самый длинный из фрагментов Архита (В 1), то больше всего поражает не только невыносимое многословие, но прежде всего отсутствие ясности, чтобы не сказать просто путаница. Правда, Архит, как только может, старается ясно изложить свои мысли многими словами и примерами, но его рассуждение не логично: он путает быстроту движения, которое производит звук, со скоростью распространения самого звука, выводя из правильных по существу наблюдений ложные заключения, будто высокие тона распространяются быстрее, чем низкие*). Точно так же его замечание, что «один и тот же воздух медленнее течет по протяженным объемам, а по коротким — быстрее», не отличается ясностью; впрочем, Архит, может быть, подразумевает, что при одной и той же разности давлений воздух медленнее вытекает через более длинную трубу.

То же самое многословие встречается в теоретико-числовом фрагменте Архита у Боэция, о котором мы уже говорили, где доказывается, что между двумя числами, имеющими отношение $(n+1) : n$, нельзя вставить среднее пропорциональное. То обстоятельство, что наименьшие числа, которые имеют это отношение, отличаются только на единицу, по существу, уже само собой разумеется, но Архит считает необходимым дать этому шаг за шагом подробнейшее доказательство, исходя из определения эпиморного отношения. Он как будто боится споткнуться на скользком пути логики! И этот страх не лишен основания, потому что он действительно не один раз поскользнулся в других местах. Например, в его обосновании теории музыки имеется существенная логическая ошибка, так как он смешивает предложение с обратным ему**).

*) То же самое неправильное представление имеется и у Платона (Тимей, 80 А).

**) См. В. L. van der Waerden, *Harmonielehre der Pythagoreer*, Hermes 78 (1943), стр. 185.

Восьмая книга «Начал»

Логические погрешности Архита мы снова встречаем в книге VIII «Начал» Евклида. В сущности, эту книгу можно с большой вероятностью приписать Архиту. Мы уже видели выше, что начало книги VIII самым тесным образом связано с его теорией музыки. Предложение VIII, 8 он высказывает сам, а VIII, 7 равносильно предложению из «Sectio Canonis», которое мы раньше назвали предложением В. Некоторые другие предложения и понятия из книги VIII цитируются Платоном, который большую часть теории чисел должен был изучить по Архиту. Но, кроме того,—и это является решающим,—нельзя не узнать стиль Архита в книге VIII. Попробуем проанализировать, как построена эта книга.

Центральная задача книги VIII такова: при каком условии между двумя числами a и b возможно вставить одно или несколько чисел в непрерывной пропорции? Согласно VIII, 8 эта возможность определяется только отношением $a : b$, так что a и b можно считать взаимно простыми. Но в таком случае задача принципиально решена предложениями VIII, 9—10: если a и b — взаимно простые числа, то между ними можно вставить столько же находящихся в непрерывной пропорции чисел, сколько их существует между единицей и каждым из них, и обратно; таким образом, a и b являются конечными членами двух геометрических рядов с одинаковым числом членов:

$$1, p, p^2, \dots, p^n = a,$$

$$1, q, q^2, \dots, q^n = b.$$

То, что a и b — степени с одинаковыми показателями, прямо не сказано. Это, конечно, можно объяснить тем, что понятия о степени еще не существовало; однако это можно было бы изложить описательно: a получается, если p умножить само на себя определенное число раз. Что a именно так и получается, можно сразу заметить в начале доказательства VIII, 9. Это доказательство проведено для частного случая $n=3$. Ужасающе подробно доказывается, что p и p^2 действительно являются двумя средними пропорциональными между 1 и p^3 *).

После того как подобным образом (во всяком случае очень подробно) выведено необходимое и достаточное условие существования определенного количества средних пропорциональных, можно было бы сразу формулировать условия для частных случаев: $n=2$ и $n=3$ (одна или две средние пропорциональные), которыми занимается остальная часть книги VIII; в этом случае a и b , разумеется, представляют собой квадратные или кубические числа.

*) Последние три фразы отсутствуют в немецком переводе. (Прим. перев.)

Но так просто и логически автор не поступает. В предложениях VIII, 11—12 он доказывает, что между двумя квадратными числами возможны одна, а между двумя кубическими—две средние пропорциональные. Это не выводится как частный случай из VIII, 10, но полностью доказывается заново. Обратное предложение отчетливо не формулируется, но скрывается в следствии из VIII, 2, а в самом конце книги, в VIII, 26—27, формулируется еще раз и уже совсем по-другому. Ясно, что вся книга построена путано и беспорядочно.

В VIII, 18—19 обобщаются VIII, 11—12 следующим образом: между двумя подобными плоскими числами ab и cd (где, следовательно, $a : c = b : d$) имеется одно среднее пропорциональное, между двумя подобными пространственными числами abc и def (где $a : d = b : e = c : f$) возможны два таких. В предложениях VIII, 19—20 доказывается, что это условие существования одного или двух средних пропорциональных будет также и необходимым. Вопрос о том, при каких условиях между двумя числами возможны одно или два средних пропорциональных, решается не один только раз, а целых три раза. Автор словно ходит вокруг да около поставленной задачи и никак не может найти простую, вполне его удовлетворяющую формулировку.

Исходным пунктом систематического развития всего содержания книги является VIII, 2: найти любое заданное количество чисел, последовательно пропорциональных и наименьших в заданном отношении. Если данное отношение в наименьших числах будет $a : b$, то три последовательных пропорциональных числа будут a^2 , ab , b^2 . Если помножить их на a , а последнее еще и на b , то получатся четыре числа в непрерывной пропорции a^3 , a^2b , ab^2 , b^3 . Продолжая таким образом, можно найти любое заданное число членов, крайние из которых всегда будут некоторыми степенями a и b .

Все беды в книге VIII происходят от того, что данный способ образования формулирован не как теорема, а как задача. В приложениях каждый раз приходится возвращаться к вопросу о том, как же в действительности получаются нужные геометрические ряды. Каждый раз нужно вспоминать доказательство предложения VIII, 2, а поэтому цитирования становятся бесконечно сложными. Также и в других отношениях формулировки книги VIII являются ненужно запутанными*).

Но это еще не самое худшее: встречаются даже очевидные логические ошибки. Предложение VIII, 22 гласит: если даны три числа a , b , c в непрерывной пропорции и если a —квадрат, то и c будет тоже квадратом. Доказательство: согласно VIII, 20 числа a и c будут подобными; но a —полный квадрат; следовательно, таковым же будет и c . Однако это заключение не оправдано, так как a может

*) Два последних абзаца в немецком переводе выпущены. (Прим. перев.)

быть разложено не только на два равных, но и на два неравных множителя, и если с то же разлагается на пропорциональные им множители, то условия, которыми определяются подобные числа, уже выполнены, но это не дает нам права сделать вывод, что и с разлагается на равные множители. То же самое можно сказать относительно предложения VIII, 23, дающего обобщение предыдущего для пространственных чисел*).

И вот так Архит в VIII книге, как и в других его сохранившихся отрывках, все время бьется над логикой, изо всех своих сил старается удовлетворить ее строгим требованиям, но не всегда успешно.

Не следует думать, однако, что такие логические неудачи вообще характерны для науки того времени. Этому противоречит VII книга, которая хотя и старше VIII, но безукоризненно построена с точки зрения логики. Как мы уже видели, Гиппократ предъявлял самые высокие требования к строгости математического доказательства.

Когда Аристотель собрал воедино правила логики, то этим он просто привел в систему те закономерности, которые он нашел в рассуждениях предшествовавших ему математиков и философов. Большинство своих примеров он заимствует из математических учебников своего времени. Однако ясно, что эти учебники в логических построениях следовали образцам, имевшимся в оригинальных работах великих математиков, а не наоборот. Отсюда следует, что мышление греческих математиков еще задолго до Аристотеля должно было удовлетворять весьма строгим требованиям. Таким образом, несовершенная логика Архита—это поистине личная особенность этого в других отношениях такого превосходного математика.

«Mathemata» в «Послесловии к Законам»

В «Послесловии к Законам» (посмертно изданном произведении Платона, дополненном, по мнению некоторых, Филиппом из Менды) весьма приподнятым тоном и в загадочных выражениях дается обозрение программы курса математики для будущих руководителей идеального государства Платона.

Филологи понапрасну ломали зубы, пытаясь разгрызть этот крепкий орешек; только математики наших дней сумели пролить некоторый свет на это дело**). Оказалось, что здесь главным образом имеется в виду математика Архита. Мы даем этот замечатель-

*) Последняя фраза в немецком переводе отсутствует. (Прим. перев.)

**) O. Toeplitz, *Die mathematische Epinomisstelle*, Quellen u. Studien [B] 2 (1933), стр. 334; O. Becker, [B] 4 (1938), стр. 191; B. L. v. d. Waerden, *Hermes* 78 (1943), стр. 185.

ный отрывок в интерпретации Беккера с его совершенно необходимыми комментариями:

«Высшим и первейшим является учение о числах, не о тех числах, которые имеют телесный облик, но скорее о построении всей теории четного и нечетного и о той мощи, каковой они обладают над природой сущего».

Здесь естественно вспоминается Аристотель, который говорит, что для пифагорейцев начала чисел образуют начала всего бытия и что начала чисел суть четное и нечетное («Метафизика», А 5).

«Для того, кто изучил это, становится совершенно ясным то, что люди в высшей степени нелепо называют „землемерием“ (geometria), но что в действительности имеет целью уподобление чисел, которые по природе не подобны друг другу; это становится совершенно ясным в случае плоских фигур».

Мы уже говорили ранее о смысле этого. Два плоских числа ab и cd называются подобными, если их «стороны» пропорциональны ($a : c = b : d$). Однако два числа, которые «от природы» (т. е. в области чисел) не являются подобными, могут быть все же при помощи плоской геометрии «уподоблены», т. е. представлены как площади подобных прямоугольников (например, квадратов); между a и b (и соответственно между c и d) можно всегда вставить среднюю пропорциональную l (соответственно m), так что площади ab и cd , обратятся в квадраты l^2 и m^2 .

«Но воистину не человеческое, а божественное чудо откроется тому, кто после этого (плоской геометрии) будет рассматривать трехмерно протяженные (числа) и подобные по своей пространственной природе. И снова он сможет те, которые по своему происхождению не подобны, превратить в подобные при помощи иной науки, которую сведущие люди называют стереометрией».

Два пространственных числа abc и def называются подобными, если $a : d = b : e = c : f$. Уподобление двух неподобных чисел представляет обобщенную задачу удвоения куба, которая, по Платону, является центральной задачей стереометрии. А что все эти задачи постоянно вращаются около задачи удвоения, об этом в дальнейшем говорится настойчиво еще раз так:

«Но особо божественным и чудесным для тех, кто прозревает и проникает в сие, является, однако, то, каким образом при посредстве силы, которая постоянно вращается вокруг удвоения, и (силы) противоположной ей в соответствии с каждым из различных видов пропорций, все в природе как бы запечатлевает свой вид и форму».

Сила, которая все время вращается вокруг удвоения, или сила удвоения, как короче говорится далее, есть операция удвоения чисел, площадей, объемов и отношений. Повторное удвоение отношений приводит к непрерывным пропорциям вроде

$$a : x = x : y = y : b,$$

к которой сводится задача удвоения куба, или к такой пропорции

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8,$$

к которой относятся следующие два предложения. Сила, противоположная ей, представляет собой построение средних пропорциональных для различных видов пропорций, т. е. средних геометрических, арифметических и гармонических, что будет еще точнее разъяснено в следующем предложении. При помощи двух этих сил природа воспроизведет форму или идею (*εἶδος*) и вид или род (*γένος*), которые сравниваются с отпечатками.

«Первая сила удвоения идет вперед в соответствии с числами в отношении 1 : 2, но удвоением будет также и движение вперед при помощи возведения во вторую степень (*κατὰ δύναμιν*)»^{*)}.

Под «силой» (*δύναμις*) подразумевается здесь «вторая степень». «При помощи возведения во вторую степень» говорится здесь о «силе», производящей отношение 1 : 4. Это ясно по аналогии со следующим предложением, в котором дело идет о третьей степени:

«(Сила, стремящаяся) к пространственному и осязаемому будет еще раз удвоением и восходит от 1 к 8».

Оба последние предложения можно истолковать следующим образом. Если возьмем отрезок прямой и удвоим, то получим геометрический образ отношения 1 : 2. Если удвоим квадрат в длину и в ширину, получим отношение 1 : 4. Наконец, если удвоим куб во всех измерениях, появится отношение 1 : 8.

«Наконец (противоположная сила) удвоения, которая обращается к средним, будет, с одной стороны, когда (арифметическая) средняя будет настолько же больше наименьшей, насколько меньше наибольшей, а с другой же, — когда она (гармоническая средняя), на ту же самую часть превосходит и превосходится крайними членами: между 6 и 12 содержатся отношения 2 : 3 и 3 : 4».

Арифметическая и гармоническая средние между 6 и 12 будут 9 и 8. Восемь превышает шесть на третью часть шести и превышает двенадцать на третью часть двенадцати, что соответствует определению гармонической средней. Отношения $12 : 8 = 9 : 6 = 3 : 2$ и $12 : 9 = 8 : 6 = 4 : 3$ называются по-гречески *Hemiolion* и *Eritriton*; в теории музыки они соответствуют квинте и кварте.

«Исходя из этих (отношений) и обращаясь из середины снова к обоим краям, она (противоположная сила) даровала людям благозвучный консонанс, а, блаженному хороводу муз размеренную прелесть движений в игре, ритме и гармонии».

Смысл этой загадочной фразы я выяснил в моей статье в «Гермесе»^{**)}. Если, исходя из отношения 3 : 2, взять еще раз арифметическую или гармоническую среднюю, то получатся отношения

^{*)} В греческой научной терминологии *δύναμις* имеет двойственное значение: это либо «сила, мощность, потенция» (в физике), либо «вторая степень» (в математике). (Ср. французское слово «puissance» или немецкое «Potenz», тоже имеющие оба эти значения.) (Прим. перев.)

^{**)} В. L. van der Waerden, *Harmonielehre der Pythagoreer*, Hermès 78 (1943), стр. 185. [См. стр. 395—434 настоящего издания.]

5 : 4 и 6 : 5, т. е., на языке музыки, квинта разделится на большую и малую терции. Если так же для отношения 4 : 3 получить арифметическую и гармоническую средние, появятся отношения 7 : 6 и 8 : 7, т. е., на языке музыки, кварта разделится на уменьшенную малую терцию и увеличенный целый тон. На этих четырех интервалах построены три гаммы Архита. Таким образом, они действительно в игре, ритме и гармонии воспроизводят благозвучный консонанс музыки в движении, ритме и гармонии, о котором говорит текст.

Это возвышенное понимание природы, построенной наподобие чисел согласно законам гармонии, целиком и полностью принадлежит пифагорейцам. Во всей этой системе представлений есть совершенно ясный мистический элемент. Здесь речь идет совсем не о трезвом естествознании, но о мистическом единении с божественным творцом новопосвященного, которому стали известны тайны чисел и гармонии. Ибо дух человеческий, неся в самом себе божественную искру, мистически соединяясь с божественным духом, только и может прозреть кое-что из чудесного плана, по которому построена природа. В этой мистической атмосфере все сливается вместе: нельзя уже отличить музыкальные интервалы от соответствующих им числовых соотношений, а геометрические тела от материальных. Душа человека вливается в божественную, и мышление становится уже не человеческим, а божественным. Все это характерно для пифагорейства. Аристотелева критика этой картины мира как раз и опирается на то, что пифагорейцы не делают достаточно резкого различия между математическими и материальными объектами.

Это мистическое отождествление можно обнаружить уже в самых древних из уцелевших пифагорейских изречений вроде:

«Что такое божество? — Единица!»

или:

«Что такое дельфийский оракул? — Тетрада, ибо она есть гамма сирен».

По Аристотелю, пифагорейцы отождествляют справедливость, душу, дух с определенными числами. Небо «является» для них «гармонией и числом» и т. д.

Этот мистический образ мышления, не отличающий друг от друга объекты, находящиеся в некотором соответствии, тоже непосредственно связан с логическими погрешностями, которые мы не раз уже находили у Архита. Следы этого имеются не только в собственных его произведениях, но также и в математических учебниках, излагающих его идеи. Так, например, в начале «*Sectionis Canonis*» доказаны три чисто теоретико-числовых предложения, но говорится не о числовых отношениях, а о музыкальных интервалах, вследствие чего формулировка становится, с нашей точки зрения, довольно неясной.

И если мы в связи с «Еpinomis» снова вернемся к математике Архита, то станет ясно, до какой степени тесно связаны друг с другом его теория чисел, его геометрия и его теория музыки; да он и сам называет эти науки «родственными». В своей теории чисел он рассматривает непрерывные пропорции и ставит вопрос, можно ли между заданными числами вставить одну или несколько средних пропорциональных. Таким образом он приходит к установлению различия между подобными и неподобными плоскими и пространственными числами и доказывает, что между двумя числами, находящимися в отношении $(n+1) : n$, совершенно невозможны средние пропорциональные. В переводе на язык теории музыки это означает, что эпиморный интервал (октава, квинта, кварта или целый тон) не может быть разделен на две или более равных частей. На этом покоится вся Архитова теория консонантных интервалов. Правда, эти интервалы можно делить при помощи арифметических и гармонических средних, и этим пользуется Архит при построении своих гамм. Наконец, задачу о средних пропорциональных можно перевести на язык геометрии; таким образом, мы приходим к задаче о построении одной или нескольких средних пропорциональных между двумя данными отрезками. И теперь оказывается, что в геометрии эта задача вполне разрешима в противоположность теории чисел или теории музыки: построение одной средней пропорциональной было уже давно известно, а построение двух средних пропорциональных было впервые найдено Архитом при его удвоении куба.

Эти результаты должны были окончательно поставить в тупик пифагорейцев, ибо они всегда были уверены, что все на свете упорядочено по числам. Именно на основании предположения, что все тоны могут быть выражены числами, а все интервалы — числовыми отношениями, Архит доказал, что некоторые интервалы не могут быть разделены пополам. Если допустить, — а это было естественно для пифагорейца, — что и все отрезки прямой также могут быть представлены числами, то пришлось бы заключить, что и между отрезками, находящимися в некотором определенном отношении, также не может существовать среднего пропорционального. Однако среднюю пропорциональную между двумя отрезками геометрически построить всегда возможно. Следовательно, приходится заключить, что отрезки прямой не всегда могут быть выражены при помощи чисел, или, точнее, отношения отрезков прямой не всегда могут быть представлены отношениями целых чисел. Иными словами: *существуют взаимно несоизмеримые отрезки.*

Мог ли сам Архит уяснить эту связь между его теорией непрерывных пропорций и существованием иррациональных величин? Полагаю, что да. Изучение «Еpinomis», где определенно говорится, что числа, по природе не являющиеся подобными (и между которыми согласно предложению 20 книги VIII «Начал» невозможно

найти ни одного среднего пропорционального), могут быть сделаны подобными при помощи геометрического построения средних пропорциональных, во всяком случае показывает, что эта связь была вполне ясной для Платона и его учеников.

К этому присоединяется еще и следующее. В X книге «Начал» имеются два доказательства, которые так отличаются от общего стиля этой книги, что их надо рассматривать как позднейшие прибавления: это предложения X,9 и X,10. Действительно, в то время как десятая книга в целом отличается строго логическим построением и очень краткими изящными доказательствами, в доказательствах этих двух предложений имеются не только излишние части, но также и пробелы.

В доказательстве X, 9 из пропорции $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, где a и b — отрезок прямой, а c и d — числа, должно заключить, что $a : b = c : d$. Для этого указывается, что отношение квадратов $a^2 : b^2$ представляет «двойное отношение» $a : b$, и подобно этому отношение $c^2 : d^2$ будет двойным отношением $c : d$ *). Из равенства двойных отношений теперь без дальнейшей мотивировки выводится заключение о равенстве самих отношений: таким образом, доказательство здесь не полное. В доказательстве X, 10 используется X, 11, чего, разумеется, не должно быть.

В доказательстве X, 10, которое и Гейберг также считает «неподлинным», встречается выражение ἐμάθομεν γὰρ («ибо мы выучили это»), которое, как замечает Хизс, встречается еще только в «Sectio Canonis». Оба доказательства используют предложения книги VIII о средних пропорциональных и подобных числах, которые совершенно чужды доказательствам в X книге. Таким образом, составивший эти доказательства, — вероятно, тот же самый некритический и неоригинальный автор, на совести которого лежит «Sectio Canonis», — знал, что эти предложения можно применять и к теории иррациональных. Вероятно, Архит и его ученики, к которым восходят теории книги VIII и «Sectio Canonis», сами уже делали такого рода приложения**). Не говорит ли также Папп, что теория иррациональных получила свое начало в школе пифагорейцев?

В связи с трудами Архита рассмотрим дальнейшую историю знаменитой делийской задачи, над которой трудились лучшие умы эпохи Платона.

*) «Удвоить» отношение — значит умножить его на самого себя. Отношение $a : b$ тождественно с $a^2 : ab$, или $ab : b^2$. Если мы перемножим оба последних отношения, то в качестве двойного отношения будем иметь $a^2 : b^2$. В теории музыки удвоенному отношению соответствует удвоенный интервал. (Прим. к нем. переводу.)

**) См. Reidemeister, *Arithmetik der Griechen*, Leipzig, 1943. Я очень многим обязан этой брошюре и последовавшей за ней перепиской с Рейдемейстером.

УДВОЕНИЕ КУБА

Все, что мы знаем об этой задаче, находится главным образом у Евтокия, комментатора Архимеда. Но его изложение весьма неочетливо. Кантор, Хизс и другие историки математики отметили ряд противоречий, но не могли удовлетворительно их разрешить. Для этого решения мы должны обратиться к источникам, на которых основывается рассказ Евтокия, и прежде всего нужно отделить подлинную историю задачи от драматического повествования, взятого из эратосфеновского «Platonikos», от которого сохранились отдельные отрывки.

Сам Евтокий не говорит много о своих источниках. Вначале он пишет о том, что нашел труды многих знаменитых людей, где излагается построение двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками прямой. «Из числа этих произведений мы,—говорит Евтокий,—оставили в стороне сочинение Евдокса Книдского, ибо он в предисловии говорит, что нашел решение при помощи кривых линий, но сам в доказательстве ими совершенно не пользуется и, кроме того, получив обыкновенную пропорцию, обращается к ней как к непрерывной. Разумеется, невозможно допустить подобную бессмыслицу не только у Евдокса, но даже и у посредственного геометра. Чтобы выяснить точки зрения ученых, дошедшие до нас, мы опишем, как каждый решал эту задачу».

Ясно, что у Евтокия не было подлинного произведения Евдокса, а только плохие извлечения или компиляция, в которой не было толкового изложения хода рассуждения, ибо в работе самого Евдокса, конечно, должны были бы появиться эти кривые линии и не было бы никаких логических ошибок.

Изложив несколько решений различных авторов, Евтокий приводит письмо, которое будто бы Эратосфен написал царю Птолемею.

Вилламовиц*) убедительно доказал, что это письмо не может быть подлинным. Однако в нем имеется очень важный материал.

Начинается оно так:

«Рассказывают, что один из древних трагиков вывел на сцену Миноса, который повелевает воздвигнуть надгробный памятник Главку. Когда он узнал, что надгробный памятник имеет по сто футов в каждом измерении, он сказал: „Ты построил для царя слишком малое жилище: нужно вдвое больше. Не нарушая красоту формы, удвой немедленно каждую сторону гробницы».

По-видимому, Минос ошибся. Ибо если удвоить стороны, то площадь увеличится в четыре раза, а объем в восемь раз. После этого геометры начали искать способ удвоить оданне тело, не меняя его формы; эту задачу называли удвоением куба, так как они начинали с некоторого куба, который и пытались

*) U. v. Willamowitz-Moellendorf, *Ein Weihgeschenk des Eratosthenes*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Phil. hist., 1894, стр. 15.

удвоить. Долгое время они искали напрасно; первый Гиппократ Хиосский заметил, что если найти две средние пропорциональные между двумя отрезками, из которых больший в два раза длиннее меньшего, то можно будет удвоить и куб. Итак, задача заменилась другой, не менее трудной.

Прошло некоторое время, как рассказывается дальше, и вот в такое же затруднительное положение попали некоторые делийцы, которым оракул повелел удвоить жертвенник. Поэтому они послали к геометрам платоновской Академии и просили их найти решение. И те взялись, исполненные рвения, за эту задачу о построении двух средних пропорциональных между двумя заданными прямыми. Говорят, что Архит решил ее при помощи полуцилиндра, Евдокс — при помощи так называемых кривых линий...*)).

Мы видим явное противоречие между обеими частями рассказа. Очевидно, здесь воспроизводятся одна за другой две различные версии этой истории. Согласно первой версии задача удвоения куба является очень древней и связана с легендой о Миносе; ею уже занимались Гиппократ Хиосский и другие до него. Согласно другому рассказу на эту задачу натолкнулись делийцы, разбираясь в изречении оракула, во времена Платона, т. е. через полвека после Гиппократа. Как разрешить это противоречие?

К счастью, мы знаем источник второй легенды по одной цитате у Теона Смирнского**).

«Эратосфен рассказывает в своем сочинении «Платоник», что, когда бог возвестил через оракула делийцам, что, дабы избавиться от чумы, они должны построить жертвенник, вдвое больше старого, строители стали в тупик перед задачей построить тело, в два раза большее данного. Они обратились за советом к Платону, и тот сказал им, что бог дал им это предсказание не потому, что ему нужен вдвое больший жертвенник, но что он возвестил это в укор грекам, которые не думают о математике и не дорожат геометрией».

Этот же самый рассказ, приблизительно в тех же самых выражениях, мы находим в Плутарховом «Об изречении „ты еси“ в Дельфах» («De Ei apud Delphos» 386 E). В другом месте, в сочинении «О гении Сократа» («De genio Socratis» 579CD), Плутарх добавляет, что Платон за решением этой задачи отослал делийцев к Евдоксу и Геликону из Кизика.

Вероятно, «Платоник» был диалогом, в котором выступали делийцы, Платон, Архит, Евдокс и Менехм. В драматическом изложении Эратосфена вся история задачи сжата в короткий промежуток времени. Из-за этого он, конечно, и не мог ввести Гиппократа Хиосского. В действительности эта задача много древнее; она возникла как перевод вавилонского кубического уравнения $x^3 = V$ на язык пространственной геометрической алгебры. Таким образом, противоречие между первой и второй версиями «письма» разрешается само собой: первая версия, вероятно, заимствована из исторических источников, а вторая — из «Платоника».

*) В тексте стоит «χαμπύλαι», Так в некоторых местах у Аполлония называются конические сечения. (Прим. перев.)

**) Теон Смирнский, в изд. Hiller, стр. 2.

Кроме того, «письмо» содержит в высшей степени важный документ: эпиграмму Эратосфена, отчасти в прозе, отчасти в искусно написанных стихах. Эта эпиграмма была высечена на мраморной доске в храме Птолемея в Александрии*). В прозаической части вместе с фигурой и моделью дается решение делийской задачи, о котором мы будем говорить ниже, когда речь пойдет об Эратосфене. Стихи таковы:

«Если бы, друг, ты замыслил большое из малого сделать,
Куб сотворить ли двойной, иль перестроить объем,
Это возможно — и сени расширишь, и яму просторней
Выроешь и водоем влагой наполнишь двойной.
Вот мой прибор: меж линеек две средние сразу отыщешь,
Между краями других ты их отметишь концы.
Нужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита,
В конусе не для тебя высек триаду Менехм,
И с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо,
Циркулем вооружась, тонкий изгиб находить.
Сдвинув отважно линейки, легко мириады построишь
Средних желанных твоих, с меньшей из данных начав.
Счастлив ты, царь Птолемей, — ты дал вечноюному сыну
Равноблаженному дар сладкий для Муз и царей.
Зевс, бог вселенной! В грядущем пусть с милостью той же он примет
Скипетр от царской руки — и да свершится сие.
Тот же, кто жертву во храме великом увидит, да скажет:
— Дар этот Эратосфен людям, измыслив, принес».

Если читатель хочет понять первое предложение этой эпиграммы, то он должен посмотреть на рис. 129 (стр. 317) и ознакомиться с объясняющим текстом. В настоящее время нас, однако, интересует не эратосфеновское удвоение куба, но то, что он говорит о цилиндре Архита, конических сечениях Менехма и кривых Евдокса. Из слов Эратосфена ясно, что решения Архита, Евдокса и Менехма являются историческими. Решение Архита мы уже знаем, решение Евдокса утеряно. Решение же Менехма Евтокий описывает следующим образом:

Согласно Менехму

требуется найти две средние пропорциональные x и y между двумя заданными отрезками a и b :

$$a : x = x : y = y : b. \quad (1)$$

Допустим (рис. 81), что задача решена, и пусть $\Delta Z = x$ и $Z\Theta = y$. Из (1) прежде всего следует:

$$x^2 = ay. \quad (2)$$

Таким образом, Θ лежит на параболе с вершиной Δ . Из (1) следует, далее,

$$xy = ab. \quad (3)$$

Таким образом, Θ лежит на гиперболе с асимптотами ΔZ и ΔK . Итак, Θ можно найти построением как точку пересечения параболы и гиперболы».

*) За дальнейшими подробностями мы отсылаем к упомянутой статье Вилламовица, где убедительно доказана подлинность эпиграммы.

После этого Евтокий подробно доказывает, что из (2) и (3) обратно следует (1), т. е. что найденная точка пересечения Θ действительно дает решение рассматриваемой задачи.

Другое решение

«Из (1) следует:

$$y^2 = xb, \quad (4)$$

так что Θ лежит еще на другой параболе той же самой вершиной. Таким образом, точку Θ можно найти как точку пересечения двух парабол».

Теперь, проследив некоторую часть подлинной истории задачи об удвоении куба, мы возвратимся к драматизированной истории в «Платонике».

В обоих местах у Плутарха, где он приводит слова Платона к делийцам, он не называет своего источника («Платоника»):

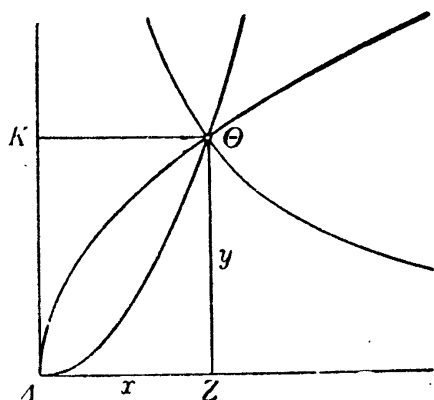


Рис. 81.

он просто говорит о Платоне. Это позволяет нам предположить, что когда в двух других местах Плутарх тоже говорит о делийской задаче и снова приводит слова Платона, он тоже черпает из «Платоники». Первое место — в восьмой книге «Застольных бесед» («*Quaestiones convivales*») таково:

«Сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям, ибо они думали получить две средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь

таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того чтобы подниматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов, пребывающий в коих бог есть вечный бог».

В Плутарховой биографии Марцелла Платон говорит то же и еще старательнее подчеркивает свое отвращение к употреблению «материальных вещей, которые требуют длительной обработки недостойным ремеслом».

В произведениях Платона нигде нет ничего подобного, но к «Платонику» все это прекрасно подходит.

Построение Менехма, с которым мы познакомились, является чисто теоретическим: оно не требует применения инструментов, даже вроде циркуля и линейки, нужны только конические сечения. Как же Платон мог отнестись к этому построению с такой уничтожающей критикой? Но эту дилемму можно вполне удовлетворительно разрешить, если отделить настоящую историю делийской задачи от драматического рассказа в «Платонике». В «Платонике» Платон отсылает делийцев к Евдоксу и его ученикам; последние

предлагают механические приспособления, но Платон отклоняет их, и тогда математики, устыдившись, начинают размышлять дальше и дают, наконец, чисто геометрическое построение с помощью пересечения кривых. Но последовательность событий могла быть и обратной: ученые уже имели теоретические решения, но для нужд делийцев придумали механические решения, которые Платон отклонил. На эту обратную последовательность намекают слова, которыми Плутарх начинает свою историю в «Жизни Марцелла».

«Преславное искусство механики впервые было применено друзьями Евдокса и Архита. Это они ввели в геометрию изящное разнообразие методов и добивались при помощи наглядных моделей выяснения тех задач, для которых не было удовлетворительных теоретических решений. Так, задачу о двух средних пропорциональных, на которой основывается так много построений, они оба решили при помощи механических методов, построив некоторые приборы, вычерчивающие средние пропорциональные и основанные на свойствах «изогнутых» кривых и сечений».

Теперь мы можем понять, почему Евтокий не мог найти в доказательстве Евдокса указанных в предисловии «изогнутых линий». Источник, которым пользовался Евтокий, очевидно, взял из подлинного Евдокса одно введение, а затем привел из «Платоника» механическое решение, где никаких «изогнутых» линий нет.

Всех новейших комментаторов приводит в недоумение то механическое решение, которое Евтокий приписывает самому Платону. В этом решении применяются плотничьи угольники с пазами и передвижными рейками, т. е. именно те механические приспособления, которые Платон как раз и осуждает в самых резких выражениях.

«Решение Платона» исходит из рис. 82.

На продолжениях сторон OA и OB прямого угла, на которых отложены данные отрезки OA и OB , стараются получить такие точки M и N , чтобы AM и BN были перпендикулярны к MN ; тогда OM и ON будут двумя средними пропорциональными между OA и OB . Чтобы добиться этого, «Платон» устраивает угольник FGH с передвижной линейкой KL , которая всегда остается перпендикулярной к FG . Если передвинуть линейку так, чтобы KL проходила через A , а GH —через B , причем G остается на линии OA , а K —на OB , то задача будет решена. Текст выразительно подчеркивает, что пазы и соединения надо сделать очень умело, ибо углы должны быть в точности прямыми, а линейка KL должна быть в точности параллельной GH , и пр.

Все современные комментаторы в один голос говорят, что это решение невозможно приписать Платону. К сказанному Хизс добавляет еще, что и эпиграмма Эратосфена совсем не упоминает решения Платона. С этим я вполне согласен: настоящий Платон не стал бы искать такого решения. Но ведь есть еще Платон из

«Платоника»! Разве в этих подробных указаниях на точную обработку пазов и пр. не заметна некая ирония? И разве не ясно, что все это очень хорошо согласуется с презрительными замечаниями Плутархова «Платона» на счет тех, «кто прибегает к материальным предметам, которым требуется длительная обработка недостойным ремеслом»?

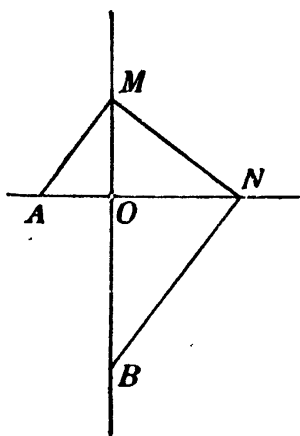


Рис. 82.

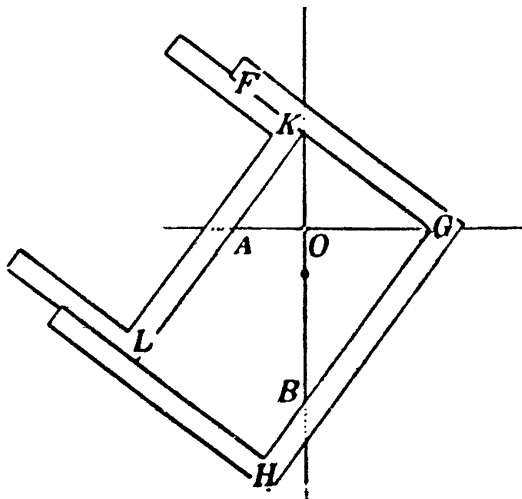


Рис. 83.

По-видимому, в «Платонике», возражая Архиту, Евдоксу и Менехму; Платон сказал: «Вы нашли механические решения? В этом нет никакого искусства; даже и я, совсем не геометр, могу это сделать: для этого нужен только схематический чертеж, даже нет надобности в предварительном геометрическом решении задачи. Вот, взгляни... Но если поступать так, то все благо геометрии совершенно разрушается, так как внимание от чистой геометрии отвращается к материальным предметам»... и т. д. и т. д.

Восстанавливая таким образом речь Платона, мы не только разрешаем все кажущиеся противоречия, но, кроме того, получаем ясное представление о построении этой части «Платоника». Всякого рода выражения вроде «отвращения внимания к чувственному и материальным предметам» становятся понятными: вероятно, Евдокс и Менехм нашли сперва чисто теоретические геометрические решения и затем уже, опираясь на них, придумали для делийцев механические приборы. Таким образом, они действительно «отвращают» свой взор от чистой теории к материальному. Эратосфен очень старательно выбрал свои выражения и искусно подделался под стиль Платона. В общем он был верен истории, выводя на сцену Архита, Евдокса и Менехма, которые действительно решили задачу, но, кроме того, он добавил еще и разные вымышленные подробности и заставил своих дейст-

вующих лиц говорить то, чего они хотя и не говорили, но могли бы сказать.

Теперь мы приходим к двум величайшим математикам эпохи Платона: Теэтету и Евдоксу.

ТЕЭТЕТ,

если верить Платону, должен был быть необыкновенно привлекательным молодым человеком. В диалоге «Теэтет», во вступительных словах Евклид *) рассказывает своему другу Терпсию, что он видел, как умирающего Теэтета перевозили в Афины с поля битвы под Коринфом; он страдал не только от ран, но еще и от дизентерии. «Такой человек»,—воскликает Терпсий,—«в таком опасном состоянии»!—«Замечательный во всех отношениях»,—подтверждает Евклид,—«я как раз слышал, как пели хвалобную песнь о том, как он бился в этом сражении».—«Это и не удивительно, он таков, я его знаю»,—отвечает Терпсий. А Евклид вспоминает пророческое изречение Сократа о том, что Теэтет, наверное, прославится, если достигнет возмужалости.

Этот пролог разыгрывается в 369 году, в год кончины нашего героя. Самый диалог происходит еще лет за 30 до этого, в тот год, когда Сократ был вызван на суд, а Теэтет был еще очень молод. Старик Феодор из Кирены, навестивший в Афинах Сократа, рассказывает, как он познакомился с юношей, таким способным, какого он еще не встречал за всю свою жизнь. Правда, он не красив («не сердись, Сократ, но он такой же курносый и лупоглазый, как ты»), зато он необычайно быстро все понимает, мягок и притом храбр, как никто. Феодор никогда не встречал, чтобы такие хорошие качества соединялись в одном человеке. «Этот юноша так легко и без всяких запинок успевает в науке и так уверенно и успешно ведет исследование, будто это масло струится бесшумным потоком, и невольно удивляешься, как возможно так много совершить в таком юном возрасте».

После этого выступает сам Теэтет; дружеский тон его и скромные манеры, логическая острота его возражений полностью подтверждают впечатление, которое произвели похвалы Феодора. «В самом деле, мои мальчишки,—говорит Сократ,—полагаю, что обвинять Феодора в лжесвидетельстве невозможно».

В диалоге Платон приводит также пример математических исследований молодого Теэтета. Правда, этот пример несколько притянут за уши: он должен служить предисловием к философской дискуссии, но не очень подходит для этого. Для этого, на мой взгляд, имеется только одно объяснение: Платон хотел взять такой вопрос, которым математик Теэтет действительно занимался сам, а поэтому

*) Не автор «Начал», а философ Евклид Мегарский.

мы и можем пользоваться этим диалогом, как историческим источником для реконструкции математических работ Теэтета.

Теэтет сначала излагает все, что было открыто Феодором по поводу иррациональности сторон квадратов с площадью 3, 5, ..., 17 квадратных футов, а затем говорит:

«Мы» (Теэтет и еще один молодой человек, по имени Сократ) «пришли к мысли, что, поскольку существует бесконечное множество сторон квадратов, следовало бы попытаться найти некое общее имя, которым впредь и можно было бы называть все стороны».

«И вы нашли такое имя?»

«Я полагаю, что да, суди сам. Мы разделили числа на два класса. Первый — те числа, которые разлагаются на два равных множителя, мы сопоставили с фигурой квадрата и назвали их квадратами или равносторонними числами; числа же, которые находятся между ними, как, например, три, пять, и все числа, которые не разлагаются на равные, а только на неравные множители, мы сопоставили с фигурой прямоугольника и назвали их неравносторонними числами».

«Очень хорошо, а дальше что?»

«Все отрезки, которые дают квадрат, площадь которого есть квадратное число, мы называли длиной ($\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$), а те, что дают неравносторонние числа, мы называли (в узком смысле) сторонами квадратов ($\delta\upsilon\alpha\gamma\mu\epsilon\iota\varsigma$), ибо они по длине не соизмеримы с первыми, а (соизмеримы) только по производимым ими площадям. И точно так же и относительно пространственных тел».

«Это великолепно, мои мальчики!»

На этом математическая часть кончается. Следуя Сократу, Платон высоко ценит точные определения: поэтому так подробно и даются определения неравносторонних и равносторонних, или квадратных, чисел. Однако для нас гораздо важнее этих тривиальных определений то предложение, которое высказывается в конце, правда, очень кратко, но совершенно ясно:

Отрезки прямой линии, производящие квадрат, площадь которого является целым, но не квадратным числом, не имеют общей меры с единицей длины.

Аналогичное предложение для пространственных тел, на которое Теэтет кратко намекает в последней фразе, гласило бы так:

Отрезки прямой линии, производящие кубы, объемы которых выражаются целыми, но не кубическими числами, не имеют общей меры с единицей длины.

Как можно было бы доказать классическими методами такое предложение? Конечно, непрямым путем. Допустим, что два отрезка образуют квадраты с площадями n и 1 и соизмеримы по длине; очевидно, надо попытаться доказать, что n будет в таком случае тоже квадратным числом.

Доказательство неизбежно распадается на геометрическую и теоретико-числовую части. Из предположения соизмеримости сторон следовало бы сначала геометрически вывести, что стороны относятся между собой, как два числа p и q , а площади получающихся квадратов — как их квадраты p^2 и q^2 ; таким образом,

$$n : 1 = p^2 : q^2, \quad (1)$$

или, что то же,

$$p^2 = nq^2. \quad (2)$$

После того методами теории чисел следовало бы доказать, что из (1) и (2) вытекает, что n будет квадратным числом. Аналогично и для третьих степеней.

Геометрическая часть этого доказательства находится в X книге «Начал». Предложения 5, 6, и 9 этой книги гласят:

X, 5. *Соизмеримые величины относятся друг к другу, как одно число к другому.*

X, 6. *Если две величины относятся друг к другу, как одно число к другому, то они соизмеримы.*

X, 9. *Квадраты на двух соизмеримых по длине отрезках относятся, как одно квадратное число к другому квадратному числу. И квадраты, относящиеся как одно квадратное число к другому, имеют также соизмеримые по длине стороны.*

Аналогичного предложения относительно кубов у Евклида не имеется, но оно может быть сформулировано по аналогии с X, 9.

Родство между диалогом «Теэтет» и началом X книги бросается в глаза даже и в терминологии: и там и там встречается одно и то же выражение «соизмеримые по длине» ($\mu\eta\chi\epsilon\iota\ \sigma\acute{o}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$), а евклидовскому выражению «потенциально соизмеримые» ($\delta\upsilon\alpha\delta\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota\ \sigma\acute{o}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\iota$) соответствует описательное определение Платона «соизмеримые по производимым ими площадям». Слова $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ и $\delta\upsilon\alpha\delta\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ у Платона и по написанию и по значению связаны с выражениями $\mu\eta\chi\epsilon\iota\ \sigma\acute{o}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ и $\delta\upsilon\alpha\delta\acute{\iota}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma\ \sigma\acute{o}\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ у Евклида. И если у Платона Теэтет начинается с упоминания о достижениях Феодора, то X книга открывается тремя предложениями о «последовательном вычитании» неравных величин; среди них, в предложении X, 2, как раз и дается тот критерий несоизмеримости, который, по всей вероятности, Феодор и применял в своих исследованиях.

Из всего этого видно, что диалог «Теэтет» и начало X книги связаны между собой и дополняют друг друга. Книга X содержит более подробное математическое развитие того, о чем кратко упоминается в диалоге. Предложения X, 5—6 и X, 9 были необходимы Теэтету для доказательства высказанного им в диалоге предложения: они позволили ему *геометрическое* понятие о соизмеримости сторон представить как *арифметическое* свойство чисел, измеряющих площади квадратов.

Наконец, такое предположение еще подкрепляется схолией (т. е. замечанием на полях) к X, 9, в которой говорится, что эта теорема представляет открытие Теэтета.

Однако, по мнению Цейтена*), важнейшую заслугу Теэтета следует искать не в геометрическом анализе проблемы иррациональ-

*) H. G. Zeuthen, *Oversigt*, K. Danske Vidensk. Selsk., 1910, стр. 395.

ности, но в ее арифметической части, т. е. в доказательстве того, что равенство (2) возможно, только если n —квадратное число. Согласно такому пониманию Теэтет должен был найти и доказать некоторое число предложений из арифметических книг VII и VIII, которые были ему необходимы для этого доказательства.

Не думаю, чтобы Цейтен был в данном случае прав. Как мы видели выше, книга VII относится к более древней эпохе и дает основу пифагорейской теории чисел. Однако, если пользоваться теоремами книги VII, то теоретико-числовая часть доказательства Теэтета уже не представит труда. Можно было бы, например, рассуждать так: q и p в равенстве (1) естественно можно считать взаимно простыми. Тогда по VII, 27 взаимно простыми будут также p^2 и q^2 (равно как p^3 и q^3); следовательно, по VII, 21 они будут наименьшими из чисел, имеющих то же самое отношение. Но в левой части пропорции (1) n и 1 тоже являются взаимно простыми и, следовательно, наименьшими числами в том же отношении. Значит, мы должны иметь $n=p^2$ и $1=q^2$; следовательно, n будет квадратом. Аналогично и для кубов.

Итак, мне кажется, что заслуги Теэтета заключаются не столько в том, что он сделал для теории чисел, сколько в его вкладе в учение о несоизмеримых отрезках, производящих квадраты с соизмеримыми площадями.

Он ввел точные понятия о «соизмеримом по длине» и о «соизмеримом в квадрате», которые дали основы для разделения отрезков прямой на соизмеримые «длины» и «несоизмеримые» «стороны квадратов», а в предложении X, 9 он сформулировал необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два квадрата для того, чтобы их стороны были соизмеримы по длине. На основании этого он мог ответить на вопрос, какие из этих сторон будут соизмеримы с единицей длины, и тем самым дать общее решение задачи, которая была решена Феодором только для сторон квадратов с площадями от 3 до 17 квадратных футов. Наконец, он мог всю эту теорию без труда («бесшумно, как будто струится масло») распространить и на стороны соизмеримых кубов.

Для того чтобы составить представление о других достижениях Теэтета, мы должны сначала поговорить о дальнейшем содержании книги X.

Анализ X книги «Начал»

Непосредственно в начале книги X, в определении 3 вводится некоторый определенный отрезок прямой, который мы будем обозначать буквой e и который играет ту же самую роль, что единица длины «длиною 1 фут» в диалоге «Теэтет».

Будем называть линейный отрезок (или площадь) *измеримым*, если он имеет общую меру с постоянным отрезком e (или с квадра-

том e^2). Соизмеримые площади называются у Евклида *выразимыми* ($\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma$). С другой стороны, *выразимыми отрезками* являются у Евклида все те отрезки, которые производят соизмеримые квадраты, т. е. не только все соизмеримые отрезки, но также и несоизмеримые вроде исследованных Феодором сторон квадратов с площадями 3, 5, ... В этой терминологии мы уже видим первое применение принципа, на основании которого линейные отрезки классифицируются по производимым ими квадратам. Все остальные прямолинейные отрезки называются невыразимыми ($\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ *). Очевидно, эти «неназываемые» величины в начальной стадии построения теории еще не получили имени или специального отличия.

Действительно, это произошло позднее. Евклид в X, 21, X, 36 и X, 73 определяет три основных рода иррациональных отрезков: *медиаль*, *биномиаль* и *апотому* **).

Медиальной площадью называется площадь прямоугольника ab , стороны a и b которого выразимы, но друг с другом несоизмеримы.

Мы бы сказали, что это — площадь, равная $\sqrt{r}$, где r есть рациональное число. Отрезок, квадрат на котором имеет медиальную площадь, называется *медиальным* отрезком, мы сказали бы — отрезком $\sqrt[4]{r}$. Длина этого отрезка удовлетворяет уравнению $x^2 = ab$ и, таким образом, является средней пропорциональной между a и b , откуда и имя — медиаль.

Сумма $a+b$ двух выразимых, но друг с другом несоизмеримых отрезков называется *биномиалью* («двухименной»), а разность $a-b$ — *апотомой* («отсеченной»).

В книге X доказывается, что эти новые виды отрезков все «невыразимы» и взаимно исключают друг друга, а кроме того, что биномиаль только единственным образом может быть представлена в виде суммы $a+b$, а апотома — единственным образом в виде разности $a-b$ двух выразимых отрезков. Все эти доказательства базируются на одной и той же основной мысли, которая красной нитью проходит через всю книгу: *чтобы показать свойства каких-либо отрезков, строят на этих отрезках квадрат и исследуют свойства этого квадрата*. Например, для того чтобы показать, что биномиаль не может быть медиалью, доказывают, что квадрат на биномиали не может быть медиальной площадью, и так далее.

*) В современных переводах вместо «выразимые» и «невыразимые» просто стоят «рациональные» и «иррациональные». Я выбрал здесь другие термины, потому что в современной математике «рациональный» является синонимом «соизмеримого», а «иррациональный» — «несоизмеримого».

**) Из сообщения Евдема мы знаем, что Теэтет исследовал эти три иррациональности и поставил их в связь с тремя средними пропорциональными, а именно, медиаль — со средней геометрической, биномиаль — со средней арифметической и апотому — со средней гармонической. См. G. J u n g e and W. T h o m s o n, *The commentary of Pappus on book X*, Harvard Semitic Series VIII, Cambridge Mass., 1930.

Эта основная мысль, собственно говоря, появляется еще в первой части книги X и в диалоге «Теэтет», ибо Теэтет выводит взаимную несоизмеримость определенных отрезков из отношения их квадратов.

Другие классы иррациональностей, которые вводятся непосредственно за биномиалью и апотомой, проще всего понять, если исходить из следующей задачи: при каких условиях квадратный корень из биномиали (или апотомы) сам окажется биномиалью (или апотомой)?

Биномиаль $a+b$ не площадь, а отрезок прямой: таким образом, по греческим представлениям, из нее нельзя извлекать квадратного корня. Следовательно, для определения геометрической величины, совпадающей с нашим $\sqrt{a+b}$, нужно сначала из $a+b$ сделать площадь, построив прямоугольник с основанием e и высотой $a+b$. Это выполняется каждый раз в X, 54—59 и X, 91—96. Теперь ставится вопрос, будет ли данная площадь равна квадрату на некоторой биномиали $u+v$, т. е. будет ли

$$(u+v)^2 = e(a+b). \quad (3)$$

Раскрывая скобки, получим:

$$(u^2 + v^2) + 2uv = ea + eb. \quad (4)$$

Теперь $u^2 + v^2$ будет соизмеримой площадью, а $2uv$ — медиальной площадью. Из того обстоятельства, что биномиаль $a+b$ может быть единственным способом разложена на выразимые члены, следует, что соизмеримые и медиальные члены левой части (4) должны быть равны соответственным членам правой части. Таким образом, если a будет большим из этих отрезков, то

$$u^2 + v^2 = ea, \quad 2uv = eb. \quad (5)$$

Решение этих уравнений производится в предложениях X, 33—35 для разных случаев при помощи геометрической алгебры. В X, 33, например, ea является соизмеримой, а eb — медиальной площадью, в X, 34 — наоборот, а в X, 35 обе площади медиальны. Во всех этих случаях способ решения один и тот же: полагают ea равным c^2 и eb равным cd и вместо (5) получают:

$$u^2 + v^2 = c^2, \quad uv = \frac{1}{2} cd. \quad (6)$$

После этого вместо u^2 и v^2 вводят новые неизвестные x и y , полагая

$$u^2 = xc, \quad v^2 = yc. \quad (7)$$

Так как $u^2 + v^2 = c^2$, то можно геометрически представить u и v как катеты ZA и ZB прямоугольного треугольника ZAB с гипо-

тенузой $AB=c$; тогда новые неизвестные x и y будут проекциями катетов на гипотенузу (рис. 84).

Из (6) и (7) для x и y получатся уравнения

$$x+y=c, \quad xy=\left(\frac{1}{2}d\right)^2; \quad (8)$$

таким образом, x и y будут корнями квадратного уравнения, или, по греческой терминологии: x и y суть стороны прямоугольника, равного квадрату на $\frac{1}{2}d$, который, будучи «приложен» к $AB=c$, дает «недостаток» в виде квадрата. Это приложение проводится в X,33—35 каждый раз по всем правилам искусства. При построении получается квадратный корень

$$w = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - d^2};$$

прибавляя его к $\frac{1}{2}c$ или вычитая,

получаем искомые отрезки x и y .

Каково же условие, которому должны удовлетворять данные площади $ea=c^2$ и $eb=cd$ для того, чтобы u и v были выразимыми, т. е. u^2 и v^2 соизмеримыми? Для u^2 и v^2 мы имеем уравнения

$$u^2 - v^2 = (x - y)c = 2wc,$$

$$u^2 + v^2 = (x + y)c = c^2,$$

которые мы можем написать и так:

$$\left. \begin{aligned} u^2 + v^2 &= ea, \\ u^2 - v^2 &= e\sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Итак, обе эти площади должны быть соизмеримы. Это дает условия

$$(I) \quad a \text{ соизмерим с } e,$$

$$(II) \quad \sqrt{a^2 - b^2} \text{ соизмерим с } a.$$

Если эти условия удовлетворяются, то корень из $e(a+b)$ будет опять биномиалью $u+v$.

Если бы вавилонянам пришлось решать систему (5), то они просто возвели бы второе уравнение в квадрат. Тогда они получили бы для u^2 и v^2 сумму и произведение. Греки не могли применить этот метод, ибо квадрат площади уже не имеет геометрического смысла. Поэтому они ввели вспомогательную прямую s и заменили площади u^2 и v^2 отрезками x и y , для которых сумма и произведение известны. В окончательные условия (I) и (II) вспомогательная прямая s

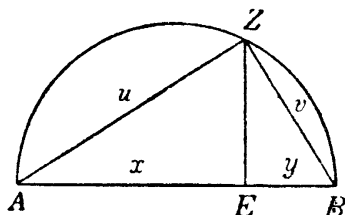


Рис. 84.

уже не входит. Все осложнения в доказательствах происходят только вследствие этого обходного пути: ход мысли очень простой и, в сущности, чисто алгебраический.

Условия (I) и (II) позволяют разделить биномиали на 6 подклассов, которые у Евклида определяются так:

Условие (II) выполнено и

a соизмерим с e , а b нет: *первая биномиаль*;

b соизмерим с e , а a нет: *вторая биномиаль*;

a и b несоизмеримы с e : *третья биномиаль*.

Условие (II) не выполнено и

a соизмерим с e , а b нет: *четвертая биномиаль*;

b соизмерим с e , а a нет: *пятая биномиаль*;

a и b несоизмеримы с e : *шестая биномиаль*.

Условия (I) и (II) и вытекающее из них разделение на 6 случаев можно также выразить при помощи u и v вместо a и b . Согласно (9) условие (II) означает, что $u^2 - v^2$ соизмеримо с $u^2 + v^2$ или, что то же, что u^2 соизмерим с v^2 . Тогда 6 случаев можно различить следующим образом:

Пусть u^2 и v^2 взаимно соизмеримы, но u и v нет и:

случай 1) $u^2 + v^2$ соизмеримо, т. е. u^2 и v^2 оба соизмеримы, но uv нет,

случай 2) $u^2 + v^2$ несоизмеримо, т. е. u^2 и v^2 оба несоизмеримы, но uv да,

случай 3) $u^2 + v^2$ несоизмеримо, т. е. u^2 и v^2 несоизмеримы, и uv тоже.

Пусть теперь u^2 и v^2 несоизмеримы, и:

случай 4) $u^2 + v^2$ соизмеримо, но uv только медиаль,

случай 5) $u^2 + v^2$ — медиаль, но uv соизмеримо,

случай 6) $u^2 + v^2$ и uv оба — медиали, не соизмеримы ни с e , ни между собой.

В предложениях X, 29—35 для каждого из этих шести случаев доказывается, что существуют отрезки u и v , удовлетворяющие этим условиям. Одновременно X, 29—32 служат для того, чтобы доказать существование отрезков a и b , удовлетворяющих или не удовлетворяющих условию (II).

После этого идет длинный ряд предложений (X, 36—72) о свойствах $u+v$ и такой же длинный ряд (X, 73—110) о свойствах $u-v$ для каждого из шести случаев. В случае 1 $u+v$ является биномиалью, а $u-v$ — апотомой, ибо в этом случае выполняются условия (I) и (II). В случае 4 $u+v$ называется «большей», а $u-v$ — «меньшей». Во всех остальных случаях отрезки прямой $u+v$ и $u-v$ получают названия, указывающие, какого рода квадраты они производят; например, в случае 6 $u+v$ именуется «производящей две медиальные

площади», так как квадрат

$$(u + v)^2 = (u^2 + v^2) + 2uv$$

представляет сумму двух медиальных площадей $u^2 + v^2$ и $2uv$.

Все шесть случаев приводят к двенадцати видам иррациональных отрезков $u+v$ и $u-v$, а вместе с медиалью—к тринадцати видам. Все эти отрезки «невыразимы», ибо невыразимы их квадраты, и все тринадцать видов взаимно исключают друг друга, так как квадраты их каждый раз имеют взаимно исключющие свойства. Например, квадрат на медиальном отрезке является медиальной площадью и т. п.

Десятая книга совершенно неудобочитаема. Уже в 1585 году Симон Стевин пишет: «*La difficulté du dixième livre... est à plusieurs devenu en horreur, voir jusqu'à l'appeler le croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer et en laquelle n'aperçoivent aucune utilité*» («Трудности десятой книги... привели многих в ужас, и дело дошло до того, что ее называют крестной казнью математиков, материя сия не поддается угрызению и в ней не обнаруживают ни малейшей пользы»)*).

До X, 28 все еще сносно, но затем с X, 29 начинаются доказательства существования: «Найти два потенциально соизмеримых выражимых отрезка так, чтобы разность построенных на них квадратов равнялась квадрату на отрезке, соизмеримом с большим из них» и т. п., и тут уже действительно не легко понять, к чему все это нужно. Автор удивительно умеет скрывать ход своих мыслей; начиная построения, он не вводит даже понятия о биномиали, которое могло бы как-то прояснить цель его построений, и только уже в самом конце он дает разделение биномиалей на шесть видов.

Кто же этот автор? Не тот ли самый Теэтет, который ввел медиаль, биномиаль и апотому, а также определил и исследовал десять остальных иррациональностей, или, быть может, эти последние были добавлены позже?

Мне кажется, что это должно быть произведением одного математика. Все исследование тринадцати иррациональностей представляет собой нечто единое. Одна и та же основная мысль проходит через всю книгу, одни и те же методы доказательства применяются во всех случаях. Предложения X, 17—18 об измеримости корней квадратного уравнения даются до введения биномиали и апотомы, хотя они не применяются, пока не появляются высшие

*) *Oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, ou sont insérées les Mémoires Mathématiques esquelles s'est exercé le Très-haut et Très-illustré Prince Maurice de Nassau etc.* (Математические произведения Симона Стевина из Брюгге, к которым присовокуплены Математические Сочинения, в которых изволил упражняться Высочайший и Превосходительнейший принц Мориц Нассауский и т. д.), Leiden, 1654, стр. 10а. [Дело идет о Морице Оранском, штатгальтере Нидерланд. (Прим. перев.)]

иррациональности. Теория биномиали и апотомы почти неотделимо связана с теорией десяти высших иррациональностей.

Следовательно, вся десятая книга есть труд Теэтета.

Это заключение подкрепляется, кроме того, близкой связью между десятой и тринадцатой книгами. Последняя книга содержит

Теорию правильных многогранников

Схолия к XIII книге гласит

«В этой, тринадцатой книге разбираются пять так называемых платоновых тел, которые, однако, открыты не Платоном, ибо три из названных пяти тел, а именно куб, пирамида и додекаэдр, происходят от пифагорейцев, а октаэдр и икосаэдр введены Теэтетом. По имени Платона они названы потому, что он упоминает их в „Тимее“. Эта книга носит также имя Евклида, потому что он принял ее в свои „Начала“».

Смысл этой последней фразы, очевидно, в том, что Евклид не сам обработал эту книгу, а взял ее целиком из более древнего произведения. Действительно, как заметил Таннери, вся XIII книга производит впечатление полностью законченного самостоятельного произведения. Она начинается с двенадцати предложений о золотом сечении и вписанных в круг правильных пятиугольнике и треугольнике. Эти теоремы уже были даны в книгах II и IV, но теперь все это делается заново и по-другому.

Если бы Евклид сам написал XIII книгу, то он, конечно, воспользовался бы чертежом из II, 11 (деление прямой в крайнем и среднем отношениях), что значительно сократило бы рассуждения.

«То и дело неявно получают результаты, которые уже совершенно явно были выражены в книге II», правильно замечает Дейкстергейс*). Автор XIII книги, очевидно, знал методы «геометрической алгебры», но не был знаком с систематическим ее изложением в книге II.

Напротив, он должен был основательно знать содержание X книги, ибо он постоянно употребляет ее классификацию иррациональностей. Так, XIII, 11 гласит: *«Если в круг с выразимым диаметром вписать равносторонний пятиугольник, то сторона этого пятиугольника будет иррациональным отрезком, который называется меньшей»*. Аналогично в XIII, 16—17 говорится, что ребро правильного икосаэдра, вписанного в заданный шар, будет «меньшей», а ребро додекаэдра — апотомой.

Так XIII книга отсылает к X, но имеет место и обратное, ибо очень вероятно, что поводом к тщательному изучению и классификации иррациональностей в X книге было как раз то

*) См. E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, II, Groningen, 1930, стр. 250.

обстоятельство, что эти иррациональности снова появляются в качестве сторон правильных многоугольников и многогранников. Сторона пятиугольника в современном обозначении равна $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, что в классической терминологии можно формулировать так: она равна стороне квадрата, площадь которого равна разности между соизмеримой и медиальной площадями. И тут встает вопрос: выразимы ли величины подобного рода и возможно ли их представить в виде биномиали или апотомы? Отсюда и возникла теория X книги.

Итак, мы видим: автор XIII книги знал выводы X книги, и наоборот, теория X книги была разработана именно для приложений в XIII книге. Отсюда неизбежно заключение, что обе книги принадлежат одному и тому же автору. Имя его мы уже знаем: Теэтет. Энциклопедия 14-го века *Σωidas* — «Suda», обыкновенно называемая Свидой—Suidas *) указывает под рубрикой «Теэтет», что этот автор впервые писал о так называемых пяти телах (или что он первый построил их).

Наш вывод подкрепляется еще неоспоримым сходством стиля и методов доказательства. Книга XIII, как и X, пользуется преимущественно методами геометрической алгебры; пропорции в обеих книгах встречаются очень редко. В обеих книгах геометрические построения искусно переплетены с алгебраическими вычислениями. Автор ничего не сообщает о ходе мыслей, которым при помощи алгебраического анализа он пришел к своим построениям. Он начинает с другого конца: он сперва строит (быстро и просто, но не совсем ясно) величины, полученные им при помощи алгебраического анализа, конструирует из этих величин искомую фигуру (например, один из правильных многогранников) и затем в конце доказывает, что эта фигура как раз обладает требуемыми свойствами (например, что около нее может быть описан шар с единичным диаметром).

В качестве примера для этого метода разберем построение правильного тетраэдра в шаре заданного диаметра АВ (предложение XIII, 13). Вначале сразу объявляется, что квадрат на диаметре будет в полтора раза больше, чем квадрат на стороне «пирамиды», т. е. тетраэдра. Чтобы быстро и изящно построить эту сторону и другие величины, необходимые для построения пирамиды, автор делит заданный диаметр АВ точкой Г в отношении 2 : 1 (рис. 85), чертит на АВ полукруг, восставляет в Г перпендикуляр, пересекающий полуокружность в Δ, и проводит АΔ. Тогда $АΔ^2 =$

*) Сuida — византиец, автор греческого энциклопедического словаря. Эта энциклопедия представляет важный памятник византийской учености, дающий ценные сведения о древних писателях. Некоторые авторы относят этот словарь к 10-му веку—эпохе расцвета византийской учености при Македонской династии. (Прим. перев.)

$= \frac{2}{3}AB^2$, т. е. AD есть искомая сторона, AG —высота пирамиды, а GD —радиус окружности, описанной около основания. Все это автор, очевидно, уже знает заранее, но не выдает нам, как он это нашел. Затем в круг с радиусом GD он строит равносторонний треугольник, восстанавливает в его центре перпендикуляр, равный AG , и заканчивает построение пирамиды. После этого он доказывает, что ее грани суть равносторонние треугольники и что весь многогранник можно вписать в шар с диаметром AB .

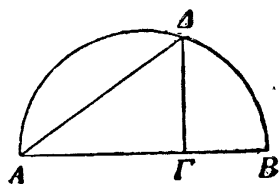


Рис. 85.

Очень красиво построение икосаэдра. Сначала при помощи полукруга заданного диаметра d строится такой отрезок $BD=r$ (рис. 86), чтобы

$$r^2 = \frac{1}{5}d^2$$

После этого в круг с радиусом r вписывается правильный пятиугольник $EZHOK$. Середины дуги EZ и всех остальных образуют второй правильный многоугольник $AMNEO$, так что OE будет стороной s_{10} правильного десятиугольника. В точках

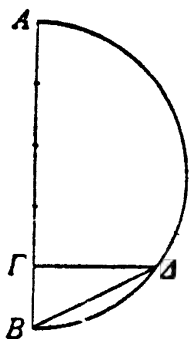


Рис. 86.

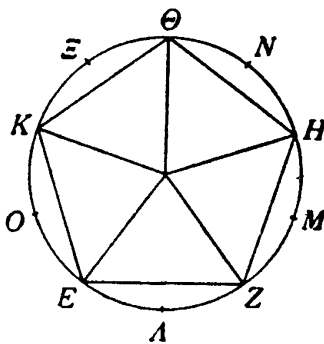


Рис. 87.

A, M, N, E, O восстанавливаются перпендикуляры к плоскости пятиугольника, каждый из которых равен r . В плоскости, параллельной плоскости чертежа, получается опять правильный пятиугольник $ПРСТУ$. Вершины последнего соединяются каждая с двумя соседними вершинами первого пятиугольника; таким образом получается венец из десяти треугольников, по доказанному равносторонних. Наконец, полученное тело сверху и снизу закрывается двумя правильными пятигранными пирамидами с высотой s_{10} . Ребра этих пирамид равны стороне пятиугольника

$$\sqrt{s_{10}^2 + r^2} = s_5.$$

Таким образом, все грани икосаэдра суть равносторонние треугольники и расстояние между двумя противоположными вершинами

всюду равно

$$r + 2s_{10} = \sqrt{5r^2} = d,$$

так что полученное тело может быть вписано в шар с диаметром d .

Читателя, интересующегося построением додекаэдра, мы отсылаем к Dijksterhuis, Elementen van Euclides, II или к самому Евклиду.

Часть книги, принадлежащая Теэтету, заканчивается предложением относительно сравнения величин ребер пяти тел. Евклид прибавляет еще, что, кроме упомянутых пяти, нельзя построить никакого тела, ограниченного равностронними и равноугольными, равными друг другу многоугольниками. В такой формулировке, как замечает Дейкстергейс, предложение неправильно, а само доказательство ниже предшествующих по логической строгости. Я не вижу никаких оснований приписывать это добавление Теэтету; оно действительно очень слабо связано с предшествующим.

Учение о пропорциональности у Теэтета

Мы могли заимствовать из «Начал» формулировки предложений X, 5—6 Теэтета, однако, это невозможно сделать для доказательств. Доказательства, которые дает Евклид, содержат логические ошибки, за которые мы не можем считать ответственным Теэтета. Кроме того, эти доказательства основываются на теории пропорциональности, изложенной по Евдоксу в V книге, которой Теэтет, вероятно, еще не знал.

Пятое определение V книги гласит: «Говорят, что величины находятся в том же самом отношении (первая ко второй и третья к четвертой), если одинаковые кратные первой и третьей величин при сравнении с одинаковыми кратными второй и четвертой, независимо от того, какие именно кратные берутся, будут всегда или обе больше, или равны, или меньше каждой из двух соответственно и в той же самой последовательности».

Таким образом, пропорция

$$a : b = c : d$$

означает, что

$$\text{из } na > mb \text{ следует } nc > md,$$

$$\text{из } na = mb \text{ следует } nc = md$$

$$\text{и из } na < mb \text{ следует } nc < md,$$

как бы ни были выбраны целые числа m и n .

Это остроумное определение, как мы сейчас увидим, принадлежит Евдоксу. Когда Теэтет в очень юном возрасте нашел предложения X, 5—6 и X, 9, то он не мог еще пользоваться этим

определением. Он должен был исходить из другого определения пропорциональности.

Более древнее определение в VII книге таково: «Числа пропорциональны, если первое от второго будет таким же кратным, или такой же частью, или такими же частями, как третье от четвертого». Оно приложимо к числам, но не к несоизмеримым отрезкам, ибо если два отрезка a и b не имеют общей меры, то a по отношению к b не может быть ни кратным, ни частью, ни частями. Таким образом, это определение не могло быть использовано Теэтетом для его несоизмеримых отрезков. Не могу себе представить, однако, чтобы такой острый логик, как Теэтет, мог наивно пользоваться понятием отношения, не применяя отчетливого определения. Но тогда из какого же определения пропорциональности он исходил?

На это бросает свет замечательное место из «Топики» Аристотеля (158 b):

«В математике также бывает, что трудности в доказательстве на каком-нибудь чертеже получаются вследствие недостатка в определении; так, например, в доказательстве, что прямая, отсекающая площадь и параллельная одной из сторон (параллелограмма), делит в одинаковом отношении и пересекаемую линию и площадь. Если же, однако, высказать определение, то упомянутое утверждение становится тотчас же очевидным, ибо площади и стороны имеют тот же самый *antanaireisis*; это и есть определение того, что значит «в том же самом отношении».

Площадь, о которой здесь говорится, очевидно, представляет собой параллелограмм (или даже прямоугольник), а утверждение заключается в том, что площади, на которые прямоугольник делится прямой, проведенной параллельно основанию, пропорциональны частям, на которые делится высота. Если обозначить эти части через b и c , то в данном случае дело идет о том, чтобы доказать, что

$$ab : ac = b : c.$$

Это Аристотель называет «тотчас же очевидным», если дано «определение». Ясно, что речь идет об определении понятия пропорциональности, потому что определения понятий прямоугольника, параллельности и т. д. не имеют в данном случае значения. Таким образом, по Аристотелю, рассматриваемое определение должно было гласить две площади и два отрезка пропорциональны, если площади и отрезки имеют тот же самый антанайресис.

Но что такое антанайресис? Словарь выводит *'antanaireisis* от глагола *ἀντ — αν — αἰρῆν*, буквально «против взаимно снимать», специального термина, который употребляется для денежных сумм, например при составлении баланса. Комментатор Александр Афродизский говорит при этом, что Аристотель под антанайресисом подразумевает то же самое, что *ἀνθιφαίρεσις*. Это помогает нам,

идти дальше, потому что глагол $\alpha\nu\theta\iota\phi\alpha\rho\iota\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ означает у Евклида (VII, 2 и IX, 2—3) «попеременное вычитание» меньшего от большего из двух чисел или прямолинейных отрезков при нахождении общей наибольшей меры.

На основании этого толкования Цейтен, Дейкстергейс и Беккер независимо друг от друга дали следующее объяснение словам Аристотеля. Определение пропорциональности, которое имеет в виду Аристотель, таково: две величины a и b пропорциональны величинам c и d , если антанайресис—попеременное вычитание меньшей из большей—для a и b протекает совершенно так же, как для c и d , т. е. когда a можно вычесть из b (или b из a) такое же число раз, как c из d (или d из c), и точно так же для остатков и т. д. При этом определении действительно становится «тотчас же очевидным», что прямоугольники ab и ac пропорциональны b и c , так как, если высоту b можно некоторое определенное число раз отнять от высоты c , то такое же число раз и прямоугольник ab можно отнять от прямоугольника ac , и т. д.

При таком определении пропорциональности можно легко доказать ряд свойств пропорций, например, что из равенства

$$a : b = c : d$$

следует:

$$c : d = a : b$$

и

$$b : a = d : c$$

и

$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

и для $a > b$

$$(a - b) : b = (c - d) : d.$$

Но с одним свойством возникает затруднение, а именно с перестановкой средних членов. И самое любопытное заключается в том, что, по Аристотелю, как раз доказательство этого свойства первоначально и приводило к затруднениям. «Первоначально,—говорит Аристотель («*Analytica posteriora*» I 5)*,—это предложение доказывалось отдельно для чисел, отрезков прямой, тел и промежутков времени. Когда же было установлено общее понятие, охватывающее как числа, так и отрезки, тела и промежутки времени (т. е. понятие величины), стало возможным доказать это предложение вообще».

Доказательство для чисел можно найти в VII книге «Начал» (VII, 13). Но как же велось это старое доказательство для отрезков прямой?

*) См. русский перевод «Аналитики», М., 1952, стр. 190—191. (Прим. перев.)

Относительно этого О. Беккер*) предложил остроумную гипотезу. Сначала из пропорции

$$a : b = c : d \quad (1)$$

выводили равенство площадей

$$ad = bc, \quad (2)$$

затем меняли местами b и c и снова переходили к пропорции

$$a : c = b : d. \quad (3)$$

В последней стадии как раз удобно воспользоваться предложением о прямоугольниках, о котором говорит выше Аристотель:

$$a : c = ad : cd, \quad (4)$$

так как из (4) и (2) следует:

$$a : c = ad : cd = cb : cd = b : d.$$

На основании цитированных отрывков Аристотеля можно считать весьма вероятным, что (3) действительно так и выводилось из (2).

При выводе (2) из (1) нужно еще одно предложение. А именно из (1) следует:

$$ad : bd = a : b = c : d = bc : bd,$$

и теперь остается доказать еще вспомогательное предложение

Р. Если в пропорции последующие члены равны, то равны и предыдущие члены (ad и bc).

При доказательстве предложения *Р* необходима так называемая «лемма Архимеда», которая гласит:

Q. Если A и B — сравнимые величины (например, два отрезка) и A менее B , то некоторое кратное nA будет более B .

Лемма Архимеда обычно применяется Евклидом в такой форме:

*Р**). Пусть A и Γ будут сравнимые величины и A более Γ . Если отнять от A часть, большую ее половины, затем от остатка — часть, большую его половины, и так далее, то когда-нибудь остаток окажется меньше Γ .*

А это в точности первое предложение *X* книги, написанной Теэтетом. Отсюда ясно, что мы на правильном пути. Действительно, для какой цели стоит здесь это предложение *X*, 1? Оно в *X* книге применяется исключительно для доказательства предложения *X*, 2, которое гласит:

*) О. В е к к е р, *Eudoxos-Studien*, Quellen u. Studien, [B] 2 (1933), стр. 311.

**) Каким образом из *Р* выводится *Р*, показал в цитированном сочинении О. Беккер.

Если из двух неравных величин вычитать поочередно меньшую из большей и если при этом остаток никогда не будет измерять предшествующий ему, то эти величины несоизмеримы.

Доказательство X, 2 при помощи X, 1 очень изящно, но совершенно нетрудно доказать X, 2 и не применяя X, 1, например так: если бы величины A и B имели общую меру E, то при попеременном вычитании остатки были бы всегда кратными E, и при этом постоянно уменьшающимися кратными, и, следовательно, ряд остатков должен был бы оборваться после некоторого конечного числа ступеней.

Таким образом, для предложения X, 2 нет надобности в X, 1, как во вспомогательном предложении; но тогда зачем же нужно X, 1? Конечно, для доказательства предложения P, на котором в свою очередь строится учение о пропорциональности.

Итак, теперь все ясно. Теэтет, очевидно, начал свою книгу с изложения теории пропорциональности, основанной на определении через антанайресис. Как обычно, он начал с установления вспомогательных предложений, которые ему понадобятся в дальнейшем: к их числу принадлежало R=X, 1. В предложениях X, 2—3 излагалась теория бесконечно продолжающегося или имеющего конец антанайресиса, причем одновременно давался критерий соизмеримости или несоизмеримости двух отрезков прямой или площадей. Затем, вероятно, следовало учение о пропорциональности на основании того определения через антанайресис, на которое ссылается Аристотель. Эту часть Евклид опустил, так как в V книге он уже дал другую теорию пропорциональности. Почему отдали предпочтение именно этой новой теории (принадлежащей Евдоксу), ясно из только что приведенного отрывка из «Analytica posteriora» Аристотеля. В дальнейшем Теэтет на основании теории пропорциональности развил свою теорию «выразимых» величин и их отношений (X, 4—5 и X, 9—13). В этой части Евклид заменил доказательства другими, причем методику доказательства заимствовал у Архита и его школы. Следующую затем основную часть X книги, которая трактует о тринадцати видах иррациональных отрезков, Евклид, в сущности, оставил без перемен; он и его последователи только добавили несколько менее важных предложений и замечаний для облегчения этого крайне трудного раздела.

Еще более великим и прославленным, чем Теэтет, был его младший современник, один из самых выдающихся людей своего времени,

ЕВДОКС КНИДСКИЙ

Евдокс был знаменит не только как математик, но и как медик, а прежде всего как астроном; кроме того, он был замечательным оратором, философом и географом. Друзья в шутку называли его Eudoxos знаменитый.

По Хронике Аполлодора, позднейшему классическому сочинению по хронологии, «расцвет» Евдокса относится приблизительно к 368 году, откуда следует, что он родился около 400 года. После 53-летней жизни он умер высокочтимым законодателем в своем родном городе Книде на Черном море*.

Он изучал математику у Архита в Таренте и медицину у Филистиона в Сицилии. На 23-м году жизни он приехал в Афины изучать философию и риторику. Он был так беден, что ему пришлось поселиться в гавани Пирея, откуда нужно было — два часа туда и два часа обратно — ходить в Академию Платона. Через несколько лет его друзья помогли ему совершить путешествие в Египет. От спартанского царя Агесилая он получил рекомендательное письмо к фараону Нектанебу. Говорят, что в Египте он изучал астрономию у жрецов в Гелиополе и производил наблюдения в обсерватории между Гелиополем и Керкесурой, которая все еще существовала в эпоху императора Августа. После этого он в Кизике на Мраморном море основал школу, которая привлекла большое количество учеников. Около 365 года он еще раз приехал в Афины с учениками; в это время он пользовался большим уважением и рассуждал с Платоном о философских вопросах, об идеях и о высшем благе. По платоновскому учению об идеях, последние не содержатся в чувственно воспринимаемых вещах, но находятся выше их; чувственные предметы созданы по образцу идей. Евдокс, наоборот, полагал, что идеи являются причинами вещей в том смысле, что они «примешиваются» к чувственно воспринимаемым предметам и обуславливают образ их бытия; так, например, чистый белый цвет имеется в видимом белом цвете, обуславливая его белизну**). Далее, он учил, что высшим благом является наслаждение и радость, «ибо к ним стремится все живое». Это никоим образом не значит, что он был защитником легких нравов; наоборот, по свидетельству Аристотеля, он был образцом умеренности, доброты и силы характера. Но Платон не соглашался с евдоксовым толкованием идей и с его учением о наслаждении как о высшем благе; в «Филебе» он оспаривает эти учения целым рядом аргументов.

Отсюда видно, что хотя философские воззрения Евдокса были очень близки к платоновским, все же в ряде вопросов он являлся противником Платона. Рассказ Диогена Лаэртца о том, что Евдокс и Платон были врагами, наверно, преувеличен, точно так же как и противоположное сообщение Страбона, что Евдокс был любимцем Платона. Насколько мы знаем из лучших источников, к характеру обоих этих людей скорее подходило бы то, что они уважали друг друга, спорили между собой и вместе работали на благо дорогих им обоим наук.

*) Книд находится на юго-западе Малой Азии (*Прим. перев.*)

**) См. O. Becker, *Eudoxos-Studien*, V. Quellen u. Studien z. Gesch. Math., [B] 3 (1936), стр. 389.

Это видно также из следующего сообщения, которое достойный Симпликий заимствует у астронома Созигена. По Евдему, Платон поставил перед астрономами задачу: при помощи каких равномерных упорядоченных круговых движений можно «спасти», т. е. объяснить, планетные явления. Первым, кто дал решение этой задачи, был Евдокс.

Евдокс как астроном

Скьяпарелли по данным Симпликия и Аристотеля смог почти полностью восстановить замечательно остроумную планетную систему, предложенную Евдоксом. Как исключительно остроумно была построена эта система, можно видеть из нижеследующего краткого обзора: дальнейшие подробности можно найти в работе Скьяпарелли *).

Шарообразная Земля покоится в центре. Вокруг этого центра вращаются 27 концентрических сфер. Внешняя сфера несет неподвижные звезды, а другие служат для объяснения движения Солнца, Луны и пяти планет. Для каждой планеты необходимо четыре сферы, для Солнца и Луны—по три.

Движение трех концентрических сфер, управляющих движением Луны, описать нетрудно. Самая крайняя из этих трех сфер делает оборот за один день вокруг полюсов экватора, как и сфера «неподвижных звезд», и в своем движении увлекает обе следующие сферы. Это объясняет, что Луна участвует в суточном движении звезд. На этой первой сфере лежит наклонный круг; это—эклиптика. Вторая сфера увлекается движением первой и, кроме того, имеет медленное вращение в том же самом направлении вокруг полюсов эклиптики: это движение служит для объяснения «отступления узлов» лунной орбиты. На этой второй сфере находится большой круг, слегка наклоненный к эклиптике: это—орбита Луны. Вокруг полюсов этого круга вращается третья сфера, которая, кроме того, участвует в движениях двух других; эта сфера и несет Луну. Период вращения этой третьей сферы есть драконический период Луны. Неравенства лунного движения, кроме «отступления узлов», в этой системе не объясняются.

Модель для Солнца вполне аналогична лунной. Но особенно остроумно построена модель планетных движений. Рассмотрим для примера четыре концентрические сферы Юпитера.

У самой внешней сферы опять только одно движение—вместе с неподвижными звездами. Вторая участвует в нем, и, кроме того,

*) L. Schiaparelli, *Die homozentrischen Sphären des Eudoxos*, Abh. Math. 1, Leipzig, 1877. См. также Th. Heath, *Aristarchos of Samos*, Oxford, 1913.

у нее есть еще второе движение, у третьей их три и у четвертой—четыре. Вторая сфера вращается вокруг полюсов эклиптики противоположно суточному движению; этим объясняется сидерическое обращение Юпитера в 11—12 лет. Вращения третьей и четвертой сфер служат для объяснения прямого и попятного движений Юпитера. Скорости их вращения одинаковы, но противоположны по направлению; время обращения равно синодическому периоду Юпитера (13 месяцев). Полюсы, вокруг которых третья сфера вращается по отношению ко второй, лежат на эклиптике; но полюсы четвертой не совпадают с ними (тогда оба эти противоположных движения уничтожили бы друг друга); ось вращения четвертой сферы наклонена по отношению к оси третьей. Это ведет к тому, что эти противоположные вращения не вполне погашают друг друга, но производят, складываясь, некоторое периодическое движение.

Для того чтобы наглядно представить это колебательное движение, лучше всего, как это сделал Скьяпарелли, сначала полностью отвлечься от первого (суточного) и второго (двенадцатилетнего) вращений и рассматривать только третье и четвертое, которые совершаются оба в одно и то же время—в тринадцать месяцев. Полюсами третьего движения будут, как сказано, две неподвижные точки на эклиптике, так что вращение происходит перпендикулярно эклиптике. Эта перпендикулярная составляющая движения в большей своей части уничтожается четвертым, ей противоположным, движением, ось которого наклонена к оси предыдущего. Следовательно, плоскость вращения четвертого движения—мы сказали бы его экваториальная плоскость—будет наклонной к плоскости вращения третьего движения. Она не является неподвижной, но принимает участие в третьем движении. Планета, укрепленная на экваториальной плоскости четвертой сферы, производит вследствие этого резко выраженное движение взад и вперед в плоскости эклиптики и одновременно более слабое движение по широте перпендикулярно эклиптике. В обоих этих движениях вместе траектория планеты получает форму лежащей восьмерки, большая ось которой лежит на эклиптике (рис. 88). Как показал Скьяпарелли, эту кривую можно получить в результате пересечения шара с тонким, касающимся к поверхности шара, цилиндром *); она называется гиппопедой—лошадиной кривой.

Вследствие медленно идущего вперед движения второй сферы центр этой лежащей восьмерки проходит за 11—12 лет всю эклиптику, производя вблизи последней петлеобразное движение вперед и назад, которое очень похоже на движение Юпитера по отношению к неподвижным звездам.

*) Недавно О. Нейгебауэр дал гораздо более простое доказательство этого в «Scripta Mathematica» 19 (1953).

Если добавить к этому суточное вращение сферы неподвижных звезд, в котором Юпитер также участвует, то весь механизм четырех вращающихся сфер будет перед нашими глазами.

Каллипп еще улучшил эту систему, добавив еще по две сферы для Солнца и Луны и по одной для каждой из остальных планет. Аристотель принял эти улучшения и добавил еще «вращающиеся назад» сферы*). Но все эти поправки не устраняют основного

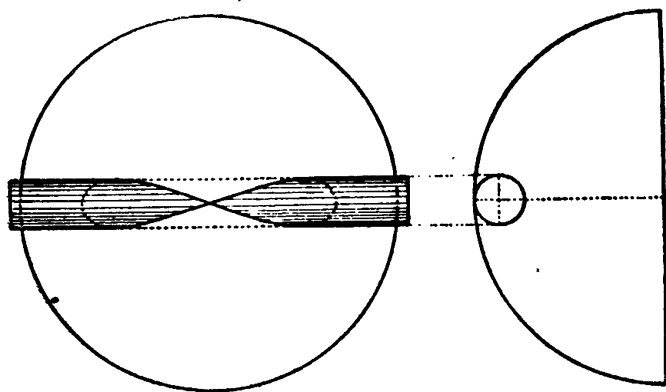


Рис. 88. Гиппопеда, кривая пересечения шара с цилиндром, изображенная спереди и сбоку.

недостатка системы, а именно, что она не может объяснить изменений в блеске планет, так как их расстояния от Земли согласно этой модели остаются неизменными.

Еще большую известность, чем своей теоретической астрономией, которая имела крупный успех в кругах специалистов, но через полвека была вынуждена отступить перед другими, более совершенными системами, Евдокс получил благодаря своему описанию звездного неба, а также восходов и заходов неподвижных звезд. Значительную часть этого сочинения занимали данные относительно двенадцати знаков зодиака и звезд, которые восходят и заходят одновременно с начальными и конечными точками этих знаков, ибо это было важно для определения времени ночью, поскольку точных часов не имелось. Все эти данные Евдокс, несомненно, получил при помощи вращающейся модели небесной сферы, именовавшейся *σφαῖρα* **). Одно из двух таких произведений, посвященных описанию звездного неба, «Явления» («Phainomena») ***), было позднее

*) Сферы, при помощи движения которых выключались движения вышележащих сфер по отношению к рассматриваемой. (Прим. перев.)

**) Об устройстве и истории этой *σφαῖρα* см. R. B ö k e r, *Die Entstehung der Sternsphäre Arats*, Ber. sächs-Akad. Wiss., 1952.

***) Содержание известно главным образом из критики Гиппарха (In Arati et Eudoxi phaenomena commentarii, изд. Manitius), а также из поэмы Арата.

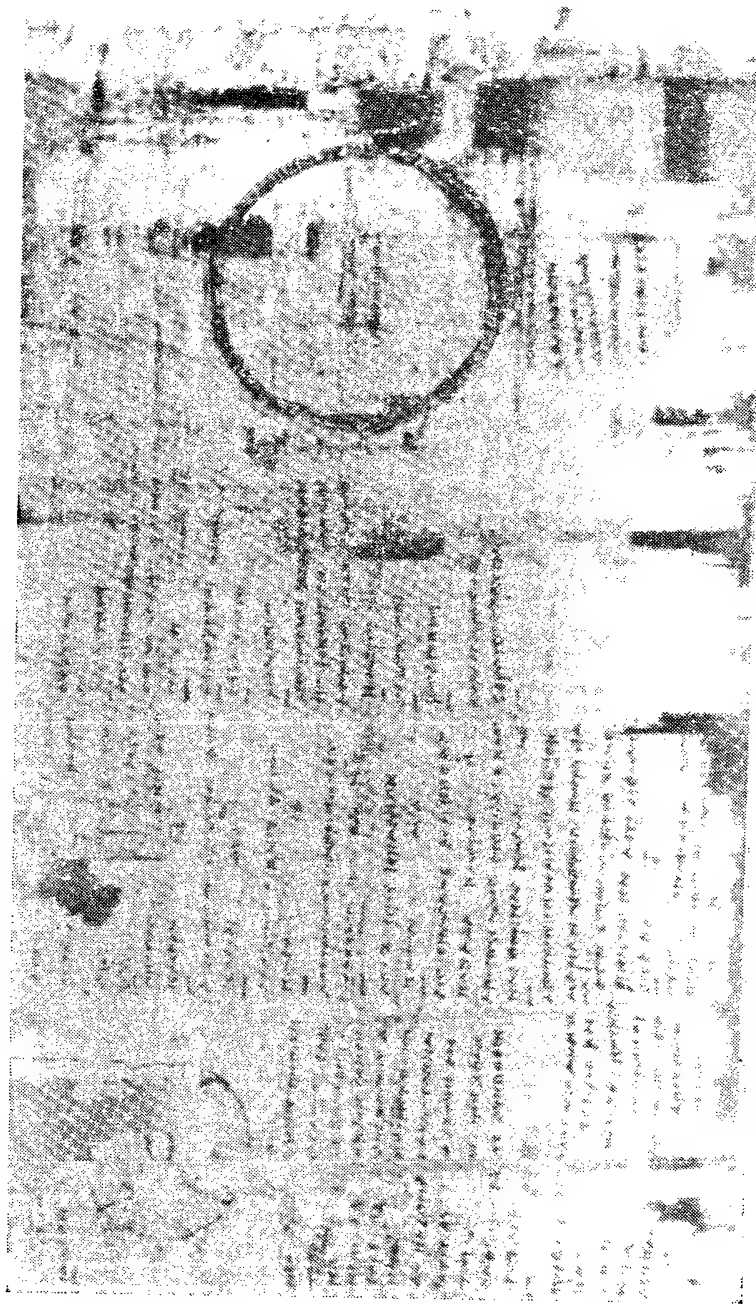


Рис. 89. «Искусство Евдокса». Часть греческого папируса (теперь в Дрезде), написанного в Египте между 331 и 111 до н. э. под заглавием «Деяния Делтины». Полуциркуль астрономический текст. Пами Делтина находится в предпоследней строчке. В последнем столбце мы видим круг, изображающий небо, на нем написаны названия двенадцати знаков зодиака. Три предшествующих столбца (ст. 21—23 папируса) содержат извлечение из календари Евдокса с добавлениями из календарей Демокрита, Евклемона и Каланина. Так, в строчках 3—8 столбца 23 мы читаем: «От осеннего равноденствия до зимнего солнцестояния по Евдоксу 92 дня, по Демокриту 91 день, по Евклемону 90 дней, по Каланину 89 дней». В столбце 22, строчках 7—8, мы читаем: «От захода Ориона до захода Сириуса два дня». Столбцы 21—23 составляют наиболее ценную часть «Пекций»: весь остальной текст и рисунки достаточно примитивны. На задней стороне имеются 12 строчек стихов, начальные буквы которых составляют слова «Искусство Евдокса». См. P. T a n e r y, Mém. scientifi., II, стр. 407 и K. W e i t z m a n n, Illustrations in Roll and Codex, стр. 49.

переложено на стихи поэтом Аратом, получило большую известность, очень ценилось всюду в античном мире и было переведено на новые языки. Хотя известный астроном Гиппарх (около 150 до н. э.) резко критиковал «Phainomena» Евдокса и Арата, это ничуть не повредило их популярности.

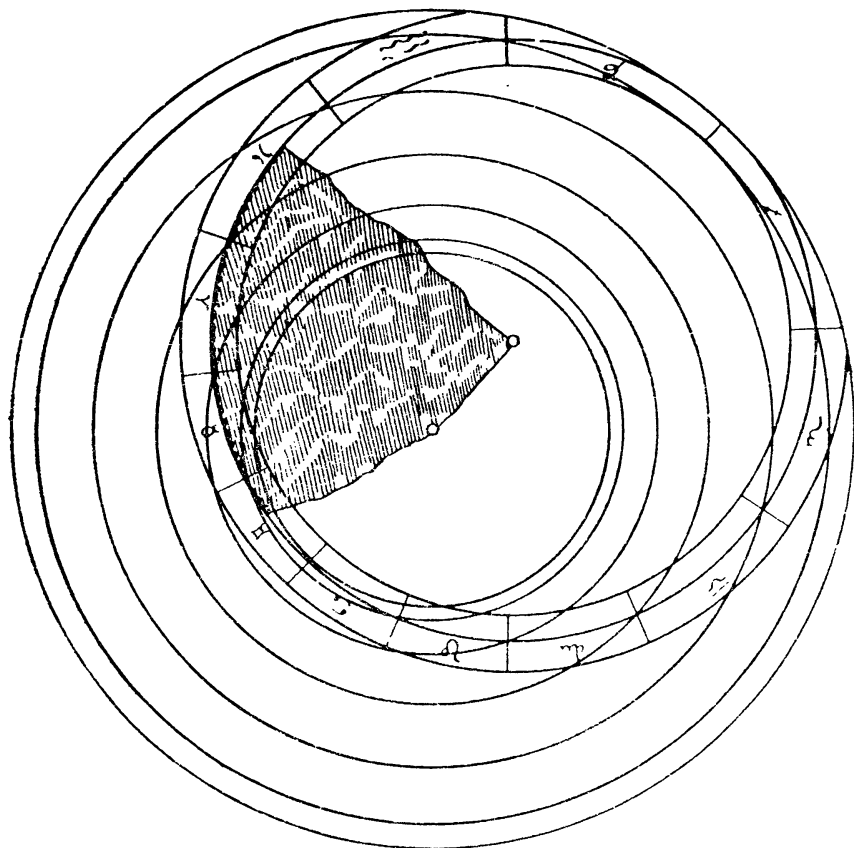


Рис. 90. Реконструкция Зальцбургского бронзового диска.

Затем Евдокс составил постоянный календарь с данными относительно начала и конца видимости важнейших неподвижных звезд, предсказаний погоды, а также равноденствий и солнцестояний. Отрывок из этого сочинения под названием *Εὐδόξου τέχνη* («Искусство Евдокса») сохранился на папирусе*).

Евдокс, должно быть, изобрел какой-то астрономический инструмент, именно «арахну» («паук», по-гречески**). [Впрочем, Витрувий, которому мы обязаны этим указанием, добавляет:

*) См. изображение на рис. 89, а также статью A. Rehm, *Parapegmi* в Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie des Klassischen Altertums*.

**) См. об этом P. Tannery, *Histoire de l'astronomie ancienne*, а также дополнение у H. Michel, *Traité de l'Astrolabe*, Paris, 1947.

«Другие, однако, уверяют, что это Аполлоний (изобрел паука)»*). А что же это за паук? **).

Существует астрономический инструмент, называемый астролябией, который был в большом ходу у арабов и персов. Одна из таких астролябий—великолепный образчик персидского мастерства, относящийся к 1223 году,—изображена на рис. 91. Подвижной диск, немного напоминающий паука, представляет часть этого прибора; в греческих сочинениях об этом инструменте он так и называется «арахной». На арахне мы видим эксцентрический круг, изображающий эклиптику и несущий несколько стрелок-указателей, которые носят имена ярких неподвижных звезд. Весь «паук» есть не что иное, как «стереографическая проекция» части неба, т. е. центральная проекция из южного полюса на экваториальную плоскость. Можно заставить прибор воспроизводить суточное вращение неподвижных звезд; это достигается вращением «паука» в кольце, которое его окружает.

Под пауком можно видеть вынимающуюся пластинку, на которой выгравированы круги. Один из них изображает горизонт, а другие—параллельные горизонту круги, соответствующие различным высотам. Все эти круги изображены в стереографической проекции; стереографическая проекция круга всегда является тоже кругом. При использовании инструмента на других географических широтах эту пластинку необходимо заменить другой.

Астролябия дает возможность решать многие задачи. Так, например, произведя наблюдение высоты звезды или Солнца, поворачивают паука, пока стрелка-указатель с именем этой звезды или точка эклиптики, соответствующая данному положению Солнца, не совпадут с кругом наблюдаемой высоты. Таким образом, можно определить время днем или ночью ***).

Птолемей и Теон Александрийский написали трактаты об этой астролябии ****).

Существует еще и другой, довольно близкий к астролябии инструмент, в котором точно так же имеется «паук». Это некоторого рода «указатель бурной погоды», приводимый в движение механическими или гидравлическими приспособлениями. Римский архитектор Витрувий описал его, а в Зальцбурге был найден большой бронзовый диск, вполне соответствующий этому описанию

*) См. советское издание Витрувия с комментариями Барбаро, стр. 327 и 335. (Прим. перев.)

**) Начинаясь в квадратных скобках текст добавлен в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

***) Дальнейшие подробности читатель может найти в книге Мишеля «Трактат об астролябии».

****) Исследования об этих трактатах и дальнейшие ссылки на литературу можно найти в статье О. Нейгебауэра *Early History of the Astrolabe*, Isis 40 (1949), стр. 240.



Рис. 91. Персидская астролябия, построенная около 1223 н. э. Мохаммедом ар-Рашиди (Оксфордский музей истории науки). Внешнее кольцо разделено на 360 градусов. Диск, просверленный в различных местах («паук»), вращается в этом кольце. Острия «паука» указывают звезды, эксцентрический круг представляет эклиптику. «Паук» может вращаться, подражая суточному вращению небесной сферы. Угол поворота, а следовательно, и соответствующее время могут быть отсчитаны на кольце. Под пауком видна пластинка, на которой начерчены круги (их будет 30 только на верхней половине), представляющие горизонт и параллельные круги, соответствующие различным высотам. Эта пластинка не поворачивается при вращении «паука». При наблюдении высоты звезды (или Солнца) вращают паука, пока изображающая данную звезду стрелка-указатель не ляжет на линию, соответствующую наблюдаемой высоте. К задней части прибора прикреплен диоптр для наблюдений высоты. Когда прибором не пользуются, его подвешивают вертикально за колечко. Прибор представляет греческое изобретение: он основан на принципе стереографической проекции.

(рис. 92)*). В этом приборе «паук» был сделан в виде проволоочной сетки, изображающей горизонт и часовые линии, а вращающийся

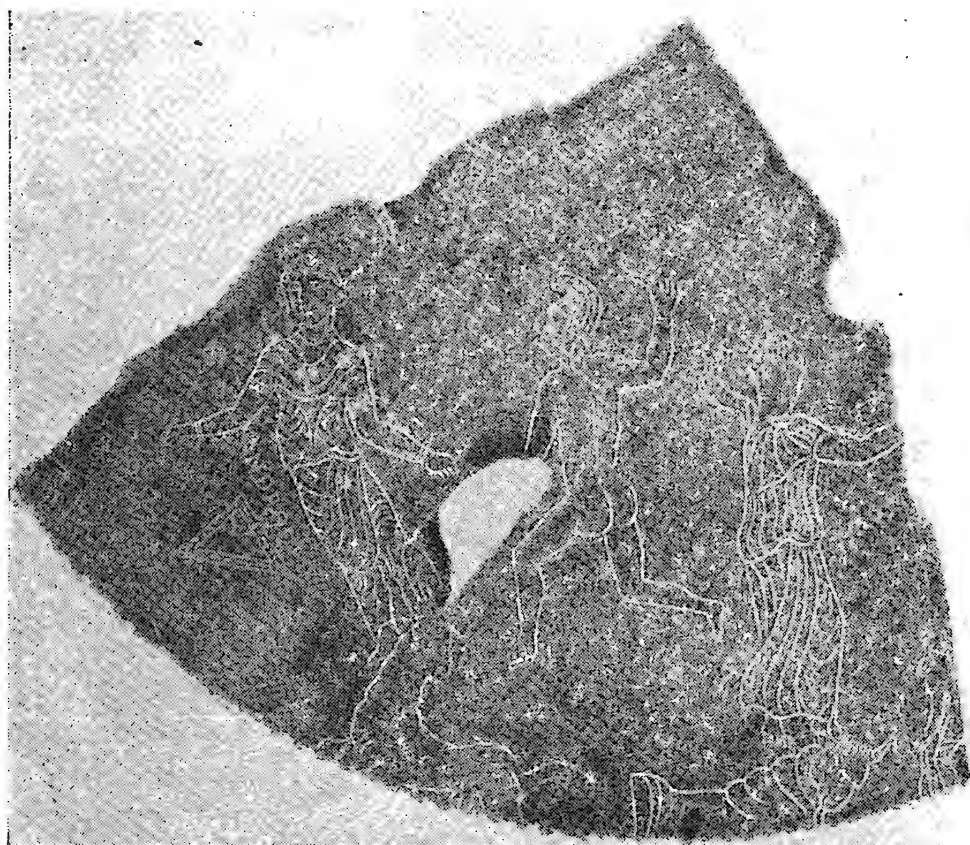


Рис. 92. Бронзовый диск, найденный в Зальцбурге. Это — часть циферблата римских водяных часов, реконструированных А. Ремом (см. рис. 90.). Весь диск имел в диаметре 1,22 м. Он приводился в движение силой воды и делал одно обращение в сутки. Окружность, по которой диск обломан, представляет эклиптику. На этой окружности были 182 или 183 дырочки, каждая на 2 дня в году. Изображающую Солнце шишечку надо было каждые два дня передвигать из одной дырочки в другую. Час дня указывался положением этой шишечки относительно часовых линий «паука», который помещался перед вращающимся диском.

диск за ним изображал небо со знаками зодиака (рис. 90), как раз наоборот тому, что имело место в астролябии. Оба прибора основаны на принципе стереографической проекции**).

*) См. A. R e h m, *Zur Salzburger Bronzenscheibe*, Jahreshefte Österr. archäol. Inst. Wien 6 (1903), стр. 41.

**) Цитируемое место Витрувия имеется в русском переводе с комментариями Барбаро, стр. 337, 339—340, чертеж на стр. 343. «Все часы обозначаются медными проволоками, расходящимися... из центра по медной стороне часов. На ней нанесены круги, обозначающие границы месяцев. За этими проволоками находится барабан, на котором нанесено и нарисовано небо с зодиакальным кругом; барабан посажен на ось, соединенную с механизмом во-

Человек, открывший этот принцип, должен быть большим математиком. Наши источники называют в качестве изобретателей Авраама, Евдокса, Аполлония, Гиппарха и Птолемея. Я думаю, что это был Аполлоний, но этим изобретателем с одинаковым успехом мог быть Евдокс или Гиппарх. Птолемей, конечно, исключается, потому что Витрувий жил примерно за 130 лет до него.]

Евдокс был не менее знаменит как медик, но об этом мы ничего больше не знаем. Среди его географических работ имеется «Путешествие вокруг земли», где, между прочим, содержатся рассказы об основании некоторых городов. Но нам уже давно пора вернуться к самому важному—к его математическим работам*).

Математические работы Евдокса

Как уже было упомянуто выше, Евдокс решил задачу удвоения куба при помощи «изогнутых линий»; однако этого решения мы не знаем.

Впрочем, вообще источники наших сведений о математическом творчестве Евдокса очень скудны. Несмотря на это, в настоящее время исследователи почти единогласны во всех существенных пунктах относительно того, что следует приписать Евдоксу.

В особенности неясно указание Прокла каталога, что Евдокс «умножил число так называемых общих теорем». Может быть, Прокл понимает под этим предложения книги V «Начал» относительно величин вообще и их отношений, которые одинаково справедливы для отрезков прямой, площадей, углов и пр.? Однако можно, кроме того, думать, что термин «общий» относится к «общим понятиям» (или аксиомам), которые перечислены следующим образом в начале I книги «Начал».

«Величины, равные одной и той же, будут равны и между собой. И если к равным прибавить поровну, то будут равными и суммы. И если от равных отнять поровну, то и остатки будут равны. И величины, совмещающиеся друг с другом, равны. И целое больше своей части».

Уже Аристотелю были известны «так называемые общие аксиомы», которые лежат в основе всех точных наук и которые неизбежно должны быть приняты каждым, кто ищет знания. В качестве примера он постоянно называет третью из цитированных нами аксиом Евклида. Таким образом, вполне возможно,

данных часов». К этому месту Барбаро еще добавляет: «Паук явился, быть может, таким видом часов, в котором часовые линии пересекаются кругами, показывающими высоту Солнца в соответствии с длиной тени или высотой гномона». (Прим. перев.)

*) Последний абзац в немецком переводе отсутствует. (Прим. перев.)

что эти аксиомы, которые постоянно используются в теории отношений V книги, Евклид заимствовал у Евдокса*).

Дальше Прокл говорит: «Евдокс к трем пропорциям прибавил еще три другие и продолжил начатые Платоном исследования о сечении, пользуясь для этого анализом».

«Сечением» Прокл, вероятно, называет «золотое сечение». Оно разбирается у Евклида трижды: сначала во II книге (предложение 11) в рамках пифагорейской геометрической алгебры, затем в VI книге (предложение 30) вместе с теорией пропорций и, наконец, в XIII книге (предложения 1—6). Эти последние предложения, как мы видели, восходят к Теэтету; поэтому возможно, что предложение VI, 30 было дано Евдоксом.

Немного дальше ведет нас указание Прокла на то, что Евклид в своих «Началах» собрал многие из открытий Евдокса и добавил многое из Теэтета. Работы Теэтета мы уже выделили из текста «Начал»; это книги X и XIII. Содержание книг I—IV (основы планиметрии без теории пропорций) и XI (основы стереометрии) является, несомненно, более древним. Арифметические книги VII—IX мы можем здесь не рассматривать. Таким образом, «открытия Евдокса» мы должны искать в книгах V и VI (теория пропорций) и XII.

Но нельзя ли определить точнее вклад Евдокса? Рассмотрим сначала XII книгу.

Метод исчерпывания

Книга XII начинается с доказательства, что площади двух кругов относятся, как квадраты на их диаметрах (XII, 1—2). Следует помнить, что на этом предложении основываются гиппократовы квадратуры луночек, но Гиппократ еще не мог дать ему строгого доказательства, потому что он не имел строгого определения пропорциональности.

Доказательство XII книги опирается на два столпа: учение о пропорциональности V книги и метод доказательства от противного, в котором рассматривается круг, заключенный между вписанным и описанным многоугольниками, площади которых отличаются друг от друга менее чем на любую заранее данную величину. Метод доказательств такого рода довольно неудачно называют «методом исчерпывания», исходя из представления, что при помощи вписывания многоугольников с постоянно возрастающим числом сторон круг в конце концов должен быть исчерпан. На самом же деле, однако, круг никогда не будет исчерпан; в доказательстве

*) Часть текста, начинающаяся со слов: «Однако можно, кроме того, думать, что..», и два следующих абзаца опущены в немецком переводе. (Прим. перев.)

XII, 2 попытка «исчерпать его», как говорит Дейкстергейс, прекращается после конечного числа шагов и показывается, что оставшаяся от круга площадь меньше произвольно заданной величины.

Это доказательство основывается на X, 1:

«Если даны две неравные величины и из большей вычитается часть, ббльшая половины, а из остатка — снова часть, ббльшая половины, и это повторяется постоянно, то когда-нибудь остается величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин».

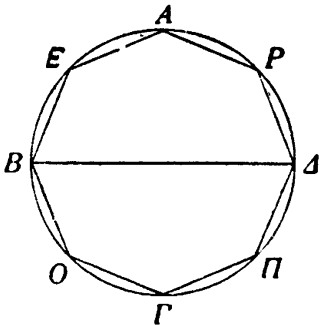


Рис. 93.

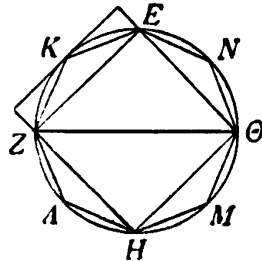


Рис. 94.

Доказательство предложения об отношении площадей двух кругов протекает следующим образом. Предположим, что оба круга не пропорциональны квадратам на диаметрах BA и $Z\Theta$ (рис. 93 и 94); тогда BA^2 должен относиться к $Z\Theta^2$, как первый круг к площади Σ , которая должна быть или больше или меньше второго круга.

Предположим сначала, что Σ будет меньше. Впишем во второй круг квадрат $EZH\Theta$. Он больше половины круга, потому что описанный квадрат как раз вдвое больше вписанного, а круг меньше описанного квадрата. Разделим теперь дуги $EZ...$ в точках K, Λ, M, N и построим восьмиугольник $EKZ\Lambda NM\Theta N$. Тогда каждый из треугольников $EKZ, ...$ будет больше половины соответствующего кругового сегмента, потому что этот треугольник после удвоения обратится в прямоугольник больший, чем этот сегмент круга. Если мы будем так же продолжать и далее, постоянно разделяя пополам дуги, то, наконец (согласно X, 1), у нас должны остаться круговые сегменты, которые вместе взятые будут менее разности между кругом $EZH\Theta$ и площадью Σ . В таком случае вписанный многоугольник окажется более площади Σ . Если теперь в первый круг вписать подобный многоугольник $A\epsilon BOГПAP$, то BA^2 будет относиться к $Z\Theta^2$, как многоугольник в первом круге к подобному многоугольнику во втором круге. Таким образом, первый круг относится к площади Σ , как многоугольник в первом круге к многоугольнику во втором. Переставив средние члены,

получим:

Первый круг : первый многоугольник = Σ : второй многоугольник.

Но первый круг больше первого многоугольника, а Σ меньше второго многоугольника, и мы приходим к противоречию.

Случай, когда Σ больше второго круга, может быть приведен к первому, если поменять местами оба круга; следовательно и этот случай также приводит к противоречию.

Таким образом, площади обоих кругов относятся друг к другу, как $B\Delta^2$ и $Z\Theta^2$, что и требовалось доказать.

В начале этого доказательства молчаливо принимается, что четвертая пропорциональная существует; то же самое повторяется во всех подобных доказательствах XII книги. В этом нет необходимости: при помощи немного более тонкой формулировки рассматриваемого доказательства можно было обойтись и без этого допущения. Но, несмотря на это несовершенство, доказательство остается научным достижением, поистине заслуживающим восхищения. В нем вполне отчетливо содержится современное понятие о пределе: вписанные многоугольники приближаются к кругу в самом строгом смысле, так что разность между ними может быть сделана меньше произвольно заданной площади.

Предложение X, 1, которое применяется в этом доказательстве, опирается на молчаливо принятый постулат, который Архимед в «Шаре и цилиндре» формулирует следующим образом:

«Из неравных отрезков площадей и тел бóльшая таким образом превосходит меньшую, что разность, будучи прибавляема к самой себе, может превзойти любую заданную величину из класса величин, сравниваемых между собой»*).

В «Квадратуре параболы» Архимед формулирует тот же постулат для площадей и добавляет, что еще и древние геометры пользовались этой «леммой»:

«ибо**) при помощи этой леммы они доказали:

1. круги находятся между собой в двойном отношении их радиусов,
2. шары находятся между собой в тройном отношении их радиусов,

*) Сравни у Дейкстергейса: *Archimedes I*, стр. 139.

**) Это слово «ибо» производит впечатление, что «древние» хотя и употребляли, но точно и до конца не формулировали эту лемму. Евклид тоже ясно ее не формулирует. Но она имеется в скрытом виде в определении 4 книги V: «Говорят, что величины имеют друг к другу отношение, если одна, будучи повторена кратной некоторое число раз, может превзойти другую». Евклид всегда молчаливо принимает, что два отрезка прямой, две площади и т. д. во всех случаях находятся в некотором отношении друг к другу. С другой стороны, Беккер (*Quellen u. Studien z. Gesch. Math.* [B] 3, 1936, стр. 242) указал, что эта лемма ясно высказана у Аристотеля («Физика», 206b 11).

3. каждая пирамида составляет третью часть призмы с теми же основанием и высотой, и при помощи подобной же леммы они доказали:

4. каждый конус составляет третью часть цилиндра с теми же основанием и высотой».

То, что Архимед приписывает здесь «древним геометрам», в точности есть краткое изложение содержания XII книги. Действительно, предложения XII, 3—7 приводят как раз к результату, названному в пункте 3, предложение XII, 10 выражает то же самое, что и 4, а XII, 18—то же самое, что и 2. Остальные представляют собой или следствия этих четырех основных предложений или подготовку к ним. И доказательства действительно каждый раз опираются на эту упомянутую Архимедом лемму.

Кто же, однако, изобрел этот метод доказательства? Не кто иной, как Евдокс. Действительно, в предисловии к сочинению «О шаре и цилиндре» Архимед приписывает именно Евдоксу доказательства предложений 3 и 4.

Как образец евдоксова остроумия я кратко изложу доказательство (3) для пирамиды.

Подготовкой служит предложение XII, 3 (рис. 95):

Каждая трехгранная пирамида $ВАГ\Delta$ может быть разделена на две равные и подобные пирамиды $АЕН\Theta$ и $\Theta К\Lambda\Delta$ и две равные призмы $ВЗКЕН\Theta$ и $НЗГ\Theta К\Lambda$, которые вместе взятые превышают обе пирамиды вместе.

Затем идет XII, 4:

Если даны две трехгранные пирамиды с одинаковыми высотами и каждая разделена на две призмы и две пирамиды, как указано выше, то вместе взятые призмы в первой пирамиде относятся к вместе взятым призмам во второй пирамиде, как основания данных пирамид.

Доказательство основывается на том, что призмы с одной и той же высотой относятся, как площади оснований. Это легко получается как следствие из доказанных ранее предложений.

После этого идет заключительное предложение:

XII, 5. *Трехгранные пирамиды с одной и той же высотой относятся, как площади их оснований.*

Доказательство при помощи метода исчерпывания совершенно аналогично доказательству XII, 2. Вместо вписанных многоугольников выступают призмы, которые получаются при последовательном делении пирамиды. Призмы всякий раз занимают более

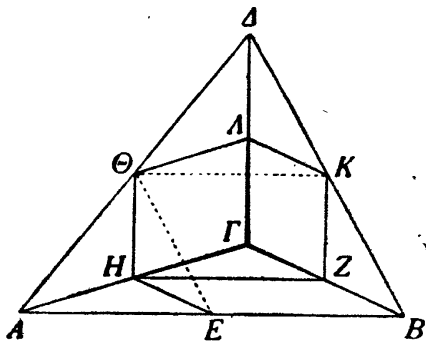


Рис. 95.

половины пирамид, и, таким, образом, получается в конце концов остаток, меньший любого из указанных тел. На этом и основывается доказательство.

В XII, 7 показывается что каждая трехгранная призма может быть разделена на три трехгранные пирамиды, имеющие попарно равные основания и высоты (рис. 96) и, следовательно, равные между собой. Значит, каждая из этих пирамид будет третьей частью призмы, чем и доказывается основной результат для трехгранных пирамид. Для пирамид с произвольным числом граней получаем то же самое, разделяя их на трехгранные.

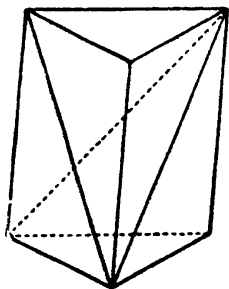


Рис. 96.

Учение о пропорциональности

До сих пор мы могли опираться на Архимеда, но в том, что касается V книги, этот бесспорный авторитет оставляет нас. Правда для V книги имеется схолия неизвестного автора, утверждающая, что «некоторые говорят, что изложенная в этой книге общая теория пропорций была открыта Евдоксом». Однако та же схолия говорит, что книга эта носит «не без основания имя Евклида, так как, по общему суждению, он переработал ее в соответствии с характером „Начал“ и включил ее в систему геометрии».

Этой схолии как будто можно верить, потому что, как мы видели, Прокл тоже приписывает Евдоксу некоторое число «общих теорем»*), а еще и потому, что между V и XII книгами ясно заметно некоторое методическое родство. В обеих книгах постоянно применяются пропорции; основанием той и другой является выше приведенный постулат Евдокса, обе пользуются весьма строго приближениями и неравенствами, которые в конце концов служат для доказательства равенств при помощи приведения к абсурду.

Действительно, схолии к Евклиду обычно хорошо соответствуют тому, что мы знаем из других источников. Поэтому мы со спокойной совестью можем поверить схолиасту и будем приписывать V книгу Евдоксу.

Определения, на которые опирается эта книга, таковы:

О п р е д е л е н и е 3. Отношение есть некоторая связь по величине между однородными величинами.

О п р е д е л е н и е 4. Говорят, что величины находятся друг к другу в (некотором) отношении, если они, будучи взяты подходящее число раз кратными, могут превзойти одна другую.

*) Упоминание Прокла и «общих теорем» в немецком переводе опущено. (Прим. перев.)

О п р е д е л е н и е 5. Говорят, что величины находятся в том же самом отношении, первая ко второй и третья к четвертой, если любые одинаковые кратные первой и третьей будут одновременно обе или больше, или равны, или меньше любых одинаковых кратных второй и четвертой, взятых в соответствующей последовательности.

Это удивительное определение, которое мы уже приводили и объясняли ранее, позволяет Евдоксу мастерски и в полной общности развить теорию пропорциональности для произвольных величин. В качестве дополнения имеется еще

О п р е д е л е н и е 7. Если для тех же самых кратностей кратное первой величины будет больше кратного второй, но кратное третьей не будет больше кратного четвертой, то говорят, что первая имеет ко второй большее отношение, чем третья к четвертой.

То есть если $ma > nb$, но $mc < nd$, где m и n — натуральные числа, то

$$a : b > c : d.$$

На этом определении основывается важное вспомогательное предложение:

V, 8. *Из неравных величин бóльшая имеет к одному и тому же большее отношение, чем меньшая. И то же самое имеет к меньшей большее отношение, чем к большей.*

Доказательство первой части, по Дейкстергейсу, может быть в современных алгебраических обозначениях сформулировано так. Пусть $a > b$, и пусть c будет третья величина, сравнимая с a и b . Некоторое кратное от $a - b$ должно превзойти c

$$k(a - b) > c, \quad (1)$$

и некоторое кратное c должно превзойти kb . Пусть это имеет место для $(m + 1)c$, но еще не для mc :

$$(m + 1)c > kb, \quad (2)$$

но

$$kb \geq mc. \quad (3)$$

Складывая (1) и (3), находим:

$$ka > c + mc = (m + 1)c.$$

Но в силу (2)

$$kb < (m + 1)c.$$

Теперь согласно определению 7 следует:

$$a : c > b : c.$$

Аналогично доказывается и вторая часть.

Из V, 8 при помощи доказательства от противного получается:

V, 9. Величины, находящиеся в равных отношениях к одному и тому же или к которым одна и та же величина находится в одинаковом отношении, равны между собой.

V, 10. Из величин, находящихся в некоторых отношениях к определенной величине, будет большей та, которая имеет большее отношение. И та, к которой определенная величина находится в большем отношении, будет меньшей.

После этих вспомогательных предложений идут основные свойства пропорций. Из определения пропорциональности почти непосредственно вытекает

V, 12. В непрерывной пропорции

$$a : b = c : d = e : f = \dots$$

сумма нескольких предыдущих членов относится к сумме их последующих, как один предыдущий к своему последующему:

$$(a + c + e) : (b + d + f) = a : b.$$

В качестве частного случая (равенство членов) для любого натурального числа m получаем

$$V, 15. \quad ma : mb = a : b.$$

Из V, 8—10 сначала выводится еще одно вспомогательное предложение:

V, 14. Если $a : b = c : d$ и если $a > c$, то $b > d$, и если $a = c$, то $b = d$, и если $a < c$, то $b < d$.

Доказательство. Из $a > c$ по V, 8 следует:

$$a : b > c : b,$$

следовательно, также

$$c : d > c : b,$$

но отсюда по V, 10

$$d < b.$$

Аналогично и в остальных случаях.

И после этого получается сразу для произвольных величин изумительно простым способом в высшей степени важное предложение относительно перестановки средних членов, которое упоминал Аристотель:

V, 16. Если четыре величины пропорциональны, то они будут пропорциональны также и при перестановке.

Из $a : b = c : d$ следует $a : c = b : d$.

Доказательство. Из $a : b = c : d$ следует $ma : mb = nc : nd$. Если, таким образом, ma более nc , то согласно V, 14 и

mb будет больше, чем nd , а если $ma < nc$, то и $mb < nd$, и если $ma = nc$, то и $mb = nd$. Таким образом, $a : c = b : d$.

Разве это не мастерской образец логики?

Остальные традиционные свойства пропорций получаются теперь без всякого труда.

Этим мы заканчиваем изложение важнейших математических достижений великого Евдокса. В какой мере он ответствен за возникновение VI книги (геометрические применения теории отношений), мы не знаем.

Теэтет и Евдокс

Я не в силах противостоять искушению попытаться в заключение сравнить образ мышления двух великих математиков этого периода расцвета—Теэтета и Евдокса. Оба они в высшей степени проницательные логические мыслители, оба исключительно остроумны в изобретении геометрических построений. Но есть и характерное различие: Теэтет мыслит так, что мы теперь назвали бы его «алгебраистом», а Евдокс, наоборот, типичный «аналитик».

Для Теэтета каждый прямолинейный отрезок, рациональный или иррациональный, представляет самостоятельный объект с определенными алгебраическими свойствами; его можно определенным образом построить, он может быть медиалью или апотомой или чем-либо иным, но он во всяком случае резко отличается от других прямолинейных отрезков, как бы они ни были близки друг другу по величине. Для Евдокса, наоборот, прямолинейные отрезки являются непрерывно изменяющимися величинами, которые могут стремиться к пределам и которые с любой степенью точности могут быть выражены при помощи других отрезков. Теэтет определяет отношение через последовательность целых чисел, которые возникают в арифметическом процессе попеременного вычитания. Евдокс, напротив, определяет отношение его местом между двумя рациональными отношениями, заключающими его с обеих сторон. Теэтет определяет стороны правильных многогранников при помощи их алгебраических свойств, на основе их построения. Евдокс заключает круг между вписанными и описанными многоугольниками и при помощи этой «операции» доказывает от противного те свойства, которые он хочет доказать; подобным же образом поступает он и в случае пирамиды, конуса и шара.

После этих двух звезд первой величины наступает очередь младших богов из окружения Платона. Каталог Прокла прежде всего называет Амикла, друга Платона, о котором мы больше ничего не знаем, Менехма и его брата Динострата. Крупнейшим из них был, без сомнения,

МЕНЕХМ,

ученик Евдокса, прославившийся как астроном и математик. По словам Прокла, он увеличил число сфер в планетной системе Евдокса и Калиппа. Он писал об основаниях геометрии, о двух значениях термина «Начало» и о различии между теоремой и проблемой. Когда Александр Великий спросил его, нет ли более короткого пути к геометрии, он отвечал: «О царь, для путешествующих по этой стране есть царские дороги и дороги для простых граждан, но в геометрии для всех одна дорога». То же самое рассказывают еще о Евклиде и царе Птолемею, но первоначальная редакция, пожалуй, скорее относилась к Менехму. Относительно таких анекдотов никогда нельзя знать, что в них действительно верно.

Крупнейшее достижение, которое приписывается Менехму, — это открытие конических сечений, которыми он воспользовался для решения делийской задачи. Мы уже говорили ранее о двух его решениях.

Менехм еще не пользовался терминами «парабола» и «гипербола», которые были введены позднее Аполлонием. Он строил свои кривые при помощи сечения конусов плоскостями, как это ясно из эпиграммы Эратосфена. Старые названия конических сечений были таковы:

- сечение прямоугольного конуса (парабола),
- сечение тупоугольного конуса (гипербола),
- сечение остроугольного конуса (эллипс).

Дело в том, что древние под конусами понимали исключительно конусы вращения и разделяли их в соответствии с углом при вершине на прямоугольные, тупоугольные и остроугольные, каждый вид конуса применяли для получения только одного вида конических сечений, пересекая конус плоскостью, перпендикулярной к образующей конуса*).

Так они получали параболу из прямоугольного конуса, гиперболу — из тупоугольного и эллипс — из остроугольного.

Не известно, как Менехм из этого метода получения сечений выводил «симптомы», т. е. уравнения конических сечений, которые требовались ему для удвоения куба:

$$xy = ab \text{ (гипербола),}$$

$$y^2 = xb \text{ (парабола).}$$

К дальнейшей истории конических сечений мы вернемся ниже, в разделе, касающемся Аполлония.

*) См. Pappos, *Collectio*, VII, 30 и Eutokios, *Kommentar zu den Konika des Apollonius II* (Heiberg), стр. 168.

ДИНОСТРАТ

В большом сборном труде Паппа, который писал, вероятно, при императоре Диоклетиане (284—305 н. э.), сообщается, что Динострат и Никомед пользовались для квадратуры круга некоторой кривой, которая поэтому и была названа квадратрисой (тетраγωνίζουσα). Из других источников известно, что эта кривая была найдена уже Гиппием Элидским, но Динострат, брат Менехма, по-видимому, первый воспользовался ею для квадратуры круга.

Вот как Папп описывает построение этой кривой (рис. 97):

«В квадрат $AB\Gamma A$ впишем дугу круга $BE\Delta$ с центром Γ . Пусть прямая ΓB равномерно вращается вокруг Γ так, что B описывает дугу $BE\Delta$, и пусть, кроме того, BA , оставаясь все время параллельной ΓA , равномерно перемещается по направлению к ΓA . Пусть оба равномерных движения совершаются в одно и то же время, так, что обе прямые ΓB и BA совпадут с ΓA в один и тот же момент. Обе движущиеся прямые будут пересекаться в некоторой точке, и она, непрерывно перемещаясь вместе с ними, опишет некоторую кривую $BZ\Theta$. Если ΓZE представляет некоторое определенное положение вращающейся прямой, а Z — точку ее пересечения с параллельно перемещающейся прямой, то согласно определению $B\Gamma$ будет относиться к перпендикуляру $Z\Lambda$, как вся дуга BA к дуге $BE\Delta$ ».

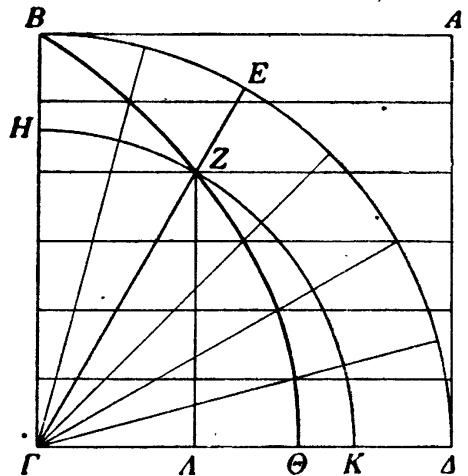


Рис. 97.

Ясно, что, начертив раз навсегда эту кривую, можно ее применять для деления угла на любое количество равных частей. Но она одновременно дает и длину дуги BA четверти окружности, а следовательно, и квадратуру круга. Действительно, Папп доказывает, что дуга ΔEB так относится к прямой $B\Gamma$, как $B\Gamma$ к $\Gamma\Theta$, где Θ — конечная точка квадратрисы.

Доказательство проводится при помощи того же самого непрямого метода, который характерен для евдоксовых доказательств по методу исчерпывания. Если указанная пропорция не имеет места, то четвертая пропорциональная, скажем ΓK , будет или больше, или меньше $\Gamma\Theta$. Если $\Gamma K > \Gamma\Theta$, то описываем около Γ круговую дугу KZH , пересекающую квадратрису в Z , продолжаем ΓZ до E и опускаем перпендикуляр $Z\Lambda$. Но так как ΓK по условию есть четвертая пропорциональная, то

$$\text{дуга } \Delta EB : \Gamma B = \Gamma \Lambda : \Gamma K = \text{дуга } \Delta EB : \text{дуга } KZH;$$

таким образом,

$$ВГ = \text{дуге } KZH.$$

Но по определению квадратрисы

$$ВГ : Z\Lambda = \text{дуга } HZK : \text{дуга } ZK,$$

и так как в пропорции предыдущие члены равны, то будут равны и последующие, откуда

$$\text{дуга } ZK = Z\Lambda,$$

а это невозможно.

Если четвертая пропорциональная менее $\Gamma\Theta$, то мы подобным же образом приходим к противоречию, причем точки Λ и K меняются местами.

Критика, которой, по словам Паппа, Спор подверг определение квадратрисы, кажется мне не вполне справедливой. Спор говорит: как можно определить оба эти равномерных движения, если отношение прямой AB к дуге $BE\Delta$ еще не известно? Ведь скорости именно и должны находиться в этом отношении. На это можно возразить, что оба эти движения, а следовательно, и сама кривая, определены *теоретически*, потому что отношение скоростей теоретически же определено как равное отношению длины отрезка AB к длине дуги $BE\Delta$, и что *практически* кривую легко построить, деля постоянно пополам прямую AB , а также и дугу $BE\Delta$; таким образом можно получить любое количество точек кривой. Итак, ни чисто теоретически, ни с точки зрения чертежника против определения кривой возражать нельзя. Правда, в замечании Спора имеется зерно истины, ибо конечная точка Θ кривой не будет определенной; поскольку к концу движения обе движущиеся прямые совпадают с $\Gamma\Delta$, то определенной точки пересечения не будет существовать. Но, с другой стороны, можно сказать, что точка Θ теоретически вполне определяется соотношением

$$\text{дуга } \Delta EB : ВГ = ВГ : \Gamma\Theta$$

и что практически точку Θ можно с большой точностью определить, проведя плавную кривую через остальные точки. А что эта плавная кривая пройдет как раз через определенную таким образом точку Θ , совершенно строго вытекает из данного Паппом доказательства.

Старательно начертив кривую, я сам получил такой результат:

$$\Gamma\Delta : \Gamma\Theta = 3,14 : 2.$$

Итак, длина окружности определена, но каким же образом можно найти площадь круга, т. е. квадратуру круга? Очевидно, Динострат уже знал предложение, которое позднее было строго

доказано Архимедом, что площадь круга равна площади треугольника, основание которого равно окружности, а высота — радиусу круга, или какое-нибудь иное предложение, равносильное этому.

Настоящим академиком, астрономом по идеалу Платона, был

АВТОЛИК ИЗ ПИТАНЫ

Мы сейчас увидим, что Автолик был старше Евклида. Это вполне согласуется с преданием, что его учителем был Аркезилай, основатель «Средней Академии», которая следовала за старой Академией Платона. Таким образом, мы можем датировать Автолика примерно 320 или 310 годами.

Автолик важен для нас главным образом потому, что он — один из древнейших математиков-астрономов, два произведения которого полностью сохранились. Чтобы правильно оценить тенденцию этих произведений, необходимо сначала вспомнить, что говорит Платон в «Государстве» (книга VII, 529 A) об астрономии как о науке.

Сократ рассказывает, как Главкон сперва хвалил астрономию за ее практическую пользу и как он сам за это высмеивал его, а вот ныне Главкон задумал воспеть на манер Сократа хвалебный гимн астрономии:

«Мне кажется, всякий понимает, что эта наука вынуждает душу человека смотреть ввысь и уводит ее от земных к более высоким материям.

— Конечно,—говорю я,— возможно, что это всякий понимает, но только не я, потому что я думаю иначе.

— А как же?

— Так, как ее ведут нынешние учителя мудрости, она, по-моему, заставляет смотреть вниз.

— Да что ты!

— Мне кажется, что ты весьма вольно толкуешь науку об этих высоких материях. Ты, кажется, думаешь, что, если некто, задрав вверх голову, начнет „изучать“, выпуча глаза, какой-нибудь орнамент на потолке, то он, значит, созерцает это духом, а не глазами! Может быть, ты и прав, а я просто несмысленныш. Но вот, что до меня, так я не могу себе представить, что есть на свете какая-нибудь наука, ведущая душу ввысь, кроме той, что дарует нам знание об истинном и невидимом бытии. И если кто-нибудь думает так дознаться до смысла возвышенных материй, то, глазами он вверх или щурясь вниз, пока он с точки зрения науки рассматривает что-нибудь воспринимаемое чувственно, он никогда, я полагаю, ничего толком не разберет,— я имею в виду то, что относится к истинному знанию, ибо с наукой это ничего общего не имеет; и его душа будет смотреть не вверх, а вниз, даже начини он учиться, лежа на спине, на волнах морских либо на суше.

— Вот я и получил по заслугам!— сказал он.— И упреки твои справедливы. Но как же я должен понимать тебя, когда ты говоришь, что астрономию нельзя изучать так, как это теперь в моде, но надо изучение ее сделать полезным для нашей цели?

— Дело в том,— сказал я,— что все эти искорки, которые красуются на небе, ведь это нечто вроде красиво расписанной поверхности, и, разумеется,

ими можно любоваться, ибо это — самое красивое и лучше всего сделанное из того, что составляет материальный мир. Но нам надлежит распознать хотя бы что-нибудь похожее на правду относительно их движений, т. е. касательно их истинной скорости или медленности, выразить это точно в области истинных чисел и фигур, и то и другое в их отношениях друг к другу и ко всей области их движений. Все это возможно объять только разумом, но не зрением! Или же ты думаешь не так?

— Нет, никогда.

— Так разве не нужно использовать все эти небесные образы и узоры в помощь науке об истинной сущности? Ведь это было бы вроде того, как останавливаешься перед образами, искусно и старательно изготовленными Дедалом или каким-нибудь другим мастером или живописцем. Ведь если какой-нибудь сведущий геометр, рассматривая подобные узоры, найдет, что все это очень красиво сделано, то ведь смешно это рассматривать всерьез и надеяться, что это приведет к некоторой истине вроде равенства, двойного или какого-нибудь иного отношения.

— Конечно, это было бы смешно! — сказал он.

— Ну, не думаешь же ты, — сказал я, — что подлинный астроном будет думать совершенно так же, обращая свой взор к движению звезд? Он охотно допустит, что создатель неба сделал его и все то, что оно в себе заключает, самым изящным образом, сколь это возможно для таких творений, но когда дело дойдет до отношения ночи ко дню, их обоих к месяцу, а месяца к году, а затем и движений других светил к этому и друг к другу, то не приходит ли тебе в голову, что он бы нашел престранным малым того, кто поверит, что все это движется вечно неизменно и без малейших отклонений, невзирая на то, что светила обладают телами и доступны зрению? Разве не будет нелепо искать истину в таких вещах?

— Мне тоже так кажется, — отвечал он, — теперь, когда я все это от тебя слышал.

— Тогда, — сказал я, — будем заниматься астрономией, как и геометрией, для того, чтобы ставить задачи разуму; а то, что находится на небе, оставим в покое...».

Все это звучит очень странно для нас, привыкших к современному эмпирическому естествознанию, но, в сущности, Платон совершенно прав. Теоретическая астрономия, так же как геометрия или механика, рассматривает не действительные небесные тела, но теоретические, идеализированные объекты вроде материальных точек или совершенных сфер, которые движутся в пространстве по математическим законам и которым наблюдаемые небесные тела соответствуют лишь приблизительно.

Что не отвечает нашим современным взглядам, так это то, что такие идеализированные движения Платон называет «истинными». Но это нетрудно понять с его точки зрения. Платон исходит из того положения, что точные суждения могут быть высказаны только относительно идеализированных объектов. О чувственных вещах нельзя знать ничего достоверного, ибо вследствие своей изменчивости они постоянно от нас ускользают. Мы, конечно, можем напасть на след некоторых причин изменения, но никогда не сможем узнать все причины в целом. Поистине, там где нет точно обоснованного суждения, рассуждает Платон, не может быть и никакой «истины».

Истина находится в математике, так как эта наука точная. А истина божественна. «Бог вечно занимается геометрией», — говорит Платон. По образцу истинных, божественных, математически-чистых движений творец, как полагает Платон, и упорядочил видимый мир.

Где же нам найти ту идеальную астрономию, которой требует Платон, геометрию движущихся точек, кругов и сфер? Ведь этой наукой наверняка занимались в Академии. Творения Евдокса и Каллиппа, Гераклида Понтийского большей частью утеряны. Но у нас все-таки есть книга Автолика

О вращающейся сфере,

где мы как раз находим астрономию во вкусе Платона: чистую кинематику точек и кругов на равномерно вращающейся сфере.

Предложение 1 гласит:

«Если сфера равномерно вращается вокруг своей оси, то все точки на сфере, не лежащие на оси, описывают параллельные круги вокруг полюсов, около которых вращается сфера, в плоскостях, перпендикулярных к оси».

В предложении 4 вводится не принимающий участия во вращении большой круг, «ограничивающий» круг ($\sigma\rho\iota\zeta\omega$ — ограничивающий, откуда наше «горизонт»). В предложении 4 этот круг стоит перпендикулярно к оси, в предложении 5 он проходит через полюсы, но, начиная с предложения 6, горизонт является некоторым наклонным кругом. На вращающейся сфере лежит также вращающийся вместе с ней круг, очевидно эклиптика. Действительно, в подобном же сочинении Евклида «Явления» (*Phainomena*), у которого немало точек соприкосновения с Автоликом, этот совместно вращающийся круг открыто называется «кругом, проходящим через середины знаков зодиака». Но Автолик остается всецело на почве абстракций: видимые объекты, вроде зодиакального пояса на небе, полностью остаются вне рассмотрения согласно идеалам Платона. Так, предложение 11 гласит:

«Если некоторый наклонный круг ограничивает видимую часть сферы и если другой наклонный круг касается больших параллельных кругов, чем те, которые касаются ограничивающего круга, то этот второй круг будет иметь свои точки восхода и захода на той части ограничивающего круга, которая заключается между касающимися его параллельными кругами».

Евклид (*Phainomena*, VII) цитирует это предложение так:

«Круг зодиака восходит и заходит в той части горизонта, которая лежит между тропиками, ибо он касается больших кругов, нежели те, которые касаются горизонта».

Если это действительно цитата, то она доказывает, что Автолик жил ранее Евклида. Менее абстрактной является вторая книга Автолика:

О восходе и заходе звезд*)

В этой книге речь идет о Солнце и двенадцати знаках зодиака, о видимых и невидимых восходах и заходах звезд на зодиаке и ниже его. Ту же самую тему рассматривает и Евклид в своих «Явлениях». Евклид, между прочим, доказывает, что некоторые знаки зодиака требуют больше времени для захода и восхода, чем другие.

До изобретения тригонометрии нельзя было далеко уйти от подобных общих положений. Только Гиппарх первый с помощью своих таблиц хорд и тригонометрических вычислений точно определил времена восхода и захода знаков зодиака.

Автолик и Евклид приводят, нередко без доказательств, предложения относительно кругов на сфере. Это навело Гульча на мысль, что сферическая геометрия, или «сферика», существовала еще до Автолика. О том, какова она приблизительно была, можно составить представление на основании сохранившейся до нас, много более поздней «Сферики» Феодосия**), в которой эти предположения даны с доказательствами.

В конце 4-го века вся математика, в том виде, как она изучалась в школе Платона, была собрана в трудах

ЕВКЛИДА,

и притом так, что этому суждено было остаться образцом на целые тысячелетия. Его «Начала» добились одного из самых больших успехов в мировой литературе: весь мир учился по ним геометрии. Еще и в настоящее время в английских школах изучают геометрию по английской переработке «Начал», и школьный учебник геометрии называется в Англии «Евклидом». И действительно, Евклид по заслугам обрел эту славу благодаря своим исключительным дидактическим достоинствам. Он величайший школьный учитель, которого только знает история математики.

Что мы знаем о его жизни? Из одного сообщения Паппа известно, что он преподавал математику в Александрии***). Он был стар-

*) О. Шмидт указал на то, что две «книги», из которых состоят произведения Автолика в издании Гульча, относятся друг к другу, как два независимых, но очень похожих сочинения. См. Olaf Schmidt, *Onzième congrès des mathématiciens scandinaves* (1949), стр. 203.

**) Théodose de Tripoli, *Les sphériques*, trad. P. ver Eecke, Brugge, 1927.

***) Pappos, *Collectio*, VII, 34: «Аполлоний провел много времени в Александрии среди учеников Евклида».

ше Архимеда (который скончался в 212 до н. э.), ибо последний приводит в одном месте предложение из «Начал»^{*)}. Это показывает, что датировка «около 300 года» не так уж далека от истины. Прокл также называет его в своем каталоге современником царя Птолемея I (305—285 до н. э.), которому Евклид осмелился сказать в лицо, что в геометрии не существует особых царских дорог. Паш хвалит в указанном сочинении щепетильную честность Евклида, его скромность и его доброжелательные суждения о тех, кто хотя бы и в небольшой мере содействовал успехам математики. Стобей передает следующий забавный рассказ: «Один из тех, кто только что начал учиться у Евклида геометрии, спросил Евклида, выучив первое предложение: „А что я могу заработать, выучив все это?“ Евклид позвал своего раба и сказал: „Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением“» (*Florilegium*, IV, стр. 205. Ср. у Хизса: Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, 2 изд., I, стр. 3).

Вот и все, что мы знаем об этом человеке. Но гораздо важнее его труды, которые по сию пору свидетельствуют о его необычайном педагогическом даровании. Прекрасным примером этого является тот факт, что трудную теорию пропорций по Евдоксу он откладывает до V книги «Начал», а важнейшие темы школьной геометрии излагает в книгах I—IV без пропорций! Благодаря этому даже ученики средних способностей могут усвоить по крайней мере первые четыре книги, и их не сразу отпугивают вещами, которые им не по силам. Можно привести и много других примеров.

По свидетельству Прокла, Евклид был последователем платоновской школы. И действительно, его произведения всецело примыкают к традициям этой школы. Платон, как это видно из «Государства» и других произведений, предписывал каждому в качестве подготовки к философии изучение четырех наук: арифметики, геометрии, теории гармонии и астрономии. Как раз эти четыре науки излагаются в трудах Евклида: две первые в «Началах», третья в «*Sectio Canonis*», а в книге под названием «*Phainomena*» излагается астрономия в платоновском смысле как учение о равномерно вращающейся сфере.

«Начала»

представляют собой завершение целого ряда произведений подобного рода: таковы «Начала» Гиппократы, Леонта и Февдия, упомянутые в каталоге Прокла. Леонт и Февдий принадлежали оба к кругу платоновской Академии. Поэтому мы можем допустить, что их «Началами» пользовались для преподавания в Академии.

^{*)} Архимед, *О шаре и цилиндре*, I, предложение 2.

Поскольку Аристотель предполагает, что некоторые геометрические предложения известны его слушателям, то ясно, что они встречались в трудах подобного рода. Следовательно, и в этом отношении Евклид продолжает традиции Академии.

Евклид, конечно, не принадлежит к числу великих математиков. Мы уже видели, что наиболее важные и трудные части «Начал» он заимствовал у других авторов, главным образом у Теэтета (книги X и XIII) и Евдокса (книги V и XII). Эти части, как и арифметические книги VII и IX, стоят на очень высоком математическом уровне, другие же, и особенно средняя из арифметических книг (VIII), как и связанное с ней «Sectio Canonis», стоят значительно ниже: в них встречаются логические ошибки и иной раз путаница в формулировках. Научный уровень Евклида, очевидно, определяется уровнем его образцов. Когда он идет за такими перворазрядными учеными, как Теэтет или Евдокс, то он и сам становится превосходным; когда ему приходится копировать менее высокого автора, то становится ниже и его уровень. Евклид прежде всего педагог, но не творческий гений.

Очень трудно сказать, какие собственные открытия были приписаны Евклидом к трудам его предшественников.

В своем комментарии к Евклиду Прокл пишет о доказательстве теоремы Пифагора: «Автор „Начал“ восхищает меня, ибо он не только дал очень ясное доказательство этого предложения, но, что еще более важно, он гораздо более общее предложение шестой книги истолковал с помощью доводов неопровержимых». Отсюда заключили, что доказательство теоремы Пифагора в «Началах» принадлежит самому Евклиду, но для этого вывода не хватает многого. Знал ли Прокл предшественников Евклида? Мог ли он сравнить их доказательства с Евклидовым? Об этом мы ничего не знаем. Правда, можно сказать, что Прокл приписывает самому Евклиду более общее предложение 31 из шестой книги. Это предложение гласит: «В прямоугольном треугольнике любая фигура, построенная на гипотенузе, равна сумме подобных фигур, построенных таким же образом на катетах».

Я должен сказать, что похвалы, которые Прокл расточает Евклиду, кажутся мне несколько преувеличенными. Доказательство предложения VI, 31 «Начал» является «неопровержимым» только для прямолинейных подобных фигур, ибо согласно VI, 20 они относятся, как квадраты на соответствующих сторонах. Для криволинейных фигур следовало бы прибегнуть к методу исчерпывания из XII книги. А кроме того, как замечает Дейкстергейс, даже для прямолинейных фигур это доказательство не является полным.

Следующее предложение VI, 32 тоже сформулировано очень небрежно. Поистине удивительно, что такой выдающийся педагог, как Евклид, иногда так грешит против логики. Однако это, пожалуй, не единственный случай.

Если любознательный читатель захочет поглубже познакомиться с «Началами», то он может воспользоваться прекрасной работой Дейкстергейса или переводами Таэра и Хизса*). Теперь мы скажем несколько слов об остальных трудах Евклида.

«Data»

(«О заданных величинах») имеет важное значение для истории алгебры. Это сочинение состоит из предложений такого рода: если некоторые величины даны или определены, то будут также определены**) и другие величины, например

«Предложение 2. Если определены величина A и отношение $A : B$, то будет также определена и B ».

«Предложение 7. Если определены $A + B$ и $A : B$, то будут также определены A и B ».

В определении 11 вводится понятие «на определенную часть большая в отношении». Величина X называется «на определенную часть большей Y в некотором отношении», если X после вычитания определенной части C имеет к Y определенное отношение:

$$(X - C) : Y = \text{определенной величине.}$$

В современной терминологии можно сказать, что X и Y связаны линейно:

$$X \doteq \alpha Y + C.$$

Предложения 10—21 соответствуют различным операциям, которые возможны для подобного рода линейных уравнений, как, например, подстановки. Как типичный пример мы приведем

«Предложение 19. Если X представляет на определенную часть большую в отношении Y , а Y —на определенную часть большую в отношении Z , то X будет на определенную часть большей в отношении Z ».

Далее идут несложные предложения относительно прямых линий, которые заданы «по их положению», и относительно треугольников, заданных «по форме», например, если даны два угла или один угол и отношение прилежащих сторон. Затем идут аналогичные предложения относительно многоугольников и их площадей, как, например,

«Предложение 55. Если площадь определена по форме и по величине, то и каждая сторона будет определенной по величине».

Здесь, разумеется, мы вступаем в область геометрической алгебры. Предложения 57 и 58 относятся к приложению площадей;

*) На русском языке существует полный перевод «Начал», сделанный Д. Д. Мордухай-Болтовским. (Прим. перев.)

**) Собственно говоря, в тексте всегда стоит «даны», но д-р Дейкстергейс обратил мое внимание на то, что слово «определены» лучше передает смысл этой фразы.

они утверждают, что приложение определенных площадей к определенным отрезкам прямой без недостатка, или с недостатком, или с избытком определенной формы дает определенный результат. Отсюда в предложениях 84 и 85 выводится, что две прямые будут определенными, если определены их разность и произведение или их сумма и произведение. Мы уже говорили ранее об этих предложениях: речь опять идет о древневавилонских типовых задачах:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= a, \\ xy &= F \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= F, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

представленных в геометрическом одеянии.

В предложении 86 рассматривается значительно более трудная система уравнений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} xy &= F, \\ y^2 &= ax^2 + C. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формулировка такова:

«П р е д л о ж е н и е 86. Если две прямые АВ и АΔ образуют определенный прямоугольник и если квадрат на АВ на определенную часть больше в отношении квадрата на АΔ, то АВ и АΔ будут определенными».

Система (3) очень напоминает вавилонские алгебраические задачи. Вавилоняне просто возвели бы первое уравнение (3) в квадрат и получили бы произведение и разность y^2 и ax^2 . В геометрической алгебре это невозможно, но Евклид достигает своей цели, вводя новое неизвестное z .

Именно, для того чтобы отнять от y^2 определенную площадь C , ее «прикладывают» к ширине y , т. е. образуют прямоугольник

$$C = yz.$$

Тогда вместо системы (3) получают три уравнения

$$\left. \begin{aligned} xy &= F, \\ yz &= C, \\ y(y - z) &= ax^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из первых двух уравнений следует, что отношение

$$z : x = C : F$$

определено. Следовательно, определено также и $z^2 : x^2$.

Но на основании третьего уравнения будет также определено и $x^2 : y(y - z)$, а значит, и $z^2 : y(y - z)$ и, тем самым, также

$z^2 : [4y(y - z) + z^2]$, или, что то же, $z^2 : (2y - z)^2$. Таким образом, будет определено отношение $z : (2y - z)$, а значит, и $z : 2y$ и, следовательно, $z : y$, или, что то же самое, $z^2 : yz$. Но yz уже является данным, следовательно, будут даны z^2 и затем z и т. д.

Все это естественно формулируется на геометрическом языке: вместо y , z и $y - z$ Евклид пишет AD , AE и ED (рис. 98). Все остальное я оставил без изменений.

Предложения 88—95 относятся к кругам. Например, 91 и 92 утверждают: если из определенной точки A вне или внутри определенного круга провести прямую, пересекающую этот круг в B и Γ , то прямоугольник $AB \cdot \Gamma B$ будет определенным.

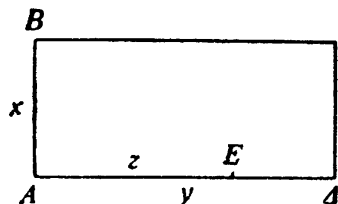


Рис. 98.

Надеюсь, что в общем читатель получил теперь представление о характере «Data».

О делении фигур

Это небольшое сочинение сохранилось только в арабском переводе *).

В нем обсуждается вопрос о том, как можно при помощи прямой, имеющей данное направление или проходящей через данную точку, разделить данную прямолинейную фигуру на две равные части или вообще на две части, имеющие данное отношение. Если данная точка лежит на периметре, то решение совершенно элементарно; если же она находится внутри или вне фигуры, то приходится решать квадратное уравнение, что естественно выполняется посредством приложения площадей. Встречается также известная вавилонская задача: разделить трапецию пополам прямой, параллельной основанию; совершенно так же, как и вавилоняне, Евклид находит, что квадрат на разделяющей прямой равен полусумме квадратов на параллельных сторонах.

Утерянные геометрические произведения

«Pseudaria» (о логических ошибках в математике).

«Konika» (о конических сечениях).

Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ («Поверхности как геометрические места», или «Геометрические места на поверхностях»).

«Porismata». Что это такое?

*) Английский перевод: R. C. Archibald, *Euclid's Book on Division of Figures* (1915).

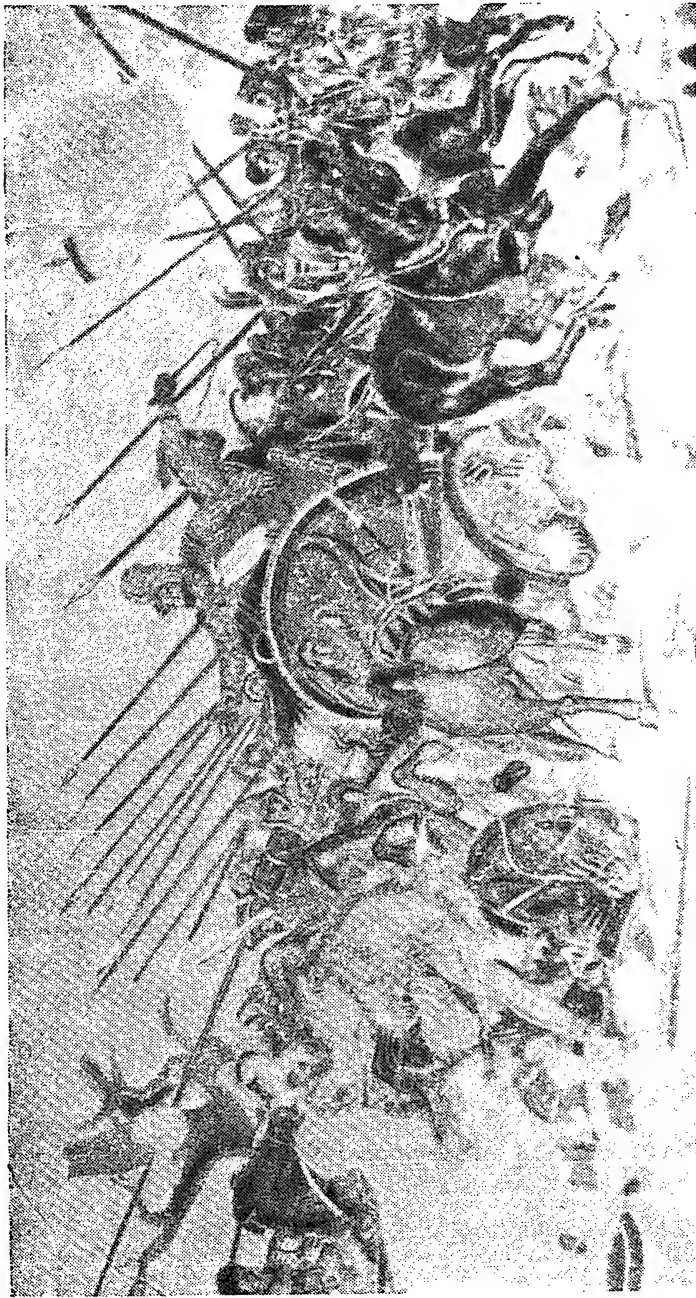


Рис. 99. Битва при Иссе (334 до н. э.) или при Гавгамеле (333 до н. э.): победа Александра Великого над персидским царем Дарием. Мозаика (5,92 м на 3,42 м), найденная в «доме Фавна», большом доме патриция в Помпеях (Национальный музей в Неаполе). Это — сделанная около 100 до н. э. копия знаменитой греческой картины, вероятно, работы Филоксена из Эретрии (конец 4-го века до н. э.). Мозаика выдержана в смягченных коричневатых тонах, вероятно, в подражание «четырегрехоточной технике» оригинала. Во всех отношениях эта работа должна была быть «новинкой» в мире искусства. Стиль очень реалистичен, можно даже сказать натуралистичен. Хотя средства для выражения как очень скромными (изображение фона сводится к одной-единственной черточке — сухому дереву), пространство передано весьма отчетливо. Рисунок является перспективным везде, в особенности в изображении лошадей. Во всей ширине видна только главная фигура — сам Александр. Это перспективное сокращение допускает тесное сближение фигур, чем очень выразительно изображается сеча. Близкая к жестокости передача отчаянного боя очень реалистична, точность изображения оружия, одежды, а также распределение падающего и отброшенного света почти натуралистичны. Лицо перса, падающего навзничь под колесницу Дария, отражается на его лице. Ясно видно, что это произведение искусства появилось в эпоху, когда ревностно занимались прикладной математикой и экспериментальной физикой. Механические и акустические задачи разбиралась в школе Аристотеля, как видно из приписываемого Аристотелю соображения «Проблем». Страгон Лампсакский произволил физическое опыты, Тимохарис и Аристид производили наблюдения Луны и звезд (П т о л е м е й, *Альмагест*, VII, гл. 3). Евклид писал «Оптику» и «Напоптрину» о перспективе и оптических обманах. Эти оптические теории и стремления к точным наблюдениям природы падают документальное подтверждение в этой картине.

По Паппу*), поризмы представляют некоторого рода предложения, занимающие как бы среднее место между теоремами и построениями. Папп дает несколько примеров. Не могу ничего определенного сказать о значении разных попыток восстановить содержание «Поризмов» и выяснить само это понятие**).

Зато сохранились следующие

Сочинения Евклида по прикладной математике ***):

«Optika» — учение о перспективе.

«Katoptrika» — теория зеркальных изображений.

«Sectio Canonis» (Κατάτοιμή κανόνης) — теория музыки.

«Phainomena» — элементарная теоретическая астрономия (вращение небесной сферы, восход и заход отдельных частей эклиптики).

Итак, Евклид поистине охватил своими учебниками всю элементарную математику эпохи Платона. Все античные и современные математики являются его учениками. На нем заканчивается блестящий период расцвета математики, и в то же время с ним и с его александрийской школой начинается следующий и, быть может, еще более блистательный период процветания — время Архимеда, Эратосфена и Аполлония, александрийская эпоха.

*) P a p p o s, *Collectio*, VII, 13 (ed. Hultsch, II, стр. 648).

**) M. C h a s l e s, *Les trois livres des Porismes d'Euclide rétablis* (Paris, 1860). См. об этом Th. H e a t h, *History of Greek Mathematics* I, стр. 431 и сл. и, в частности, S a u c h y, *Les porismes d'Euclide*.

***)) Все произведения Евклида на греческом языке можно найти в прекрасном издании Гейберга и Менге.

ГЛАВА VII

АЛЕКСАНДРИЙСКАЯ ЭПОХА (330—200 ДО Н. Э.)

С гениальным проникновением, но, очевидно, также и с основательным знанием географических отношений и путей сообщения юный герой Александр выбрал место для будущего мирового центра Александрии и положил начало постройке этого города. Прошло



Рис. 100. Идеализированный портрет Александра Великого; герма с вырезанным именем из Тиволи (Луврский музей в Париже). Этот, а также и многие другие портреты Александра представляют копии знаменитого портрета Александра, сделанного придворным скульптором Лисиппом.

немного времени, и Александрия сделалась цветущим торговым городом и в то же время культурным центром самого высокого ранга. Цари Птолемей Сотер, Птолемей Филадельф и Птолемей Эвергет, nasledовавшие один другому с 305 по 222 до н. э., не только создали могущественное государство, но также поистине царственной рукой способствовали развитию искусств и наук. Первый Птолемей основал Музей, вокруг которого собрались поэты и ученые первого разряда, которые и получали из царской сокровищницы очень богатое содержание. Музею принадлежала всемирно прославленная библиотека, в которую Птолемей Эвергет включил целиком книги, собранные Аристотелем и Теофрастом. В Александрию стекались все знаменитейшие люди тогдашнего образованного

мира: филологи (называвшиеся грамматиками), историки, географы, математики, астрономы, философы и поэты.

При этом эллинистическом царском дворе господствовала утонченная культура. Сочинения Гомера были детально изучены и очищены от позднейших вставок, была обоснована научная хронология, развилась и сделалась утонченной поэзия. Астрономы производили точные наблюдения и разрабатывали теории для истолкования наблюдений. Таковы были теории эпициклов и эксцентров.



Рис. 101. Портрет Птолемея II Филадельфа (283—247 до н. э.) и его сестры-супруги Арсиной. Камень из сардоникса (раннеэллинистической эпохи) в Венском музее истории искусства. Особенное впечатление эта камея производит тем, что камень, состоящий из двух и более разноцветных слоев, обработан таким образом, что верхний слой или слой сохранены для изображения и все остальные части обрезаны, так что в качестве фона выступает нижний, более темный слой.

Конечной точкой этой линии развития был большой «*Syntaxis Mathematica*», так называемый «Альмагест» Птолемея (ок. 140 н. э.), но основания всех этих теорий были заложены еще в александрийскую эпоху. Те самые люди, которые добились таких великих успехов астрономии—Аристарх, Архимед, Эратосфен и Аполлоний,—были в то же время и выдающимися математиками своего времени, и математика при них достигла невиданного расцвета. В астрономии Гиппарх (130 до н. э.) и Птолемей завершили работу своих великих александрийских предшественников.

Искусства и наука получили в это время совершенно иной характер по сравнению с классической эпохой. Классические творения

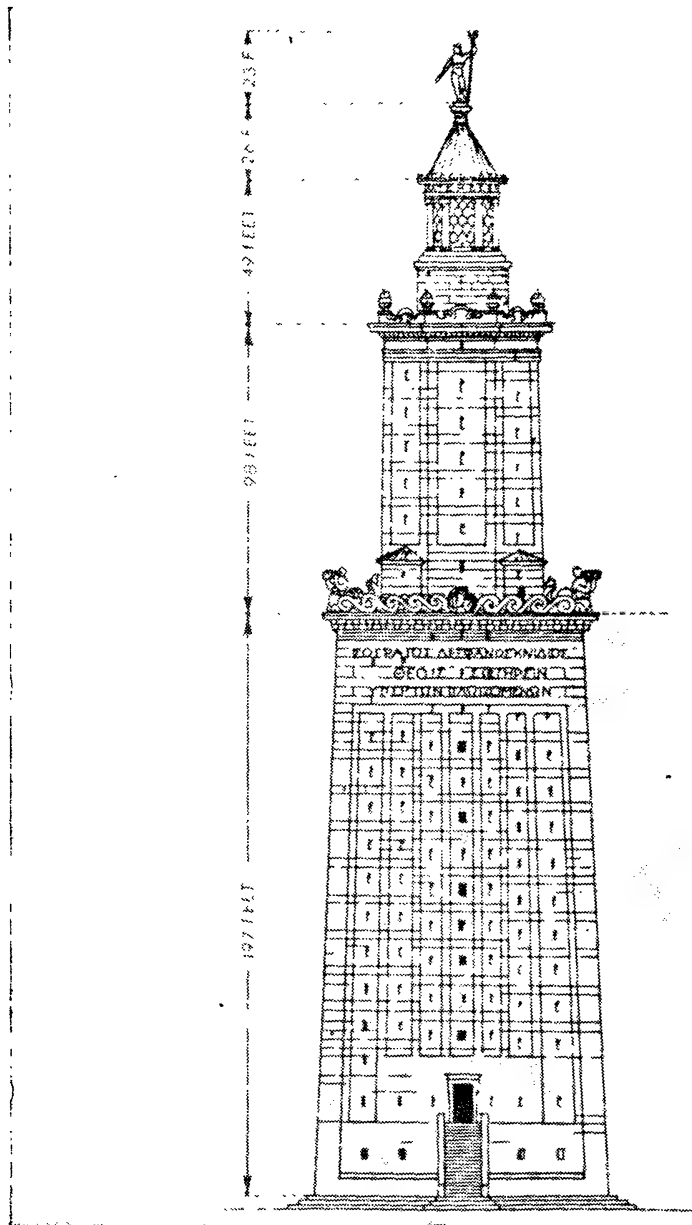


Рис. 102. Маяк на острове Фаросе у Александрии, построенный в эпоху Птолемея Сотера (323—283 до н. э.) Состратом Книдским, прототип всех последующих маяков (сравните французское название «phare»). Высота более 100 м. Закончен ок. 280 до н. э. Здание существовало до 14-го века н. э. Реконструкция Л. Тирша, который основывался главным образом на изображениях на монетах. Наше изображение заимствовано из его книги «Der Pharos von Alexandrien» (1909). Башня представляет блестящий образец совместной работы науки, техники и искусства эллинистического периода. Маяк стоял у входа в гавань Александрии, «самую знаменитую гавань древнего мира». Все еще остается открытым вопрос, служили ли с самого начала маяками эта и ей подобные башни; однако приблизительно около 50 н. э. дело именно так и обстояло. Более древней формой является столб с огнем (гавань Пирея). Высокие башни, не представляющие для нас ничего необычного были для греков немного чуждыми. Соответствующая линия развития начинается на востоке (вавилонская башня и родственные памятники, ликийские гробницы, пирамиды). При Александре Великом положение меняется. Начиная с этого времени, греки тоже выказывают часто свою любовь к колоссальному. Уже галикарнасский Мавзолей (ок. 350 до н. э.) заметно подчеркивает желание расти ввысь. По-видимому, он имеет некоторую связь с башнеобразными гробницами в Малой Азии. Может быть, также прототипами александрийского Фароса послужили персидские сторожевые башни.

Гомера, Пиндара, Софокла писались для всего народа, и ими наслаждался весь народ. Совершенно общедоступные «Истории» Геродота публично читались в Афинах и, по преданию, даже на олимпийских играх. Насколько философия интересовала и даже волновала афинян, можно судить по процессам Анаксагора и Сократа, обвиненных в безбожии. Разумеется, граждане Афин в массе математических трактатов не читали, но все же Аристотель в своих

лекциях по логике имел полную возможность предполагать, что элементарная геометрия его слушателям известна, а Аристофан в своих «Птицах» не



Рис. 103. Александрийская монета (2-й век до н. э.) с изображением александрийского маяка. См. В. Р. W a n e r, *Hellenistische Kultur*, стр. 36, рис. 19.



Рис. 104. Гиерон II Сиракузский (269/8 — 214 до н. э.). Серебряная сиракузская монета Британского музея.

задумался упомянуть о квадратуре круга. В передовых кругах самых влиятельных греческих городов было распространено беспримерное стремление к знанию, настоящий голод по части культуры. Софистам платили по-царски; платонова Академия и школа Евдокса в Кизике привлекали к себе учеников отовсюду. Все понимали, что знание—сила! И на самом деле, разве Александр мог бы завоевать мир без своих технически совершенных военных машин, без целого штаба географов и финансово-экономических советников, без греческого судостроения, строительства мостов и военной организации, без широкого политического образования, полученного от людей вроде Фукидида, Платона и Аристотеля. Всюду, где обитали греки в Малой Азии и на Ионических островах, в Италии, Северной Африке, Элладе и на берегах Черного моря,—всюду процветали искусства и науки, свободно и без помех, одинаково как в счастливые, так и в бедственные времена.

Но в эллинистическую эпоху искусство и наука не были уже всенародным делом; ими занимались лишь ученые и любители искусства из высокообразованных кругов при царских дворах Александрии, Сиракуз, Селевкии. Архимед жил в Сиракузах при дворе Гиерона и его сына Гелона, Эратосфен был хранителем Александрийской библиотеки, Аполлоний жил также в Александрии. Наука была связана главным образом с библиотеками, — изучение книг было основой для усвоения необходимых начал и методов. Но когда царские милости и вспомоществования оскудевали, искусства и науки тоже увядали. После периода расцвета математики в 3-м веке до н. э. наступили целые века упадка, которые лишь изредка прерывались кратковременным подъемом. Мы еще будем говорить о внутренних причинах этого упадка, но внешние обстоятельства совершенно ясны: после Птолемея III у царей уже не было больше денег на науку.

В конце предыдущей главы мы уже говорили о старейшем александрийском математике Евклиде, ибо он представлял собой не столько начало нового расцвета, сколько завершение всего, что ему предшествовало. Теперь мы вступаем в период высшего расцвета древней математики, век проникательного тонкого математика — астронома Аристарха, несравненных гениев Архимеда и Аполлония, многостороннего эрудита Эратосфена и остроумного геометра Никомеда.

АРИСТАРХ САМОССКИЙ

жил в начале 3-го века, ибо в 280 году до н. э. он наблюдал летнее солнцестояние. Как рассказывает нам Архимед в «Исчислении песка», он высказал смелую гипотезу о том, что Земля движется по кругу около Солнца. [Большая часть астрономов, как сообщает нам тот же Архимед, отвергли эту гипотезу. Действительно, можно было (при тогдашнем состоянии механики) привести довольно веские доводы против движения Земли. Доводы эти имеются уже у Аристотеля, а в более подробном виде — у Птолемея. Если бы Земля имела такое невероятно быстрое движение, рассуждает Птолемей, то все, что не связано и не скреплено с ней, должно было бы при движении Земли остаться позади, т. е. казаться улетающим в противоположном направлении. Так, например, все облака, опережаемые движением Земли, должны были бы оставаться позади. Против этого ничего нельзя сказать, оставаясь на точке зрения греческой динамики, ибо греки не знали закона инерции и для каждого движения требовали силу в качестве причины. Если Земля не увлекает облака с собой, то они, разумеется, должны отставать. Что Аристарх отвечал на такие доводы, нам неизвестно.]

Другой аргумент против движения Земли вокруг Солнца сводится к тому, что в таком случае должны были бы непрерывно меняться видимые расстояния неподвижных звезд. Чтобы избавиться от получающейся вследствие этого трудности, Аристарх предположил, что радиус сферы неподвижных звезд настолько велик, что по сравнению с ней орбиту Земли надлежало бы рассматривать просто как точку. Это мы тоже знаем из «Исчисления песка»[*]).

Из произведений Аристарха сохранился только небольшой, но необычайно интересный трактат «О расстояниях Солнца и Луны». Большой заслугой сэра Томаса Хизса было то, что он указал на математическое значение этого трактата, который он перевел и издал с превосходным историко-астрономическим комментарием**). В этом произведении Аристарх, опираясь на некоторые выведенные из наблюдений «гипотезы», строго математически доказывает следующие положения:

1. Расстояние от Земли до Солнца более 18-кратного, но менее 20-кратного расстояния от Земли до Луны.
2. Диаметры Солнца и Луны находятся в том же самом отношении, как и их расстояния.
3. Отношение диаметра Солнца к диаметру Земли больше $19 : 3$ и меньше $43 : 6$.

При доказательстве положения 3 остроумнейшим образом используются наблюдения над затмениями. Мы зашли бы слишком далеко, если бы углубились в подробности, но все же стоит разобрать доказательство предложения 1. Это доказательство очень важно для истории тригонометрии, ибо здесь впервые дается метод получения приближенного значения для синуса малого угла (именно 3°). Он основывается на предположении, что *в тот момент, когда мы видим ровно половину Луны, т. е. когда плоскость большого круга, разделяющая освещенную и темную части Луны, проходит через наш глаз, угол между направлениями к Солнцу и Луне как раз равен прямому углу без $\frac{1}{30}$ его части*. В действительности этот угол равен не 87° , но $89^\circ 50'$, но математический вывод остается таким же изящным. Вкратце он сводится к следующему:

В момент, принятый в этой гипотезе, центры А, В и Г Солнца, Земли и Луны образуют прямоугольный треугольник АВГ, где угол при Г — прямой, а угол при А составляет $\frac{1}{30}$ часть прямого угла (рис. 105). Требуется доказать, что гипотенуза АВ такого треугольника более чем в 18 раз, но менее чем в 20 раз больше катета ВГ.

При доказательстве этого Аристарх пользуется неравенствами, которые в современной терминологии могут быть сформулированы

*) Абзацы, стоящие в скобках, добавлены в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

**) Th. Heath, *Aristarchus of Samos the ancient Copernicus*, Oxford, 1913.

Неравенство с синусами он применяет к хордам двух дуг, соответствующих $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{60}$ окружности круга, или вписанным углам в $d/3$ и $d/30$. Пусть ВК и ВЛ будут эти хорды а ВЕ — диаметр (рис. 107); тогда

$$\begin{aligned} \text{ВА} : \text{ВК} &< 10 : 1, \\ \text{ВЕ} : \text{ВК} &= 2\text{ВА} : \text{ВК} < 20 : 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) доказывают высказанное Аристархом предложение. Рассуждению Аристарха родственен метод, примененный в

«ИЗМЕРЕНИИ КРУГА» АРХИМЕДА

для вычисления периметров вписанного и описанного 96-угольников с точностью, достаточной для доказательства, что окружность круга¹ менее $3\frac{1}{7}D$, но более $3\frac{10}{71}D$, где $D = 2r$ есть диаметр. Хотя мы в дальнейшем еще займемся Архимедом, этот метод я вкратце изложу уже здесь.

Архимед исходит из двух предельных значений для $\sqrt{3}$, не указывая, как они получены*):

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

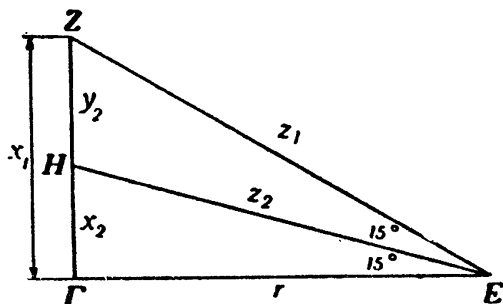


Рис. 108.

Для вычисления стороны описанного многоугольника Архимед исходит из радиуса $ЕГ = r$, касательной $ГZ$ и угла $ГЕZ$, равного $\frac{1}{3}$ прямого (рис. 108). Если положить $ГZ = x_1$ и $ЕZ = z_1$, то получаем:

$$r : x_1 = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153, \quad (6)$$

$$z_1 : x_1 = 2 : 1 = 306 : 153. \quad (7)$$

Если теперь $ЕН = z_2$ есть биссектриса угла $Е$, то отрезки x_2 и y_2 , на которые $Н$ делит сторону $ГZ$, относятся, как стороны r и z_1 , т. е. $r : z_1 = x_2 : y_2$; отсюда следует:

$$(z_1 + r) : (x_2 + y_2) = r : x_2,$$

$$r : x_2 = (z_1 + r) : x_1 > (306 + 265) : 153 = 571 : 153. \quad (8)$$

*) Относительно домыслов по этому поводу: см. С. Müller и О. Toeplitz в Quellen u. Studien Gesch. Math. [B] 2, стр. 281 и 286. Ср. также М. Cantor, *Gesch. der Math.*, I (3-е изд.), стр. 316; Th. Heath, *Hist. of Greek Math.*, II, стр. 51; K. Vogel, *Jahresber. d. Math. Ver.* 41, стр. 5. [На русском языке см. комментарии к XII книге «Начал» Евклида в советском издании, т. III, стр. 210—22. (Прим. перев.)]

Способ, с помощью которого Архимед получает (8), очень напоминает вывод (3) Аристарха. После этого Архимед продолжает так:

$$z_2^2 : x_2^2 = (r^2 + x_2^2) : x_2^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2 = 349\,450 : 23\,409.$$

Итак, поскольку квадратный корень из 349 450 больше $591 \frac{1}{8}$, получаем:

$$z_2 : x_2 > 591 \frac{1}{8} : 153. \quad (9)$$

Теперь угол НЕГ снова делится пополам, и тем же самым способом, как $r : x_2$ и $z_2 : x_2$, вычисляются отношения $r : x_3$ и $z_3 : x_3$:

$$r : x_3 > 1162 \frac{1}{8} : 153,$$

$$z_3 : x_3 > 1172 \frac{1}{8} : 153.$$

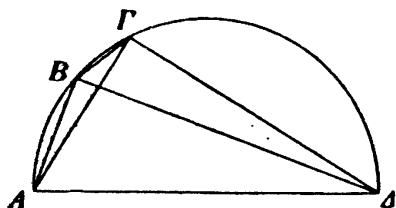


Рис. 109.

Точно так же после следующего деления угла пополам Архимед находит:

$$r : x_4 > 2334 \frac{1}{4} : 153,$$

$$z_4 : x_4 > 2339 \frac{1}{4} : 153,$$

и, наконец,

$$r : x_5 > 4673 \frac{1}{2} : 153.$$

Сторона описанного 96-угольника равна удвоенному отрезку $2x_5$, а $2r$ — диаметр; следовательно, отношение диаметра к периметру 96-угольника больше, чем

$$4673 \frac{1}{2} : (96 \times 153) = 4673 \frac{1}{2} : 14\,688.$$

Но это последнее число меньше, чем первое число, умноженное на $3 \frac{1}{7}$; следовательно, периметр описанного 96-угольника и, тем более, длина окружности будут меньше, чем $(3 + \frac{1}{7})D$.

Тем же способом, рассматривая вписанный 96-угольник, Архимед показывает, что длина окружности будет больше $3 \frac{10}{71} D$.

С неравенствами (1), которые применял уже Аристарх, мы снова встретимся у Птолемея (150 н. э.), где они играют очень важную роль при вычислении его знаменитых

ТАБЛИЦ ХОРД

Птолемей пользуется шестидесятеричной системой*), принимая диаметр круга за 120^p , и прежде всего получает:

сторона вписанного шестиугольника, стягивающая дугу в 60° , равна 60^p ;

сторона вписанного квадрата, стягивающая дугу в 90° , равна $\sqrt{2r^2} = 84^p 51' 10''$;

сторона вписанного треугольника, стягивающая дугу в 120° , равна $\sqrt{3r^2} = 103^p 55' 23''$;

сторона вписанного десятиугольника, стягивающая дугу в 36° , равна $t = \frac{1}{2}(\sqrt{5r^2} - r) = 37^p 4' 55''$;

сторона вписанного пятиугольника, стягивающая дугу в 72° , равна $\sqrt{r^2 + t^2} = 70^p 32' 3''$.

Исходя из этих хорд, можно вычислить хорды дополнительных дуг, так как сумма квадратов обеих таких хорд равна квадрату диаметра. Так, например, для хорды дуги в 144° , являющейся дополнением дуги в 36° , он получает:

$$\text{chd } 144^\circ = 114^p 7' 37'' **).$$

После этого он выводит знаменитую «теорему Птолемея»: прямоугольник на диагонали вписанного в круг четырехугольника равен сумме прямоугольников на двух парах противоположных сторон.

Когда мы учим в школе эту теорему, мы не знаем, зачем она была нужна Птолемею. А она была нужна ему для вычисления хорды ВГ, стягивающей разность двух дуг АВ и АГ, когда даны хорды, стягивающие дуги АВ и АГ, и хорды двух дополнительных дуг ВД и ГД (рис. 109). Таким образом, Птолемей нашел, например, хорду дуги $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$.

Откладывая хорды АВ и АГ в противоположных направлениях, он тем же способом мог вычислить хорду, соответствующую сумме двух дуг. Этот способ вычисления полностью совпадает с нашей формулой

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha.$$

При помощи теоремы Пифагора Птолемей выводит далее еще одну формулу, которая равносильна нашей современной формуле

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha.$$

*) Следуя немецкому переводу Маниция, мы пользуемся обозначениями: $1^p = \frac{1}{120}$ диаметра, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^p$, $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$.

**) chd — обозначение автора для слова «хорда». (Прим. перев.)

Она позволяет вычислить хорду половины заданной дуги. Так он находит последовательно хорды для дуг в 6° , 3° , $1\frac{1}{2}^\circ$ и $\frac{3}{4}^\circ$:

$$\text{chd } 1\frac{1}{2}^\circ = 1^p 34' 15'', \quad \text{chd } \frac{3}{4}^\circ = 0^p 47' 8''.$$

Для того чтобы вычислить хорды дуг в 1° и $\frac{1}{2}^\circ$, он выводит следующее предложение:

Если в круге проведены две неравные хорды, то отношение большей хорды к меньшей меньше отношения соответствующих дуг.

Мы видели, что Аристарх уже знал это предложение и пользовался им для вычисления $\sin 3^\circ$.

Из этого предложения следует, во-первых,

$$\text{chd } 1^\circ : \text{chd } \frac{3}{4}^\circ < 1 : \frac{3}{4},$$

$$\text{chd } 1^\circ < \frac{4}{3} \times 0^p 47' 8'',$$

$$\text{chd } 1^\circ < 1^p 2' 50''$$

и, во-вторых,

$$\text{chd } 1\frac{1}{2}^\circ : \text{chd } 1^\circ < \frac{3}{2} : 1,$$

$$\text{chd } 1^\circ > \frac{2}{3} \times 1^p 34' 15'',$$

$$\text{chd } 1^\circ > 1^p 2' 50''.$$

«Таким образом, хорда дуги в 1° с одной стороны меньше, а с другой — больше одной и той же величины, и мы без заметной ошибки можем положить эту хорду равной $1^p 2' 50''$ », — говорит Птолемей. Следовательно, он полагает:

$$\text{chd } 1^\circ = 1^p 2' 50''.$$

Для $\text{chd } \frac{1}{2}^\circ$ он при помощи формулы половины дуги находит $0^p 31' 25''$. С помощью формулы суммы он вычисляет далее хорды дуг 2° , $2\frac{1}{2}^\circ$ и т. д. вплоть до 180° .

Вот каким образом Клавдий Птолемей вычислил свою таблицу хорд. Но он не первый получил такую таблицу.

Гиппарх, живший за три века до него (150 до н. э.), написал книгу «О теории прямых в круге», которая наверняка содержала таблицу хорд, вычисленную, вероятно, с интервалами в 1° . Гиппарх пользовался этой таблицей для определения моментов восхода и захода неподвижных звезд и знаков зодиака. Таннери высказывает догадку, что Гиппарх и Птолемей заимствовали метод вычисления у Аполлония. Конечно, это только догадка: все, что мы знаем, —

это только, что Аполлоний дал для π лучшее приближение, чем Архимед; это приближение, пожалуй, могло бы служить исходной точкой для вычисления таблицы хорд.

Далеко от мирового центра Александрии, в Сиракузах, жил в середине 3-го века до н. э. величайший математик древности, блестящий гений,

АРХИМЕД

По его собственным словам, он был сыном*) астронома Фидия, написавшего сочинение о диаметрах Солнца и Луны. Был ли

Рис. 110. Гидравлический насос, построенный по системе Архимеда и приводимый в движение рабом негром. Как можно видеть на рисунке, раб приводит своими ногами в движение цилиндр вокруг винта, держа одновременно руками горизонтальный шест, покоящийся на двух опорах. Терракотовая статуэтка эпохи поздних Птолемеев ок. 100 до н. э. (Британский музей). Место находки неизвестно. Согласно Ростовцеву («Social and Economic History of the Hellenistic World», стр. 360, 363, 1160), осушение и орошение в александрийскую эпоху действительно производились при помощи гидравлических инструментов. Автор большого исторического произведения грек Диодор совершенно определенно утверждает, что Дельта орошалась при помощи особой машины, которая была изобретена Архимедом Сиракузским и была названа «улиткой» (*хеликас*) по своей форме. Ростовцев прибавляет к этому: «Это приспособление, по-видимому, было введено в употребление в Дельте в течение эллинистической эпохи и еще в настоящее время применяется в некоторых местностях Египта».



он знатного происхождения, мы не знаем; но он вращался в высших кругах сиракузского двора, был дружен с царем Гиероном и его сыном и наследником Гелоном.

Он, вероятно, бывал в Египте. Диодор рассказывает, что там он изобрел винтовой насос для выкачивания воды, так называемую кохлею, которая также применялась в испанских серебряных

*) По крайней мере Бласс (F. Blass, Astron. Nachr. 104 (1883), № 2488, стр. 255) толкует так одно место из «Исчисления песка» Архимеда.

рудниках. Дружба его с александрийским астрономом Кононом Самосским тоже позволяет думать, что он был в Александрии. Он обычно писал Конону из Сиракуз о своих математических открытиях; при этом сперва он не давал доказательства, ибо, как сам он пишет во введении к сочинению «О спиралях», он «хотел, чтобы каждый математик имел удовольствие самостоятельно получить этот результат». Однако он нередко ставил тщеславных сотоварищей александрийцев в затруднительное положение, прибавляя несколько неверных предложений, «дабы те, кто уверяет, не давая доказательств, что все это найдено ими самими, попались бы, утверждая, что нашли то, чего нельзя найти».

Быть может, эти ядовитые слова имеют в виду Эратосфена? Нечто в этом роде приходит в голову, когда мы читаем во введении к «Методу» панегирик Эратосфену крайне иронического свойства. Рассказывают еще, что Архимед послал Эратосфену практически неразрешимую задачу; это — пресловутая задача о быках, где надо определить числа белых, черных, коричневых и пестрых коров и быков, удовлетворяющие девяти условиям*).

Прошло несколько лет, прежде чем Архимед, по настоянию друзей, согласился выпускать в свет свои предложения с полными доказательствами.

Рассказы об Архимеде

Трудно было бы представить себе, что за человек был Архимед и какое потрясающее впечатление он производил на современников, если ограничиться небольшим числом твердо установленных фактов; надо еще привлечь и легенды, которые расцвели вокруг этого человека и его баснословных изобретений.

Всякий знает рассказ о золотом жертвенном венце царя Гиерона; этот венец был сделан из сплава, чистоту которого Архимеду пришлось проверять**); как он, обдумывая эту задачу, вошел в ванну и вдруг в воде его осенила идея, что объем венца можно определить, взвешивая воду, вытекшую при погружении венца в сосуд, наполненный до краев, как рассказывает Витрувий, или, как полагают другие, измеряя давление воды,

*) См. R. A. Archibald, *The Cattle problem*, Amer. Math. Monthly 25 (1918), стр. 411. Уравнения приводят в конце концов к так называемому «уравнению Пелля»

$$t^2 - 4\,729\,494\,u^2 = 1$$

с добавочным условием, что u есть кратное 9304. Наименьшее решение так велико, что искомое число содержит более 206 500 цифр.

**) Дальнейшие подробности см. E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, I, Groningen (Noordhoff), 1938, у которого я немало заимствовал.

направленное вверх, и как он нагой бросился обратно, восклицая: «Эврика, эврика!».

Царь Гиерон построил в подарок своему собрату, египетскому царю Птолемею, знаменитый корабль «Сиракосию»; это было чудо древней техники, оборудованное с утонченной роскошью; но, когда его надо было спускать на воду, с этим не могли справиться, пока за дело не взялся сам Архимед. Он построил машину, которая позволила сделать эту работу одному человеку. Сам царь

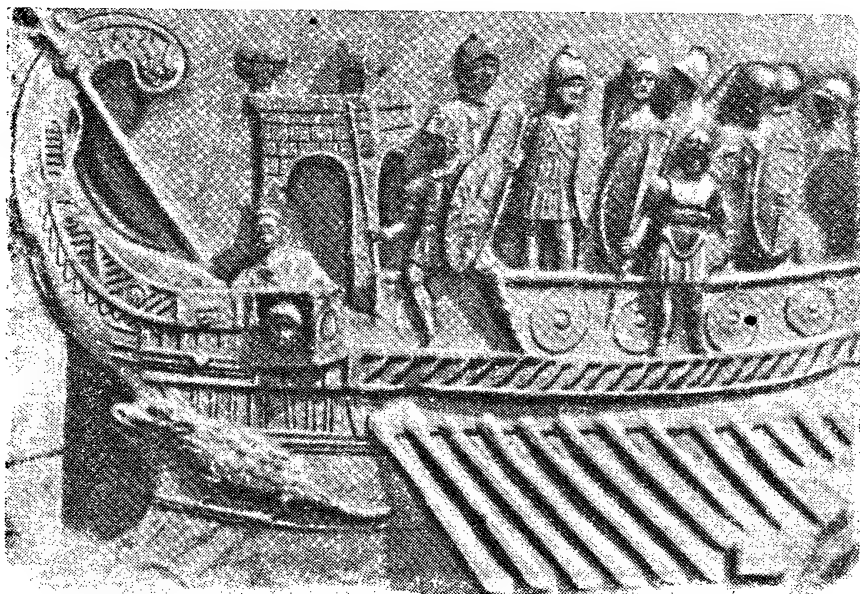


Рис. 111. Римский военный корабль. Рельеф эпохи Августа из Палестины (Ватиканский музей в Риме).

спустил корабль на воду и воскликнул: «С сегодняшнего дня, чтобы ни сказал наш Архимед, мы все будем считать достоверным». Какой-то случай подобного рода дал, вероятно, возможность Архимеду для его крылатых слов: «Дай мне место, где стать, и я сдвину Землю».

Полибий, Ливий и Плутарх подробно рассказывают о машинах Архимеда, которые под его руководством — а математику было тогда уже больше 70 лет — отразили штурм города Сиракуз римлянами. Мощные катапульты издалека швыряли тяжелые каменные глыбы на римские легионы, легкие катапульты близкого действия, так называемые скорпионы, метали из бойниц целый град ядер; морские береговые краны, поворачиваясь вперед за пределы крепостных стен, обрушивали на римские корабли целые скалы или тяжелые свинцовые глыбы, подымали железными крюками нос корабля и затем сразу роняли судно вниз в море, так что оно опрокидывалось или заливалось водой.

Марцелл, который сам командовал атакой с моря, был совершенно ошеломлен. «Так как же», — издевался он над собственными военными инженерами. — «будем мы воевать с этим Бриареем от геометрии*), который нашими кораблями черпает море, разбил вдребезги наш штурмовой таран, и столько от него на нас сразу летит снарядов, что и сторукому мифическому гиганту это было бы



Рис. 112. Смерть Архимеда. Мозаика, вероятно, из школы Рафаэли. Копия (или подделка), первоначально считавшаяся подлинным произведением римской эпохи. Различные элементы украшения рамки (водяные курочки — *porphyreions* — по четырем углам и уски) представляют очень недурные подражания римским образцам (Городская галерея во Франкфурте-на-Майне).

не под силу». Но римские солдаты были смертельно напуганы: «Как только они замечали, что из-за крепостной стены показывается веревка или бревно, то обращались в бегство с криком, что вот Архимед еще выдумал новую машину на их погибель», — пишет Плутарх в «Жизни Марцелла». Только после продолжительной осады удалось Марцеллу овладеть городом в 212 году.

Для самого Архимеда эти механические изобретения были только «побочными произведениями той игрушечной геометрии, которой он когда-то занимался. Однако царь Гиерон уговорил его хоть немножко отвлечь свое искусство от абстракций и заняться

*) Бриарей по греческой мифологии был сторуким гигантом.

вещами конкретными, показать свои дарования простым людям и осязательным образом заняться тем, чего требует действительность», — пишет Плутарх. И далее: «Хотя эти изобретения прославили его сверхчеловеческую мудрость, тем не менее он ничего не писал по таким вопросам, ибо полагал, что сооружение всякого рода машин и вообще всех приспособлений для практического употребления — дело низкое и неблагородное; сам же он стремился лишь к тому, что по красоте своей и совершенству находится далеко от царства необходимости».

Согласно Плутарху Архимед был просто одержим математикой: «Эта сирена всегда была с ним, и ее непрестанные чары заставляли его забывать о пище; он совершенно не заботился о себе, а когда его нередко заставляли идти в баню и умащаться маслом, он чертил на золе геометрические фигуры и рисовал их пальцем на своем умащенном теле, будучи одержим великим вдохновением и поистине являясь пленником муз».

В 212 до н. э., во время разграбления Сиракуз, римский солдат умертвил седовласого математика, невзирая на строгий запрет Марцелла. Архимед, который как раз углубился в рассмотрение начерченной им на песке фигуры, просил солдата (как говорит тот же Плутарх) обождать несколько минут, пока он не решит задачу. Трудно сказать, что собирался делать солдат, убить ли ученого или же просто увести к Марцеллу, а Архимед не послушался сразу, но распаленный яростью римлянин ударил его мечом и убил.

Согласно более поздней легенде — может быть, и не верной, но хорошо придуманной — Архимед сказал солдату: «Человек, не касайся моего чертежа».

[Этот драматический эпизод изображен на знаменитой мозаике, которую мы здесь воспроизводим (рис. 112). Во время распродажи на аукционе имущества Жерома Бонапарта говорилось, что эта мозаика происходит из Геркуланума, но Гетерт*), изучая



Рис. 113. Демокрит (?) (460—400 до н. э.). Бронзовая копия эллинистического оригинала (3-й век до н. э.) из того же материала. Из «виллы деи Папири» в Геркулануме (Национальный Музей в Неаполе).

*) F. W. Goetert, *Zur Kunst der römischen Republik*, Dissertation (Berlin, 1931).

панцырь и плащ солдата, а также позу и складки одежды Архимеда, пришел к очень вероятному выводу, что это не античная мозаика, а произведение школы Рафаэля.

Однако мне, как и Винтеру*), думается, что стоящий перед Архимедом ящик с песком указывает на античный прототип этой фрески. Валерий Максим, а за ним и все новые писатели всегда представляли себе, что Архимед писал на рассыпанном по земле песке. Однако древние делали свои геометрические чертежи на доске (plinthion, abakion, abakus), посыпанной песком. Это совершенно ясно вытекает из сопоставленных Винтером упоминаний у Ямвлиха, Апулея и Иеронима. Для удобства этот ящичек ставили на стол; действительно, сходя к Персию упоминает «стол, на котором геометры чертят свои геометрические места и их измерения».



Рис. 114. Воин на углу под крышной саркофага Александра в Истамбуле.

В эпоху Возрождения этого уже не знали. У Рафаэля в его «Афинской школе» справа на переднем плане математик чертит свои линии на доске, положенной на пол; на других картинах ученые чертят непосредственно на земле. Поэтому, если на нашей мозаике ящик с песком стоит на столе, то это или счастливое озарение художника эпохи Возрождения, или же (что более вероятно) копия с античного оригинала.

Винтер обращает также внимание на то, что голова Архимеда по выражению очень схожа с так называемой головой Демокрита из Геркуланума, а поза солдата очень напоминает позу воина на саркофаге Александра**).

Марцелл был милостив к родственникам Архимеда, и на его могильной плите, как хотел сам ученый, был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о величайшем открытии Архимеда, — о том, что объемы этих тел относятся, как 3 : 2. Когда Цицерон был квестором в Сицилии, он еще видел этот памятник с шаром и цилиндром, заброшенный и заросший кустами и терновником.

*) F. Winter, *Der Tod des Archimedes*, 82. Winkelmanns-Programm (Berlin, 1924).

**) Изображения Демокрита и воина даны на рис. 113 и 114. За ценные указания относительно литературы по истории искусства я обязан благодарностью г. I. Dörig (Базель).

[Текст, заключенный нами в квадратные скобки, добавлен в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)]

Об Архимеде как астрономе

мы, к сожалению, знаем немного. По сообщению Гиппарха*) он в своих наблюдениях солнцестояний допустил ошибку в $\frac{1}{4}$ дня, т. е. очень небольшую погрешность. В «Исчислении песка» Архимед описывает прибор, с помощью которого он измерил видимый диаметр Солнца. Главная цель «Исчисления песка» состоит в том, чтобы показать, как при помощи удобного способа обозначения больших чисел можно легко написать число, которое будет больше числа песчинок, заполняющих целиком все мировое пространство, даже если это пространство столь велико, каким его считает Аристарх. В системе Аристарха Земля вращается вокруг Солнца, а расстояние до неподвижных звезд очень велико по сравнению с радиусом земной орбиты**).

Сам Архимед, по-видимому, скорее склонялся к мнению «большинства астрономов» и полагал, что Земля находится в центре вселенной. По словам Макробия, вообще говоря, довольно ненадежного римского писателя, Архимед вычислил, сколько стадий будет от Земли до Луны, от Луны до Венеры, до Меркурия, до Солнца, до Марса, до Юпитера, до Сатурна и, наконец, до сферы неподвижных звезд.

Но крупнейшим достижением Архимеда в астрономии, которым особенно восхищались в древности, было построение планетария—полой вращающейся сферы с механизмом внутри, при помощи которой воспроизводились движения Солнца, Луны и пяти планет. Вращение одного колесика приводило в движение всю систему, где небесные тела двигались с различными периодами обращения. «Как только Галл привел сферу в движение», — пишет Цицерон, сам видевший этот прибор — «было видно, как с каждым оборотом Луна поднималась над земным горизонтом вслед за Солнцем, как это и бывает каждый день на небе; а тогда можно было видеть, как затмевалось Солнце, а Луна попадала в теневой конус Земли, когда Солнце как раз напротив...» ***).

Книга, которую сам Архимед написал «Об изготовлении сферы», утрачена.

*) Klaudius Ptolemaios, *Syntaxis*, кн. III, I.

**) При определении расстояния Земли от Солнца Аристарх принимал Землю за точку, тогда как Архимед, учитывая размеры Земли, приводил свои вычисления к центру. Обычно открытие параллакса приписывается Гиппарху. Кроме того, Архимед определил диаметр Солнца в полградуса, тогда как Аристарх (по крайней мере в дошедшем до нас его сочинении) считал его равным двум градусам. (Прим. перев.)

***) Cicero, *De republica*, I, 14. Текст обрывается посередине фразы.

Произведения Архимеда

подробно разбирать мы не будем; для этого понадобилась бы целая книга. В этом, впрочем, и нет надобности, ибо каждый, кто захочет доставить себе это удовольствие, может сам прочитать эти труды в превосходных английских, немецких или французских переводах Хизса (Heath), Чвалина (Czwalina) или Фер Экке (Ver Eecke), а в Голландии можно, кроме того, воспользоваться еще и превосходной работой Dijksterhuis, *Archimedes*, первая часть которой появилась в 1938 году в издании П. Нордгоффа *).

Поэтому я ограничусь здесь общей характеристикой, обзором содержания основных произведений и рассмотрением некоторых наиболее важных методов доказательства.

Об общем характере трудов Архимеда Хизс пишет (*History of Greek Math.*, II, стр. 20):

«Все эти произведения без исключения представляют собой истинные памятники математического изложения; план работы разворачивается последовательно, предложения расположены мастерски, все, что непосредственно не относится к цели исследования, строго устраняется так, что все в своей законченности и совершенстве производит такое сильное впечатление, что в душе читателя возникает нечто вроде благоговейного трепета». Совершенно правильно говорит Плутарх: «Невозможно найти в геометрии более трудных задач или доказательств, которые были бы изложены в более простых и ясных предложениях» («Жизнь Марцелла», глава 17). При этом путь, которому следовал Архимед, получая эти результаты, остается тайной.

Действительно, нет сомнения, что они не были получены в той постепенности, которая дается доказательствам в окончательном изложении. Если бы это были только одни геометрические сочинения, то могло создаться впечатление, словно Архимед, как говорит Валлис (Wallis), «намеренно уничтожил следы своих изысканий, как будто не желая выдать потомству тайны своего исследовательского метода и стремясь лишь добиться признания правильности своих результатов». Действительно (как далее говорит Валлис), «не только Архимед, но и почти все древние скрывали свой метод исследования (а нет сомнений, что у них он был) от потомства в такой мере, что математики нового времени решили, что легче придумать новый анализ, чем восстановить древний».

«Исключением оказался,—продолжает Хизс,—«Метод» Архимеда, счастье открытия которого выпало на долю Гейберга. В этой книге Архимед рассказывает, как он нашел некоторые теоремы, относящиеся к квадратуре и кубатуре, и что это было получено при помощи механики; элементарные составные части одной фигуры уравнивались элементарными частями другой, более простой, способ измерения величины которой был уже известен. Вместе с тем он тщательно подчеркивает разницу между 1) средствами, которые могут быть вполне достаточны, чтобы внушить мысль о справедливости теоремы, хотя и не дают доказательства ее, которое можно было бы признать научным, и 2) строгим проведением доказательства теоремы при помощи классических геометрических методов, которое должно следовать за первым, ибо иначе теореме нельзя считать окончательно доказанной».

*) Очень печально, что эта книга так и осталась не вполне законченной, вторая часть была напечатана только в журнале «Euclides», тома 15—17 и 20 (1938—1944). [Теперь имеется в немецком переводе. (Прим. перев.)]

«Некоторые вопросы», — говорит Архимед, — «выяснились для меня сначала при помощи механического метода, после чего их надо было доказать геометрически, ибо исследование упомянутым методом не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого метода получено известное представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела».

Прежде всего мы и рассмотрим это произведение, по которому можно прекрасно познакомиться с первоначальным ходом мыслей Архимеда.

«Метод»

В 1906 году датский филолог Гейберг, который уже подготовил к печати немало превосходных изданий древних текстов (между прочим, Евклида и Архимеда), отправился в Константинополь для изучения некоего пергамента из библиотеки Иерусалимского монастыря Гроба Господня. Это был так называемый «палимпсест», т. е. первоначально написанный греческими буквами, несомненно, математический текст с чертежами, который затем был стерт монахами, написавшими по нему новый текст. Гейбергу удалось восстановить почти полностью древний текст. Он содержал части разных уже известных произведений Архимеда и вдобавок в высшей степени важное сочинение «Метод», которое считалось утерянным. Изложим вкратце его содержание.

1. Площадь параболического сегмента.

Это первый пример Архимеда и одновременно самый подходящий для уяснения его механического метода. Пусть $AB\Gamma$ будет сегмент параболы, ограниченный прямой $A\Gamma$ и параболой $AB\Gamma$ (рис. 115). Через середину Δ основания $A\Gamma$ проведем параллельно оси параболы прямую ΔBE . Архимед утверждает, что сегмент $AB\Gamma$ в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем треугольник $AB\Gamma$.

Проведем AZ параллельно ΔB до пересечения в точке Z с касательной GEZ . Продолжим ΓB налево за точку K , где она пересекается с AZ , и отложим на ней $K\Theta = K\Gamma$. Теперь вообразим, что $\Gamma\Theta$ представляет собой рычаг, могущий вращаться вокруг точки K . Затем проведем ME через произвольную точку O параболы параллельно $E\Delta$.

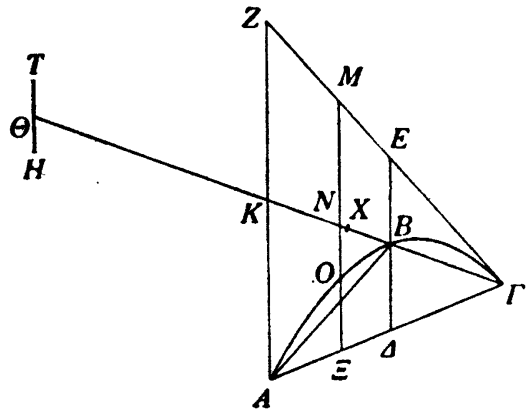


Рис. 115.

Согласно свойствам параболы, которые Архимед предполагает известными, $ВД = ВЕ$, значит, $NE = NM$, $KA = KZ$ и затем

$$EM : EO = AG : AE = KG : KN = KO : KN. \quad (1)$$

Если мы теперь на другом конце рычага, в точке Θ , подвесим прямолинейный отрезок $TH = EO$, то по закону рычага, впервые полученному самим Архимедом в его исследованиях равновесия плоских фигур*), этот отрезок TH уравновесит отрезок ME , находящийся на своем месте. Действительно, пропорция (1) и показывает, что веса этих двух отрезков обратно пропорциональны плечам рычага, на которых они подвешены. То же справедливо и для всех отрезков прямых, проведенных параллельно DE в треугольнике AGZ . Находясь на своих местах, они будут уравниваться со своими частями внутри параболы, если эти последние перенести в точку Θ .

До сих пор все совершенно строго. А теперь выявляется «гвоздь» метода: *так как треугольник AGZ состоит из всех линий (вроде EM), которые можно провести внутри треугольника, и так как параболический сегмент $AB\Gamma$ состоит из всех линий (вроде EO) внутри параболы, то треугольник AGZ , находясь на своем месте, должен уравновесить параболический сегмент, помещенный так, чтобы его центр тяжести был в точке Θ , причем K будет их общим центром тяжести.*

Этим, так сказать, все уже сделано. Действительно, центр тяжести треугольника AGZ находится в точке X , причем $KX = \frac{1}{3} KG$. Так как плечо $K\Theta$, на котором подвешен параболический сегмент, в три раза больше, чем плечо KX у центра тяжести треугольника, и так как треугольник AGZ уравнивает этот сегмент, то вес треугольника должен быть втрое больше веса сегмента. Но треугольник AGZ вдвое больше треугольника AGK и, таким образом, вчетверо больше $AB\Gamma$; следовательно, параболический сегмент составляет $\frac{4}{3}$ треугольника $AB\Gamma$.

Этим, как замечает сам Архимед, поставленное предложение еще не будет строго доказано, но, однако, приходишь к убеждению, что оно верно.

Представление о параболическом сегменте или о треугольнике как о сумме бесконечно большого числа отрезков прямой очень близко к точке зрения Лейбница, который рассматривал интеграл $\int y dx$ как сумму бесконечно большого числа членов $y dx$. Однако Архимед в противоположность Лейбницу прекрасно сознает, что, в сущности, такое представление некорректно и что этот эвристический вывод должен быть дополнен строгим доказательством.

*) Точная формулировка закона равновесия рычага (даже с попыткой его математического доказательства) уже имеется в приписываемых Аристотелю «Механических проблемах». (Прим. перев.)

2. Объем шара.

Архимед утверждает, что цилиндр, описанный около шара, будет в $1\frac{1}{2}$ раза более шара. Пусть $AB\Gamma\Delta$ будет большой круг шара (рис. 116). Представим себе второй большой круг, построенный на диаметре $B\Delta$ в плоскости, перпендикулярной к плоскости первого круга, а затем конус, проходящий через этот второй круг, с вершиной A и осью AG , основанием которого является круг на диаметре EZ , и, наконец, цилиндр $EZH\Lambda$ с осью AG на том же самом

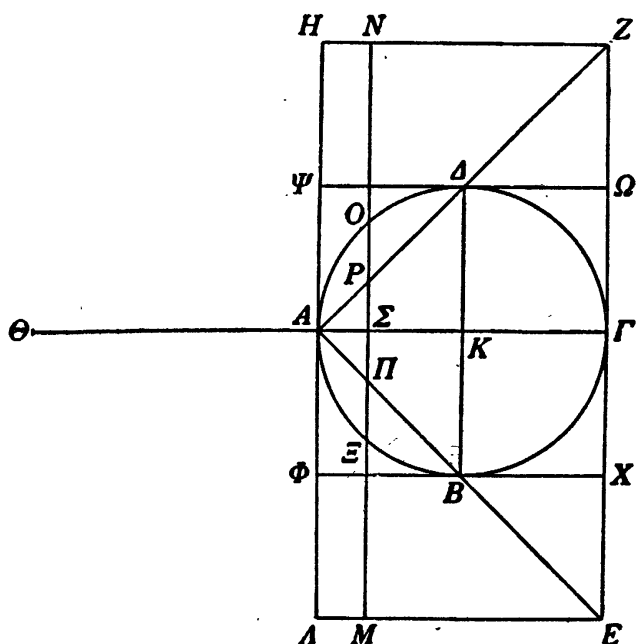


Рис. 116.

основании, т. е. большом круге EZ . Теперь, если $M\Xi N$ есть произвольная прямая, параллельная $B\Delta$ в плоскости круга $AB\Gamma\Delta$, пересекающая этот круг в O и Ξ , а боковую поверхность конуса — в Π и P , тогда

$$\left. \begin{aligned} ZP^2 + \Sigma O^2 &= \Sigma A^2 + \Sigma O^2 = AO^2 = \Sigma \Xi \cdot \Delta \Gamma, \\ (\Sigma P^2 + \Sigma O^2) : \Xi N^2 &= (\Sigma \Xi \cdot \Delta \Gamma) : \Delta \Gamma^2 = \Sigma \Xi : \Delta \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Следовательно, сумма кругов на диаметрах PR и EO так же относится к кругу на диаметре MN , как $\Sigma \Xi$ к $\Delta \Gamma$.

Теперь мы снова будем рассматривать AG как плечо равноплечего рычага с точкой опоры в A , а другое плечо $A\Theta$ положим равным AG ; затем круги на диаметрах PR и EO перемещаются в точку Θ . Тогда согласно (2) они будут уравниваться с кругом MN , подвешенным за его собственный центр Σ .

Так как цилиндр $EZH\Lambda$ состоит из этих кругов, то цилиндр в своем положении будет уравнивать шар и конус, вместе

будет уравнивать конус, помещенный в Θ . Но так как этот сегмент весит в $\frac{3}{2}$ раза больше конуса, то и плечи $A\Theta$ и AK будут относиться, как $3 : 2$, откуда и следует высказанное предложение.

6. *Центр тяжести полушара.*

Метод доказательства тот же самый, что и в предыдущем случае.

7. *Объем сегмента шара.*

Метод тот же, что и в случае 2.

Аналогично рассматриваются следующие случаи:

8. *Объем сегмента сфероида.*

9. *Центр тяжести сегмента шара.*

10. *Центр тяжести сегмента сфероида.*

11. *Центр тяжести сегмента гиперболоида вращения.*

После этого еще идут кубатуры двух замечательных тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями и плоскостями, но по объему равных многогранникам с плоскими гранями.

12. *Сегмент цилиндра.*

Если в прямую призму с квадратным основанием вписать цилиндр, основанием которого является круг, вписанный в квадрат ее основания, и рассечь его плоскостью через центр нижнего основания и сторону верхнего основания, то отсеченная часть цилиндра, ограниченная цилиндрической поверхностью, наклонной плоскостью и плоскостью основания составит $\frac{1}{6}$ часть всей призмы.

Архимед выводит это предложение при помощи своего механического метода и затем дает строгое геометрическое доказательство. Наконец, он выдвигает следующее предложение:

13. *Пересечение двух цилиндров.*

Если вписать в куб два цилиндра со взаимно перпендикулярными осями, то объем, общий тому и другому, составит $\frac{2}{3}$ объема куба.

Доказательства этого предложения в палимпсесте уже нет.

Каким образом Архимед приводил свои эвристические исследования к строгим доказательствам, мы можем хорошо уяснить из его работы.

Квадратура параболы

Теорему относительно площади параболического сегмента Архимед строго доказывает дважды: механическим методом и геометрическим. Механическое доказательство, в сущности, то же, что и в «Метод», но Архимед, пользуясь методом исчерпывания, превратил его в строгое доказательство. В случае, когда сегмент отсекается прямой $B\Gamma$, перпендикулярной к оси, доказательство протекает следующим образом (рис. 118).

Проведем BA параллельно оси до точки пересечения Δ с касательной в Γ . Разделим $B\Gamma$ на произвольное число равных частей и через точки деления E, Z, H, I проведем параллельно оси прямые EA, ZM, HN и IE ; затем соединим Γ с точками пересечения этих линий с параболой. После этого утверждаем, что треугольник $B\Gamma\Delta$ будет меньше утроенной суммы трапеций $KE, \Delta Z$

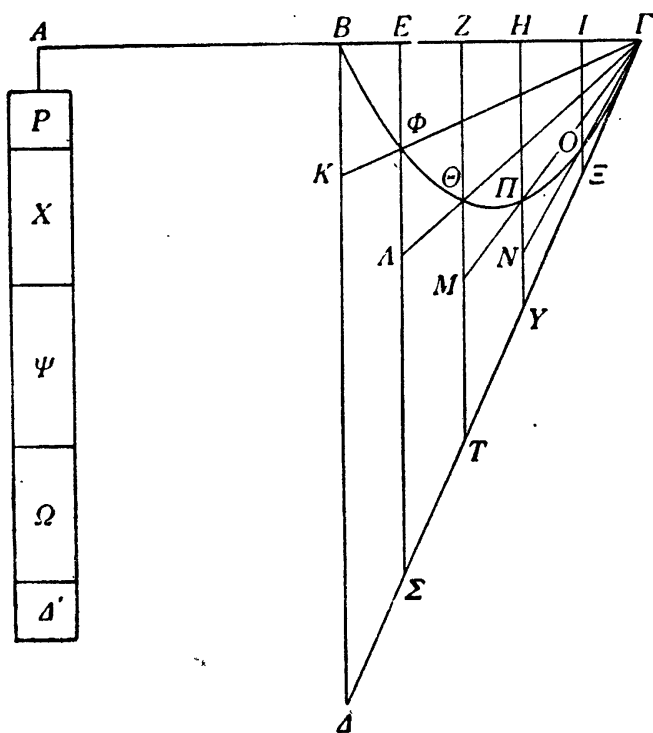


Рис 118

MH и NI и треугольника EIG , но больше утроенной суммы трапеций $Z\Phi, H\Theta$ и II вместе с треугольником IOG .

Для доказательства этого Архимед продолжает ΓB на отрезок $BA = B\Gamma$ и рассматривает AG как рычаг с точкой опоры B ; к другому концу A рычага он подвешивает площади $P, X, \Psi, \Omega, \Delta'$, которые соответственно уравниваются с трапециями $\Delta E, \Sigma Z, TH, YI$ и треугольником EIG . Сумма всех этих площадей должна тогда уравновесить треугольник $B\Gamma\Delta$ и, следовательно, должна быть равна $\frac{1}{3}$ этого треугольника.

Согласно пропорции (1) «Метода» мы имеем:

$BA : BE = B\Gamma : BE = E\Sigma : E\Phi = \text{трапеция } \Delta E : \text{трапеция } KE,$

точно так же

$BA : BZ = \text{трапеция } \Sigma Z : \text{трапеция } \Delta Z,$

$BA : BH = \text{трапеция } TH : \text{трапеция } MH,$

$BA : BI = \text{трапеция } YI : \text{трапеция } NI.$

Таким образом, эти трапеции ΔE , ΣZ и т. д., подвешенные своими «правыми» вершинами E , Z и т. д., должны уравновеситься с трапециями KE , ΛZ и т. д., подвешенными в A . Но, если подвесить их не за точки, а за отрезки прямых BE , EZ и т. д., то они будут уравниваться с P , X и т. д. Следовательно, площади P , X и т. д. меньше, чем трапеции KE , ΛZ и т. д. Значит, сумма площадей $P + X + \Psi + \Omega + \Delta'$ меньше суммы трапеций KE , ΛZ , MH и NI вместе с треугольником $I\Gamma G$.

Но сумма $P + X + \Psi + \Omega + \Delta'$ составляла $\frac{1}{3}$ треугольника $B\Gamma\Delta$; следовательно, $\frac{1}{3}$ этого треугольника меньше суммы трапеций KE , ΓZ и т. д. вместе с треугольником $I\Gamma G$, которые перекрывают параболу.

Совершенно так же доказывает Архимед, что $\frac{1}{3}$ треугольника $B\Gamma\Delta$ больше суммы трапеций ΦZ , ΘH , ΠI и треугольника ΠO , находящихся внутри параболического сегмента. На этом заканчивается механическая часть доказательства.

Разность между первым рядом трапеций с треугольником и вторым равна сумме трапеций $B\Phi$, $\Phi\Theta$, $\Theta\Pi$, ΠO с треугольником $\Gamma O E$, через которые как раз и проходит парабола. Но эта сумма как раз и равна треугольнику $B\Gamma K$, который составляет как угодно малую (в нашем случае $\frac{1}{5}$) часть треугольника $B\Gamma\Delta$.

После этого идет доказательство по методу исчерпывания, которое мы можем изложить следующим образом. Обозначим параболический сегмент буквой s и положим, что $\frac{1}{3}$ треугольника $B\Gamma\Delta$ равна z ; надо доказать, что $s = z$. Архимед заключает s между двумя площадями s_1 и s_2 , разность которых равна произвольно малой части треугольника $B\Gamma\Delta$; он уже доказал механическим способом, что z лежит между s_1 и s_2 :

$$s_1 > s > s_2, \quad (1)$$

$$s_1 > z > s_2, \quad (2)$$

$$s_1 - s_2 = \varepsilon. \quad (3)$$

Предположим теперь, что s больше z ; пусть ε будет меньше разности $s - z$; тогда

$$[s - z > \varepsilon = s_1 - s_2$$

и

$$s > z + (s_1 - s_2) > s_2 + (s_1 - s_2) = s_1,$$

что невозможно. Предположим, во-вторых, что s меньше z , и пусть ε будет меньше разности $z - s$;

$$z - s > \varepsilon = s_1 - s_2,$$

$$z > [s + (s_1 - s_2) > s_2 + (s_1 - s_2)] > s_1,$$

что также противоречит (2). Следовательно,

$$z = s.$$

С небольшими изменениями этот косвенный способ доказательства все время повторяется в произведениях Архимеда. Эта техника доказательства восходит еще к Евдоксу. В дальнейшем, в противоположность Архимеду, мы не будем повторять все этапы таких доказательств, а будем просто выводить неравенства (1), (2) и (3), из которых будет само собой вытекать $z = s$. Равенство (3) прекрасно можно заменить неравенством

$$s_1 - s_2 < \varepsilon.$$

Иногда вместо разностей Архимед берет отношения и доказывает, что отношение $s_1 : s_2$ может быть сделано меньше, чем отношение большей из двух произвольно выбранных величин к меньшей*).

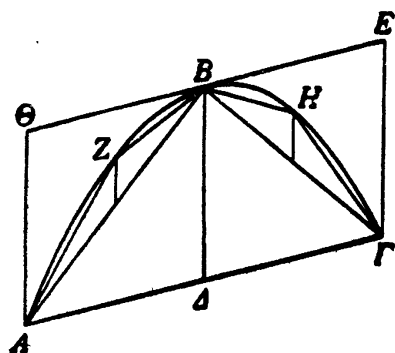


Рис. 119.

После этого механического доказательства следует не менее изящный геометрический вывод. В параболический сегмент АВГ (рис. 119) Архимед вписывает треугольник АВГ, проводя из середины Δ основания прямую ΔВ параллельно оси. После этого в оба отсеченных прямыми АВ и ВГ параболических сегмента он вписывает таким же образом треугольники АЗВ и ВНГ и, опираясь на свойства параболы, заключает, что оба эти треугольника вместе как

раз будут равны $\frac{1}{4}$ треугольника АВГ. Если этот процесс будет продолжаться далее, то на следующем этапе мы получим 4 треугольника, которые все вместе снова будут равны $\frac{1}{4}$ суммы двух предыдущих треугольников и т. д. Кроме того, треугольник АВГ составляет половину описанного параллелограмма АГЕΘ, и, следовательно, он больше половины параболического сегмента. Если теперь от этого параболического сегмента отнять сначала треугольник АВГ, т. е. более половины его, затем от остающихся сегментов отнять два вписанных треугольника АЗВ и ВНГ, т. е. снова более половины, и продолжать таким же образом далее, то, по общеизвестному предложению, с которым мы уже встречались, разбирая десятую книгу «Начал», мы в конце концов получим остаток, меньший любой наперед заданной площади; кроме того, вычитаемые таким образом, треугольники образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$.

После этого Архимед выводит формулу для суммы этой геометрической прогрессии: если некоторая последовательность ве-

*) Так Архимед поступает в книгах «О шаре и цилиндре». Изложенная выше окончательная форма метода употребляется в сочинениях «О спиральных», «О коноидах и сфероидах» и в «Измерении круга». (Прим. перев.)

личин A, B, Γ, Δ, E образует геометрическую прогрессию со знаменателем $1/4$, то, прибавляя к их сумме $1/3$ последнего члена, получим $4/3$ первого члена. Вывод очень прост:

$$B + \frac{1}{3} B = \frac{4}{3} B = \frac{1}{3} A,$$

$$\Gamma + \frac{1}{3} \Gamma = \frac{4}{3} \Gamma = \frac{1}{3} B,$$

$$\Delta + \frac{1}{3} \Delta = \frac{4}{3} \Delta = \frac{1}{3} \Gamma,$$

$$E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} E = \frac{1}{3} \Delta,$$

и, суммируя, получаем:

$$B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} \Gamma + \frac{1}{3} \Delta + \frac{1}{3} E = \frac{1}{3} (A + B + \Gamma + \Delta).$$

Если вычесть справа и слева $\frac{1}{3} B + \frac{1}{3} \Gamma + \frac{1}{3} \Delta$ и прибавить к обеим сторонам по A , то получится:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} A, \quad (4)$$

что и доказывает высказанное предложение.

Архимед не говорит о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, ему еще не известно выражение «сумма бесконечного ряда», однако он прекрасно владеет сущностью этого понятия. Действительно, современное понятие «суммы бесконечного ряда» обозначает не что иное, как предел конечной суммы, т. е. величину, отличающуюся от конечного частного значения суммы менее чем на любую наперед заданную положительную величину ε . И вот Архимед доказывает и вполне ясно формулирует, что сегмент параболы во всяком случае больше каждой частной суммы $A + B + \Gamma + \Delta + E$ геометрической прогрессии, но отличается от этой суммы на величину, меньшую любой наперед заданной площади.

Теперь, конечно, уже совсем нетрудно после некоторых вычислений с неравенствами показать, что параболический сегмент не может быть ни больше, ни меньше $4/3 A$, где A есть первый вписанный треугольник. Действительно, положим, что этот сегмент больше $4/3 A$; тогда некоторая частная сумма $A + B + \Gamma + \Delta + E$, отличающаяся от этого сегмента на произвольно малую величину, окажется больше $4/3 A$, что противоречит формуле (4). А положив, что этот сегмент Z меньше $4/3 A$, мы можем так далеко продолжить ряд $A + B + \dots$, чтобы последний член E оказался менее разности $4/3 A - Z$. Тогда избыток $4/3 A$ по сравнению с сегментом Z

будет более E . Но, с другой стороны, избыток $\frac{4}{3}A$ по сравнению с $A + B + \Gamma + \Delta + E$ равен $\frac{1}{3}E$, следовательно, он менее E ; таким образом, сегмент Z должен быть менее $A + B + \Gamma + \Delta + E$, что невозможно.

Все это имеется у Архимеда приблизительно в этих же самых выражениях. Отсюда видно, что оценки, которые вводятся при суммировании бесконечных рядов и вычислениях с пределами, или «эпсилонтика», как нередко называют выкладки с произвольно малыми ϵ , были для Архимеда, так сказать, «детской игрой». В этом отношении его мышление является вполне современным.

О шаре и цилиндре, I

Аксиомы, которые мы находим у Евклида, вроде «целое больше части», вместе с леммой Архимеда, к которой мы сейчас вернемся, были вполне достаточны для измерения площадей плоских фигур и объемов многогранников. Но для измерения дуг и криволинейных поверхностей нужны были другие постулаты. Как можно было бы в противном случае знать, что окружность круга больше, чем периметр вписанного, и меньше, чем периметр описанного многоугольника? Поэтому Архимед и начинает с некоторых новых аксиом.

Он рассматривает ограниченные плоские кривые, которые целиком лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их конечные точки, и поверхности, которые ограничиваются кривой, лежащей в плоскости, и расположены целиком по одну сторону от этой плоскости. Подобного рода кривые и поверхности он называет «в одну сторону выпуклыми», если все отрезки прямых, соединяющие две произвольные точки кривой или поверхности, всегда лежат с одной стороны от этой кривой или поверхности, или и на ней, но только не с другой стороны. После этого он вводит постулаты:

1. Из всех линий с одними и теми же конечными точками прямая является наименьшей.

2. Если две кривые на одной плоскости между двумя точками обе в одну сторону выпуклы и одна из них целиком охватывается другой (частично они могут совпадать), то первая будет меньше второй.

3. Из всех поверхностей, ограничиваемых одной и той же плоской кривой, наименьшей будет плоскость.

4. Аналог постулата 2, но только для поверхностей.

5. Если разность двух неравных линий, поверхностей или объемов повторить слагаемой достаточное число раз, то она может превзойти любую наперед заданную величину того же рода. Это — знаменитый «постулат Архимеда», который уже применял

и Евдокс, но который, вероятно, был здесь впервые отчетливо сформулирован*).

После ряда вводных предложений Архимед впервые определяет боковую поверхность прямого цилиндра и прямого кругового конуса, заключая ту и другую между вписанными и описанными призмами или пирамидами согласно постулату 4.

В обоих случаях он строит круг, площадь которого равна боковой поверхности цилиндра или конуса. В случае цилиндра, например, радиус этого круга равен средней пропорциональной между высотой и радиусом цилиндра.

Теперь Архимед переходит к своему знаменитому определению поверхности и объема шара.

Он вписывает в круг и описывает около него правильный многоугольник, число сторон которого делится на 4. Вращая эту фигуру вокруг оси, проходящей через две противоположные вершины, получаем вписанное в шар тело I_n , ограниченное частями боковых поверхностей конусов (рис. 120). Подобно этому описанный многоугольник с тем же числом сторон образует при вращении тело C_n , подобное I_n и охватывающее шар. Согласно постулату 4 получаем:

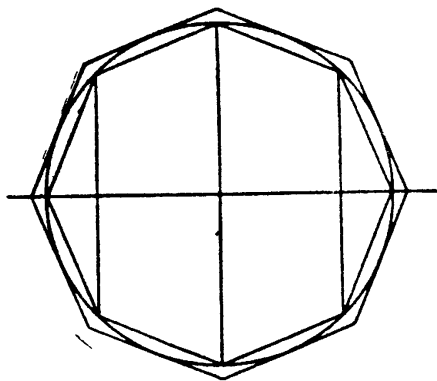


Рис. 120.

$$\text{поверхность } I_n < \text{поверхность шара} < \text{поверхность } C_n. \quad (1)$$

Пусть теперь A будет круг, радиус которого равен диаметру шара и который, следовательно, в четыре раза больше большого круга шара. Архимед доказывает следующее неравенство:

$$\text{поверхность } I_n < \text{площадь } A < \text{поверхность } C_n. \quad (2)$$

Так как отношение поверхностей подобных тел I_n и C_n можно сколь угодно точно приблизить к 1, то из (1) и (2) мы выводим, рассуждая уже известным нам способом, что шар имеет поверхность, одинаковую с площадью круга A .

*) Постулат Архимеда несколько отличается от постулата Евдокса. У Евдокса говорится о меньшей величине, могущей превзойти большую в результате повторения достаточное число раз слагаемой, у Архимеда же меньшая величина заменяется разностью большей и меньшей. Дейкстергейс считает, что это видоизменение направлено против атомистики Демокрита, в математике которого разность двух площадей могла представлять линию, а разность объемов — площадь. (Прим. перев.)

Аналогичные неравенства имеют место также и для объемов. Объем I_n оказывается равным объему конуса, основание которого — круг, равный поверхности тела I_n , а высота — радиус шара, описанного вокруг I_n . То же самое имеет место и для C_n , а значит, при помощи доказательства по методу исчерпывания также и для шара.

Некоторые трудности возникают при доказательстве неравенства (2). Поверхность I_n представляет собой сумму частей конических поверхностей, заключенных между параллельными кругами. Из своих предположений о боковой поверхности конуса Архимед выводит, что поверхность I_n равна площади круга, радиус R которого определяется равенством

$$R^2 = as,$$

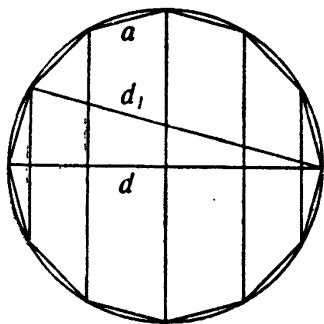


Рис. 121.

где a — сторона вращающегося многоугольника (рис. 121), а s — сумма всех диагоналей, перпендикулярных к оси вращения. Произведение as преобразуется в dd_1 , где d — диаметр описанного круга,

а d_1 — диагональ, стягивающая половину всех сторон без одной. Отношение d к d_1 , естественно, приближается к 1, откуда следует, что R^2 стремится к d^2 . Таков, в общих чертах, ход мыслей в этом доказательстве *).

Совершенно таким же образом определяется поверхность шарового сегмента, а также объем шарового сектора.

О шаре и цилиндре, II

В этом исследовании решаются две задачи, приводящие к кубическим уравнениям. Первая из них — найти шар, равный по объему данному конусу или цилиндру — приводит к простому кубическому уравнению

$$x^3 = b^2c, \quad (3)$$

которое решается уже известным нам способом при помощи нахождения двух средних пропорциональных между b и c . Как это делается, у Архимеда не сказано. Из-за этого умолчания его комментатор Евтокий подробно рассказал о решениях задачи об удвоении куба; из этого рассказа мы ранее уже с благодарностью заимствовали.

*) Для более точного анализа этого хода мыслей см. B. L. van der Waerden, *Einfall und Überlegung. Drei Kleine Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens* (Birkhäuser, Basel, 1954).

Вторая задача — рассесть шар плоскостью в заданном отношении — приводит к уравнению третьей степени вида

$$x^2(a - x) = bc^2 \quad (4)$$

или, как пишет сам Архимед, — требует разделить отрезок a на две части x и $a - x$ так, чтобы имела место пропорция

$$(a - x) : b = c^2 : x^2.$$

Архимед обещал дать аналитическое и синтетическое решение задачи, но эта часть его труда утрачена. Однако Евтокий нашел рукопись на дорийском диалекте, которую он приписывает Архимеду. В ней дано, во-первых, необходимое условие возможности решения уравнения (4) и, во-вторых, решение при помощи пересечения параболы с гиперболой. Задача возможна, если bc^2 не более максимума выражения $x^2(a - x)$, который достигается при $x = \frac{2}{3}a$.

О спиральных

Если прямая равномерно вращается около неподвижной точки O и одновременно точка P равномерно движется вдоль прямой, выходя из O , то эта точка P описывает *спираль*.

Архимед выводит в полярных координатах характеристическое свойство точек спирали, затем определяет касательную в произвольной точке спирали *), и, наконец, находит площадь между двумя произвольными радиусами и между двумя последовательными витками или внутри первого оборота спирали. Наш рис. 122 показывает, как упомянутая площадь заключается между двумя суммами круговых секторов. Единственная трудность в доказательстве методом исчерпывания заключается в суммировании ряда $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Для этого Архимед дает — в геометрическом одеянии — следующую формулу (предложение 10):

$$\begin{aligned} 3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \dots + (na)^2] = \\ = n(na)^2 + (na)^2 + a(a + 2a + 3a + \dots + na). \end{aligned}$$

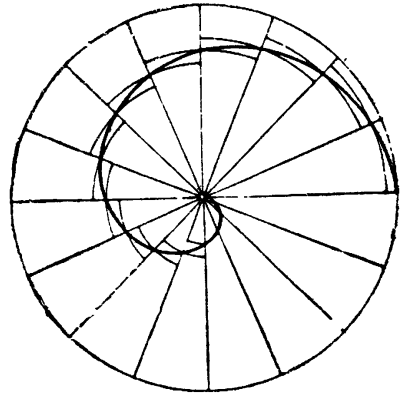


Рис. 122.

*) При помощи этой касательной Архимед дает изящный способ построения прямой, длина которой равняется окружности заданного круга. (Прим. перев.)

О коноидах и сфероидах

Коноидами Архимед называл параболоиды вращения и отдельные полости двуполостных гиперболоидов вращения, а сфероидами — эллипсоиды вращения. Он определяет объем сфероида и любых сегментов сфероидов и коноидов, отсеченных произвольной плоскостью, а также и площадь эллипса.

В качестве частного случая сюда, разумеется, входит и определение объема шара, но метод доказательства теперь уже совершенно иной. Архимед мог бы превратить сфероиды в шары, равномерно вытягивая их или сжимая (искусный прием, который он сам в предложении 4 применяет к эллипсу), но этот метод оказывается непригодным для коноидов. Поэтому он изобрел новый метод,

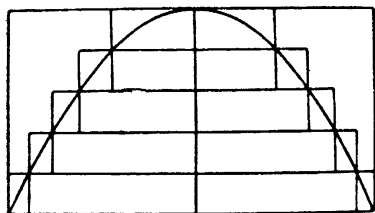


Рис. 123.

при котором не применяется ни сжатие, ни растяжение. По его собственным словам, сначала он получил этим способом результат только для параболоида и лишь позднее, с большим трудом, для эллипсоида и гиперболоида. Метод заключается в том, что рассматриваемый сегмент коноида или сфероида плоскостями, параллельными основанию, пересекается на слои одинаковой толщины, как, например, это показано на рис. 123 для параболоида, и каждый из этих слоев заключается между двумя цилиндрами, из которых один больше, а другой меньше слоя.

В случае параболоида внешние цилиндры образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна наименьшему члену

$$S_1 = A + 2A + 3A + \dots + nA,$$

а внутренние цилиндры образуют такую же прогрессию, но только без последнего члена

$$S_2 = A + 2A + \dots + (n-1)A.$$

Теперь ясно, говорит Архимед, что сумма n членов, каждый из которых равен nA , менее $2S_1$ и более $2S_2$:

$$2S_1 > n \cdot nA > 2S_2. \quad (1)$$

Геометрическое изображение $n \cdot nA$ представляет столбик из равных цилиндров, имеющий то же самое основание и ту же высоту, что и сегмент параболоида; все эти цилиндры образуют вместе некоторый цилиндр C . Таким образом, вместо (1) можно написать:

$$2S_1 > C > 2S_2. \quad (2)$$

Далее, если S есть сегмент параболоида, то, конечно,

$$S_1 > S > S_2. \quad (3)$$

Так как разность $S_1 - S_2 = nA$ равна объему самого нижнего цилиндра и может быть сделана сколь угодно малой, то из (2) и (3) обычным способом получаем результат:

$$S = \frac{1}{2} C.$$

В случае эллипсоида или гиперboloида цилиндры уже не составляют арифметической прогрессии, но их сумма может быть преобразована в сумму ряда площадей прямоугольников $x(a \pm x)$, в которых высоты x составляют арифметическую прогрессию $b, 2b, 3b, \dots, nb$. Если теперь S_1 есть сумма n таких прямоугольников, а S_2 — сумма таких же прямоугольников без последнего члена B , или, в современном обозначении,

$$S_1 = \sum_{k=1}^n kb(a + kb),$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} kb(a + kb),$$

$$B = nb(a + nb),$$

то Архимед доказывает неравенство

$$nB : S_2 > (a + nb) : \left(\frac{1}{3} a + \frac{1}{3} nb \right) > nB : S_1, \quad (4)$$

которое в доказательствах занимает место (1). При доказательстве неравенства (4) Архимед исходит из формулы для суммы квадратов натурального ряда, которую он доказал в книге «О спиралях».

Понятие об интеграле у Архимеда

Риман дал строгое определение понятия интеграла, заключив последний между «нижней суммой» и «верхней суммой», как это показано на рис. 124. Интеграл

$$\int_a^b y \, dx$$

представляет площадь, ограниченную кривой, перпендикулярами $x = a$ и $x = b$ и осью x . «Нижняя сумма» представляет сумму площадей прямоугольников, лежащих ниже кривой, а «верхняя сумма» —

сумму площадей более высоких прямоугольников, перекрывающих рассматриваемую площадь. Из сочинения «О коноидах и сфероидах» ясно, что Архимед прекрасно знал принцип такого заключения рассматриваемой величины между двумя границами и поль-

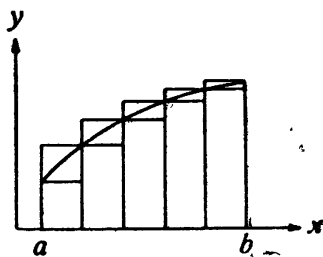


Рис. 124.

зовался им для определения объемов *). Однако я полагаю, все же нельзя утверждать, что Архимед имел общее понятие об интеграле. Его интегралы всегда связаны с определенной геометрической интерпретацией: или с объемами или с площадями плоских фигур. Нигде мы не видим, чтобы он представлял себе, что в основе всех этих геометрических интерпретаций лежит некоторое общее понятие. Так, например, для квадратуры параболы и для определения объема шара и сфероида он в своих строгих доказательствах пользуется совершенно различными методами, хотя в обоих этих случаях дело сводится к одному и тому же интегралу

$$\int_0^a x(a-x) dx,$$

и, следовательно, каждый метод решения одной задачи мог быть пригоден и для другой.

Тем не менее, строгие методы определения поверхностей и объемов делают Архимеда предшественником современного интегрального исчисления.

Книга лемм

(*Liber Assumptorum*) сохранилась не на греческом языке, а только на арабском **). Она начинается с ряда предложений относительно фигуры *Arbelos* или «сапожный нож», ограниченной тремя полукругами, взаимно касающимися друг друга в конечных точках. Арбелос равен кругу с диаметром *BD* (рис. 125). Линия *BD* разделяет арбелос на две части; вписанные в них два круга равны. Далее Архимед дает способ выразить диаметр вписанного в арбелос круга через длину *AC*, если дано отношение, в котором *D* делит линию *AC*.

Кроме того, в этой книге имеется еще одно замечательное предложение 8: Продолжи хорду *AB* произвольного круга на отрезок *BC*, равный радиусу, и проводи через *C* диаметр *FDE*. Тогда дуга *AE* будет втрое больше дуги *BF*. Доказательство проводится очень

*) Между прочим, в этом отношении Архимед отличается от Евдокса, который, пользуясь методом исчерпывания, еще не заключал определяемую величину между двумя границами, как это утверждает автор на стр. 254 относительно круга. (*Прим. перев.*)

**) «Книга лемм» и недавно открытая родственная ей «Книга о семиугольнике» никогда не существовали на греческом языке. Обе они принадлежат перу знаменитого харранского математика 9-го века Сабита ибн-Корра (*Thabit ibn-Korra*), большого поклонника и ценителя Архимеда, как это видно из помещенного в латинском переводе «Книги лемм» предисловия. Обе они содержат ряд вещей, несомненно, восходящих к Архимеду. (*Прим. перев.*)

просто, например, так (рис. 126):

$$\begin{aligned}\angle ADE &= \angle DAB + \angle ACD = \angle ABD + \angle BDC = \\ &= 2 \angle BDC + \angle BDC = 3 \angle BDC.\end{aligned}$$

С помощью этого предложения можно следующим образом разделить данную дугу AE на три равные части: Проведи диаметр EF и так приложи отрезок BC , равный радиусу r (например, при помощи линейки, на которой имеются два штриха на расстоянии r друг от друга), чтобы продолжение CB проходило через A . Тогда дуга BF будет как раз втрое меньше дуги AE .

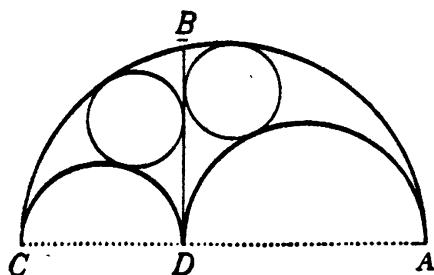


Рис. 125.

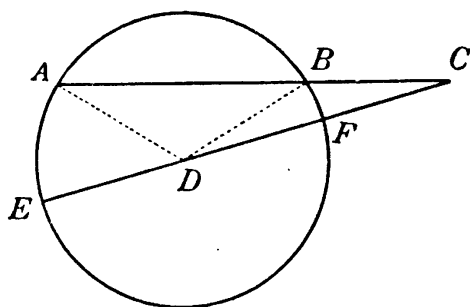


Рис. 126.

Подобного рода построения (*neusis*), в которых отрезок определенной длины так укладывался между двумя линиями, чтобы продолжение этого отрезка проходило через определенную точку, греки применяли очень часто. Уже Гиппократ пользовался им для квадратуры своих луночек.

Построение правильного семиугольника

точно так же передано нам только по-арабски. Шой открыл его, изучая трактат аль-Бируни о построении правильного девятиугольника *).

Сабит ибн-Корра, который еще читал греческий текст этого сочинения Архимеда, жалуется на плохое состояние рукописи. Только после долгих усилий ему удалось распутать ход доказательства.

Сочинение это в том виде, в котором его передал нам Сабит, содержит, прежде всего, ряд предложений относительно прямоугольных треугольников. Предложения 16 и 17, где говорится

*) C. Schouy, *Die trigonometrischen Lehren des... Al-Biruni* (Hannover, 1927). См., кроме того, I. Tropicke, *Z. math.-nat. Unter.* 59, стр. 195 (1928) и *Die Siebeneckabhandlung des Archimedes*, *Osiris* 1, стр. 636. В области обозначений я следую за Тропфке.

о построении семиугольника, совершенно независимы от предыдущих.

Предложение 16. Пусть через квадрат $ABDC$ (рис. 127) проведена диагональ BC и из точки D трансверсаль $DTEZ$ так, чтобы треугольники DTC и ZAE были равновелики. (Легко убедиться, поворачивая трансверсаль, что такое положение будет всегда существовать.) Опустим из T на AB перпендикуляр TK . Отрезки ZA , AK и KB обозначим через x , y и z . Тогда будут иметь место следующие теоремы о площадях:

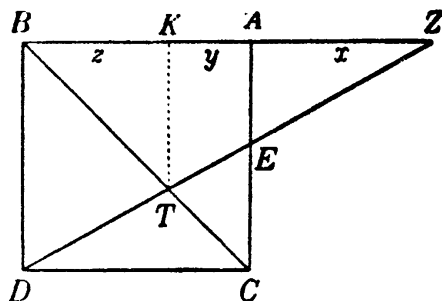


Рис. 127.

$$AB \cdot KB = AZ^2 \text{ или } (y + z)z = x^2, \quad (1)$$

$$ZK \cdot AK = KB^2 \text{ или } (x + y)y = z^2. \quad (2)$$

Доказательство этих предложений легко получается из рассмотрения равновеликих треугольников. Архимед ничего не говорит о способе построения трансверсали и отрезков x и y ; однако это нетрудно сделать с помощью конических сечений. Действительно, если положить $y + z = a$, то уравнения (1) и (2) можно переписать так:

$$a(a - y) = x^2, \quad (3)$$

$$(x + y)y = (a - y)^2. \quad (4)$$

Уравнение (3) представляет в прямоугольных координатах параболу, а уравнение (4) — гиперболу. Эти кривые пересекаются в трех точках на конечном расстоянии, причем одна из этих точек лежит в первом квадранте.

Теперь Архимед на основании $AK = y$ строит треугольник AKH со сторонами $AH = x$ и $HK = z$ (рис. 128), описывает около треугольника BHZ окружность и утверждает, что отрезок BH является стороной вписанного в эту окружность семиугольника. Не правда ли, даже дыхание захватывает? Доказательство можно прочесть у Тропфке.

Невольно ставишь себе вопрос: каким образом Архимед мог додуматься до такого построения? Тропфке дает на это следующий ответ.

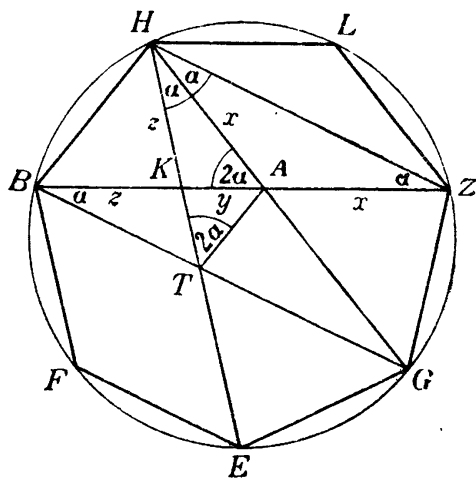


Рис. 128.

Представим себе построенный семиугольник $BHLZGEF$. Пусть диагональ BZ пересечет HE и HG в точках K и A , а BG пересечет HE в T . Отрезки ZA , AK и KB диагонали ZB обозначим снова через x , y , z ; тогда получим также, что $AN = x$ и $KN = z$. Пусть α будет опирающийся на сторону семиугольника вписанный угол. Треугольники ZHK , NAK и HTA подобны, ибо у всех у них один угол равен α , а другой 2α . Отсюда сразу получаются пропорции

$$z : (x + y) = y : z, \quad z : x = x : (y + z),$$

которые будут соответственно равнозначны с (2) и (1)*).

Остальные произведения Архимеда

Мы уже говорили ранее об «Измерении круга» и «Исчислении песка».

Как бы ни были важны работы Архимеда по механике, здесь мы можем только кратко упомянуть о них. В сочинении «О равновесии плоских фигур» впервые строго логически из целого ряда аксиом выводится знаменитый закон рычага: *Две величины уравновешивают друг друга, если их расстояния будут обратно пропорциональны весам* **). При помощи этого закона определяются центры тяжести параллелограмма, треугольника и трапеции, а в книге II — центр тяжести параболического сегмента, а также центр тяжести части площади параболы, заключенной между двумя параллельными прямыми.

В сочинении «О плавающих телах» Архимед сначала выводит законы давления жидкости на погруженные в нее тела, удельный вес которых меньше, равен или больше удельного веса жидкости. Образцом истинного мастерства является исследование устойчивого равновесия плавающего прямого сегмента параболоида вращения. Надо самому прочитать это превосходное сочинение, чтобы быть в состоянии оценить его!

Папп в пятой книге своей «Collectio» сообщает кое-что и об исследованиях Архимеда относительно полуправильных многогранников, которые ограничиваются:

4 правильными треугольниками и 4 правильными шестиугольниками,

или 8 треугольниками и 6 квадратами,

или 6 квадратами и 8 шестиугольниками,

или 8 треугольниками и 6 восьмиугольниками,

*) Раздел о построении правильного семиугольника добавлен в английский и немецкий переводы. (Прим. перев.)

**) Тщательный анализ этого вывода и разбор критики Э. Маха можно найти у W. Stein, Quellen u. Studien Gesch. Math., B. I (1930), стр. 221.

или 8 треугольниками и 18 квадратами,
 или 12 квадратами, 8 шестиугольниками и 6 восьмиугольниками,
 или 20 треугольниками и 12 пятиугольниками,
 или 12 пятиугольниками и 20 шестиугольниками,
 или 20 треугольниками и 12 десятиугольниками,
 или 32 треугольниками и 6 квадратами,
 или 20 треугольниками, 30 квадратами и 12 пятиугольниками,
 или 30 квадратами, 20 шестиугольниками и 12 десятиугольниками,
 или 80 треугольниками и 12 пятиугольниками.

Кеплер показал в своем «*Harmonices mundi*» (Сочинения, т. V, стр. 123), как можно получить эти тела. Описание их имеется у Th. Heath, *History of Greek Mathematics*, II (Oxford, 1921), стр. 99 *).

По арабскому преданию**), Архимед открыл также известную формулу площади треугольника, обычно приписываемую Герону

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Немного моложе Архимеда был

Эратосфен Киренский

Это был трудолюбивый и добросовестный ученый, с очень большим вкусом, но он не обладал гением Архимеда. Может быть, поэтому друзья и называли его «бета», что у нас звучало бы как «номер второй». Другое его прозвище было «пентатлос», т. е. атлет-пятиборец, многосторонний спортсмен, который достиг превосходных результатов в самых различных областях, но ни в одной из них чемпионом не был. И действительно, он был знаменит во многих отраслях: как математик, географ, историк, филолог и поэт. Образчиком его тонкого стихотворного искусства является эпиграмма об удвоении куба, о которой мы уже упоминали. В его диалоге «Платоник» рассматривается не только эта делийская задача, но и философские проблемы и некоторые вопросы теории музыки. Он написал поэму о звездном небе в форме повествования о небесных странствиях Гермеса и его всевозможных занятых приключениях. Он также собрал мифы, касающиеся созвездий.

*) На русском языке, см. в переводе «Начал» Евклида Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. III, стр. 319—326, где приведен отрывок из Кеплера. (Прим. перев.)

**) Al-Biruni, *Das Buch über die Sehnen*. См. Biblioteca Mathematica 11, XI, 3, стр. 11—78 (1910). [Все подготовительные предложения к выводу этой формулы содержатся в первых предложениях «Книги о семиугольнике». (Прим. перев.)]

(Он вычислил наклон эклиптики, расстояния до Солнца и Луны и длину земной окружности. Он составил новую карту мира, основанную на предположении шарообразности земли, и написал большое исследование о древней греческой комедии. Он является основателем критической хронологии: он научил человечество точно определять даты исторических событий.

Биография

Около 260 до н. э. молодой Эратосфен из своего родного города на берегу Африки уехал в Афины для изучения философии. По его собственным рассказам, он приехал в очень удачное время, так как тогда в Афинах собрались корифеи философии. Это была эпоха развития вечно спорящих друг с другом философских школ. По образцу платоновской Академии и аристотелевского Ликейя Эпикур основал свой «Сад», а Зенон — «Стою» — портик с колоннами. Ни Зенон, ни Эпикур не были крупными философами; это были догматики, а их представления о природе были уже давно устаревшими; однако стоицизм и эпикурейство были самыми модными направлениями, что продолжалось и в римскую эпоху.

Весьма популярны были также киники, которые называли себя так потому, что прозвище Диогена было «собака» (κύων). Учение Диогена имеет очень мало общего с тем, что в наше время называется цинизмом: он учил, что люди могут достичь истинной свободы, лишь освободившись от своих желаний. О Диогене существует много анекдотов: будто он ходил по городу в одном плаще и сандалиях, таская с собой деревянную чашку для воды, а ночь иногда проводил в огромном сосуде (знаменитая бочка), отрицал всякие условности и безжалостно осмеивал разные надуманные потребности.

Первые стоики Зенон и Хрисипп испытали, правда, известное влияние кинического учения, но тем не менее попытались создать такие правила нравственности, которые подошли бы для надежного чиновника; надо помнить, что они жили во времена великих эллинистических монархий с их огромным чиновничьим аппаратом управления. Против компромиссов и нравственной казуистики стоиков выступил Аристон Хиосский. Мудрецу, говорил он, для которого справедливость является врожденной истиной, нет необходимости в каких-нибудь правилах жизни на каждый случай; он и без этого знает, что надо делать. «Мудрец подобен искусному артисту, который одинаково хорошо играет и роль Агамемнона, и роль Терсита», т. е. он принимает жизнь как она есть, а душой стоит выше нее.

За увлекательный ораторский талант Аристона называли «Сиреной». Однако Эратосфен восхищался больше всего его последовательной, не допускавшей никаких уступок этикой.

Эратосфен высоко ценил также и Аркесилая, обновившего Академию. Преемники Платона Ксенократ и Полемон, хотя и были очень порядочными и благонамеренными людьми, но под их руководством Академия целиком увязла в бесплодных рассуждениях о значении чисел. Аркесилай положил этому конец и с воодушевлением начал бороться с догматизмом Стои. Он неумолимо ниспровергал наивно-эмпирическую теорию познания стоиков. У него не было никаких догм собственного учения; он просто старался развивать в своих учениках диалектический метод: они должны были уметь защищать положения, которые затем он оспаривал. Он также считал совершенно бесспорным, что каждый философ должен прежде всего знать математику. Сам он в лице Автолика имел превосходного преподавателя математики. Эратосфену, как думает Шварц*), было около пятидесяти лет, когда его пригласили ко двору Птолемея III в качестве воспитателя наследника престола. В это же время он стал главой всемирно известной библиотеки. Вероятно, он и до этого жил в Александрии, потому что труд его жизни был бы немыслим без постоянной помощи большой библиотеки. Где же в другом месте мог он собрать материал для своей географической карты мира, для своей хронографии, своих филологических работ, описаний небесных путешествий? Математику и астрономию он мог изучить только в Александрии, но не в Афинах.

Эратосфен, действительно, был типичным александрийским ученым. Его стихией была утонченная культура эллинистического царского двора, где поэты, философы и грамматикки соревновались друг с другом по части изысканных языковых форм, ученой аргументации и в высшей степени искусственной поэзии. Тонкие комплименты, которые Эратосфен в своей эпиграмме подносит царю и его сыну, обличают в нем весьма искушенного царедворца.

В конце жизни Эратосфен ослеп. Он умер «смертью философов» — так называли в те времена самоубийство.

Хронография и градусное измерение

Хронографические труды Эратосфена отличаются критической тщательностью. Основным правилом у него было — не считаться с легендами, недоступными проверке, и датировать исключительно на основании подлинных документов (например, по спискам победителей на олимпийских играх) и разумных оценок времени событий. Только для троянской войны он не мог удержаться и отклонился от своего принципа.

*) E. Schwarz, *Charakterköpfe aus der Antike*, Leipzig, 1943.

Его работа по измерению Земли была такой же добросовестной. Более древняя оценка, о которой упоминает Архимед, исходила из представления, что расстояние от Лизимахии на Геллеспонте до Сиены в Египте равняется 20 000 стадиям. Но это расстояние измерялось и по суше, и по морю, и поэтому проверить его было невозможно. В силу этого Эратосфен взял меньшее расстояние, которое можно было измерить точнее, именно расстояние от Александрии до Сиены, которая лежит почти точно к югу от Александрии. Вероятно, на основании данных специалистов по измерению путей он принял, что расстояние от Александрии до Сиены равняется 5000 стадиям. Затем он установил, что во время летнего солнцестояния Солнце в Сиене стоит как раз в зените, а в Александрии оно отклоняется от зенита на $\frac{1}{50}$ долю четырех прямых углов. Отсюда он вывел, что окружность Земли равняется $50 \times 5000 = 250\,000$ стадий. Так как мы точно не знаем длины стадии, то можно только сказать, что порядок величины вполне удовлетворителен.

Удвоение куба

Напомним о том, что мы уже сказали об этой задаче в главе VI, рассмотрим ее механическое решение, которое было дано Эратосфеном и которое было высечено на камне в храме царя-бога Птолемея. Я дам в переводе этот текст в том виде, как он был высечен на каменной таблице, т. е. без пояснений (по-моему, излишних) подложного письма Эратосфена. Чтобы понять, в чем тут дело, надо помнить, что над текстом находилась бронзовая модель, состоявшая из трех треугольных или прямоугольных пластинок, которые можно было передвигать вперед и назад между двумя рейками, из которых одна была неподвижна, а другая могла сдвигаться. Ниже находился следующий текст с чертежом (рис. 129):

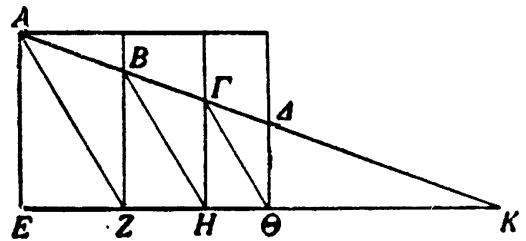


Рис. 129.

«Для двух данных отрезков найти две средние пропорциональные в непрерывной пропорции. Пусть будут даны линии AE и $A\Theta$; тогда я сдвигаю пластинки рассматриваемого инструмента так, чтобы точки A, B, Γ, Δ лежали на одной прямой. Так как AE и BZ параллельны, то KA к KB имеет то же отношение, как KE к KZ , а поскольку AZ и BH тоже параллельны, то в том же отношении будет и KZ к KH . Таким образом, KE будет к KZ , как KZ к KH . Но так же относятся друг к другу и AE к BZ , а также и BZ к ΓH . Совершенно так же мы докажем, что BZ относится к ΓH , как ΓH к $\Delta\Theta$. Таким образом, $AE, BZ, \Gamma H$ и $\Delta\Theta$ образуют (непрерывную) пропорцию. Следовательно, для двух заданных (отрезков) найдены две средние пропорциональные.

Если же заданные отрезки не равны AE и $\Delta\Theta$, то мы получим средние пропорциональные, если сделаем AE и $\Delta\Theta$ им пропорциональными; затем мы вернемся к первоначально данным и задание будет выполнено.

Когда требуется найти большее число средних пропорциональных, то мы возьмем в этом инструменте одной пластинкой больше числа средних пропорциональных, которые нужно построить. Доказательство остается тем же самым».

Теория чисел

Наиболее известное открытие Эратосфена в области теории чисел — это *решето Эратосфена* — способ отсеять простые числа из нечетных чисел, сообщенный нам Никомахом Гераским («*Introductio arithmetica*», глава 13). Выписывают любое количество нечетных чисел, начиная с 3. Затем оставляют первое число 3 и вычеркивают все кратные 3. Начиная от 3, они стоят всегда через два места друг от друга. Затем оставляют второе число 5 и вычеркивают все его кратные, которые стоят на расстоянии четырех мест друг от друга. Затем берут третье число 7 и т. д. В конце концов останутся только простые числа.

Средние

Другая арифметическая теория, которую мы должны приписать Эратосфену, касается образования различного рода средних (или средних пропорциональных) из геометрической средней и вывода всех других средних пропорциональных из равенства, как рассказано у Никомаха, Теона Смирнского и Паппа.

Изложения Теона и Паппа начинаются с философского введения:

(Теон) «Эратосфен говорит, что отношение есть источник пропорциональности и начало возникновения всего, что происходит в порядке. Все пропорции возникают из отношений, а источник всех отношений есть равенство».

(Папп) «Пропорция составляется из отношений, а равенство есть источник всех отношений. Геометрическая средняя действительно имеет своим первоисточником равенство: она устанавливает самое себя и другие средние. Она показывает, как говорит божественный Платон, что пропорциональность есть источник всех гармоний и каждого разумного и упорядоченного возникновения. Он говорит, что единственным связующим звеном всех наук, причиной всякого возникновения и вечной связью всего существующего является божественная природа пропорциональности».

В Диалогах нет слов, которые приписываются здесь Платону, а Теон приписывает почти те же самые слова Эратосфену. Причина этого совершенно ясна: перед нами не речи философа Платона, это говорит другой Платон — действующее лицо из эратосфенова диалога «Платоник».

Так же пишет иногда и Аристотель: «Сократ говорит в „Государстве“...», а иной раз — «Платон говорит в „Государстве“...»

Здесь, конечно, всегда подразумевается не живой Сократ, а действующее лицо из платонова диалога в «Государстве».

У Теона Эратосфен подробно рассуждает о началах, из которых могут составляться различного рода сущности: для чисел — это единица, для величин — точка, для отношений — равенство.

Но что означают слова «средняя геометрическая производит самое себя, а также и остальные средние»? Десять «средних» (μεσοτῆτες) определяются у Паппа следующим образом:

- 1) $A - B = B - \Gamma$ или $A + \Gamma = 2B$ — арифметическая средняя;
- 2) $A : B = B : \Gamma$ или $A\Gamma = B^2$ — геометрическая средняя;
- 3) $(A - B) : (B - \Gamma) = A : \Gamma$ — гармоническая средняя;
- 4) $(A - B) : (B - \Gamma) = \Gamma : A$ — обратная гармонической средняя;
- 5) $(A - B) : (B - \Gamma) = \Gamma : B$ — пятая средняя;
- 6) $(A - B) : (B - \Gamma) = B : A$ — шестая средняя;
- 7) $(A - \Gamma) : (A - B) = B : \Gamma$ или $A = B + \Gamma$ — седьмая средняя;
- 8) $(A - \Gamma) : (A - B) = A : B$ — восьмая средняя;
- 9) $(A - \Gamma) : (A - B) = A : \Gamma$ — девятая средняя;
- 10) $(A - \Gamma) : (B - \Gamma) = B : \Gamma$ — десятая средняя.

Первые три средние — это древнепифагорейские средние, три следующие были найдены Евдоксом, а последние четыре — «позднейшими». Затем Папп, процитировав уже приведенные слова «Платона», продолжает:

«Теперь надо показать, как эти 10 средних получаются из геометрической. Начнем со следующей теоремы.

Предложение 17. Пусть A, B, Γ будут три пропорциональных члена и пусть

$$\begin{aligned}\Delta &= A + 2B + \Gamma, \\ E &= B + \Gamma, \\ Z &= \Gamma.\end{aligned}$$

Тогда Δ, E, Z будут опять три члена пропорции».

Папп доказывает это предложение, преобразуя пропорции, а в предложении 18 он кратко показывает на трех примерах, как все трехчленные пропорции (A, B, Γ) получаются из равенства $(1, 1, 1)$ при помощи повторного применения предложения 17. Это гораздо подробнее изложено у Теона и Никомаха — начиная с трехчленной пропорции $(1, 1, 1)$ и применяя предложение 17, получаем последовательно:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{array} \text{ и т. д.}$$

затем, при помощи обращения,

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad \text{и т. д.}$$

и после нового применения предложения 17

9 6 4 и т. д. и т. д.

Применяя обратный процесс, можно каждую трехчленную целочисленную пропорцию привести к равенству (1, 1, 1).

Нельзя сказать, чтобы это имело глубокий смысл, но, пожалуй, довольно красиво.

Каким образом геометрическая пропорция, породив самое себя, производит и другие средние, можно видеть из ряда предложений 20—27, из которого мы для примера приведем одно:

«П р е д л о ж е н и е 20. Если А, В, Г пропорциональны, то

$$\Delta = 2A + 3B + \Gamma,$$

$$E = 2B + \Gamma,$$

$$Z = B + \Gamma$$

дают гармоническую среднюю».

Это предложение показывает, что квадратные уравнения, выражающие различные средние, как, например,

$$E(\Delta + Z) = 2\Delta Z,$$

для гармонической средней из Δ , E и Z могут быть все приведены к нормальной форме

$$B^2 = A\Gamma$$

при помощи линейных подстановок вроде

$$\Delta = 2A + 3B + \Gamma,$$

$$E = 2B + \Gamma,$$

$$Z = B + \Gamma *).$$

Приведенные предложения, несомненно, заимствованы из эратосфенова исследования о средних, которое Папп дважды упоминает в VII книге. Очевидно, Эратосфен изложил в «Платонике» эту теорию вместе с некоторыми ее философскими следствиями, но в математической работе он добавил и доказательства.

Свое изложение, заимствованное у Адраста, Теон заканчивает следующими замечательными словами:

«Эратосфен доказывает, что и все фигуры также составлены из некоторых пропорций, так что они возникают из равенства и снова могут быть преобразованы в равенство, но говорить об этом здесь нет нужды».

*) Арифметическую и седьмую среднюю, которые выражаются при помощи не квадратных, а линейных уравнений, Папп, разумеется, не рассматривает. Латинские переводчики Коммандин и Гульч не заметили этого разумного ограничения и ввели два предложения, 19 и 24, которых у Паппа нет. Гульч даже «перевел» эти интерполяции «обратно» на греческий язык!

Если бы здесь слово «фигуры» было заменено словом «средние», то все было бы совершенно ясно; однако, что же понимает Эратосфен под «всеми фигурами» — *τὰ σχήματα πάντα*?

Я думаю, что под «фигурами» следует понимать конические сечения, заданные квадратными уравнениями в однородных координатах, и что Эратосфен хочет сказать, что все эти уравнения при помощи линейных подстановок могут быть приведены к виду $B^2 = AG$ или $A : B = B : G$.

Несколько лет тому назад, когда мне случайно пришлось это высказать, мое толкование казалось мне самому довольно смелым и имеющим мало шансов на подтверждение. Но недавно я узнал, что Таннери, исходя из совершенно других источников пришел к подобной же догадке. Исходным пунктом Таннери было следующее.

В книге VII, перечисляя сочинения по геометрическому анализу и геометрическим местам, Папп, назвав произведения Евклида и Аполлония на эту тему, упоминает о работе Эратосфена «Περὶ μέσότητος» («О средних») в двух книгах. Далее, у него упоминается, кроме того, о некоторых геометрических местах (*τόποι*), которые Эратосфен называл *τόποι πρὸς μέσότητάς*, т. е. «геометрические места, имеющие отношение к средним». Об этих геометрических местах он говорит, что они «относятся к уже упомянутым выше видам, но отличаются от них своеобразием постулатов». А до этого упоминались такие виды: прямая линия, круг, конические сечения, высшие кривые и поверхности. Из другого места (стр. 652 *), где *τόποι πρὸς μέσότητάς* поставлены рядом с другими видами кривых, следует, что это не поверхности, а еще в другом месте (стр. 672) они противопоставлены прямой и кругу. Таким образом, эти *τόποι* должны быть либо коническими сечениями, либо высшими плоскими кривыми.

Из различных источников мы знаем, что Аристей и Аполлоний придавали большое значение «геометрическим местам к трем или четырем прямым», которые определялись как геометрические места точек, расстояния которых от трех или четырех данных прямых, измеренные по перпендикуляру или по направлению с заданным наклоном, образуют пропорцию, которая для трех прямых будет трехчленной пропорцией

$$A : B = B : G,$$

а для четырех — пропорцией из 4 членов:

$$A : B = G : \Delta.$$

Эти геометрические места суть конические сечения, как частично было доказано Аристеем, а полностью — Аполлонием.

*) Папп в издании Гульча. (Прим. перев.).

Совершенно так же можно определить и для других средних геометрические места точек, расстояния которых (по перпендикуляру или по наклонной) до трех заданных прямых дают среднюю гармоническую и т. д. Эти кривые тоже будут коническими сечениями и *τότοι πρὸς μεσότηας* было бы подходящим для них названием. В силу этого Таннери и предполагает, что это как раз и будут те кривые, которые определил Эратосфен в своей работе о средних. Если это предположение верно, то оно объясняет и замечание Теона.

Прежде чем перейти к последнему гениальному математику древности, Аполлонию Пергскому, скажем несколько слов о конкуренте Эратосфена, геометре

Никомеде

По времени Никомед стоит между Эратосфеном и Аполлонием, так как он критикует Эратосфеново удвоение куба, а Аполлоний в одном месте упоминает о кохлоиде Никомеда. Он, очевидно, принадлежал к той же группе александрийских математиков, что и Эратосфен с Аполлонием.

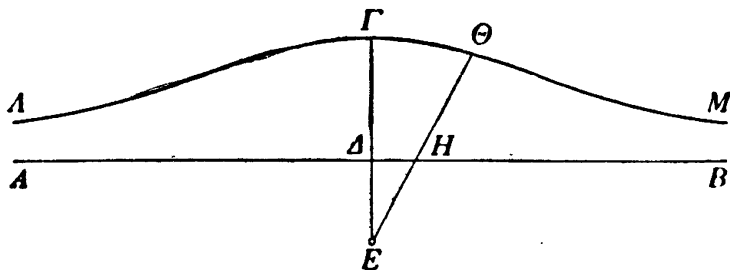


Рис. 130.

Кохлоида или *конхоида* Никомеда описывается у Паппа (книга IV, предложение 26) следующим образом (рис. 130):

Пусть $\Gamma\Delta E$ перпендикулярна к AB . Будем вращать прямую $\Gamma\Delta E$ вокруг точки E так, чтобы Δ всегда оставалась на AB , а $\Gamma\Delta$ сохраняла свою длину. Тогда Γ опишет кривую $\Lambda\Gamma M$, обладающую такими свойствами: если из E провести к кривой прямую линию $EH\Theta$, то кривая и прямая AB отсекают на указанной прямой отрезок $H\Theta$, который всегда равен $\Gamma\Delta$. Точка E называется *полюсом* конхойды, AB —*линейкой*, а $\Gamma\Delta$ —*расстоянием*.

Папп сообщает, что Никомед дал описание прибора для черчения этой кривой. Никомед показал, что кривая в обе стороны от E подходит все ближе и ближе к прямой AB и что всякая прямая, проведенная от AB в сторону кривой, должна где-нибудь пере-

сечь кривую. Отсюда следует: если даны две прямые АВ и АН (рис. 131) и некоторая точка Е вне угла ВАН, то всегда возможно построить отрезок прямой заданной длины НК так, чтобы Н лежала на прямой АН, а К—на прямой АВ и чтобы продолжение НК проходило через Е. Это построение для *neusis* может быть выполнено, если найти точку пересечения прямой АН с кохлоидой, имеющей полюс в Е, «линейку» АВ и «расстояние», равное данной длине.

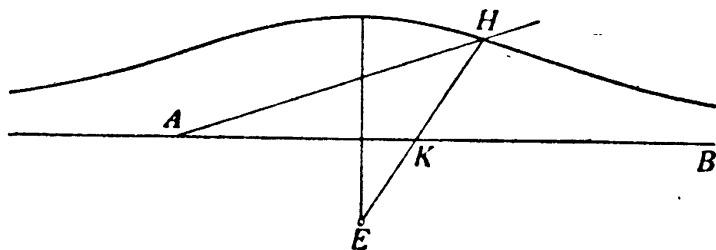


Рис. 131.

Никомед очень гордился открытием этой кривой. Он применил свое построение для *neusis* к двум знаменитым задачам — трисекции угла *) и удвоению куба.

Трисекция угла

Пусть АВГ будет данный угол и АГ — прямая, перпендикулярная к ВГ (рис. 132). Проведем АЕ параллельно ВГ. Теперь между прямыми АГ и АЕ построим отрезок ЕД, вдвое больший, нежели АВ, и продолжение которого проходит через В. Как мы видели, это построение для *neusis* может быть выполнено при помощи кохлоиды. Тогда угол ГВЕ будет в точности равен $\frac{1}{3}$ данного угла АВГ.

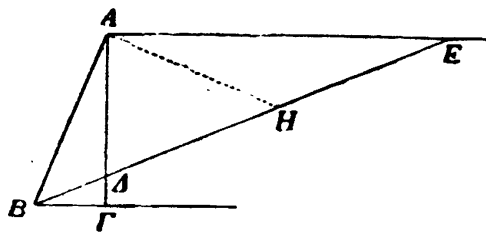


Рис. 132.

Доказательство. Разделим ДЕ в Н пополам и проведем АН. Тогда (поскольку прямоугольный треугольник АДЕ можно вписать в полукруг) каждый из отрезков НД, НА и НЕ будет равен половине ДЕ, а следовательно, и АВ. Теперь в равнобедренном треугольнике АВН

$$\angle AVD = \angle ANA,$$

*) По крайней мере так говорит Прокл (*Comm. in Eucl.*, стр. 272). Однако Папп, по-видимому, хочет приписать самому себе честь этого открытия.

Наконец, продолжим $K\Delta$ и BA до их пересечения в точке M . Тогда $ГК$ и AM будут две искомые средние пропорциональные между AB и $BГ$.

Собственно прямая $K\Delta M$ не нужна. Из пропорций

$$AM : 2\Delta\Lambda = AM : AB = \Delta M : \Delta K = ГВ : ГК$$

и

$$\Theta Z : \Lambda\Lambda = \Theta Z : \Theta K = ГН : ГК = 2ГВ : ГК$$

непосредственно следует:

$$AM = \Theta Z,$$

так что вместо AM можно подставить ΘZ и сказать: $ГК$ и ΘZ суть две искомые средние пропорциональные между AB и $BГ$. Это доказательство требует рассмотрения только той фигуры, которая на рисунке лежит ниже прямой HK .

Пусть читатель сам попробует найти это доказательство. Чем больше ему придется помучиться, тем больше он будет восхищаться остроумием Никомеда, который нашел не только это доказательство, но и построение. Один намек: вычислить KZ по теореме Пифагора и затем воспользоваться второй из вышеприведенных пропорций.

Если это вам не удастся, то вы можете найти доказательство у Heath'a (т. I, стр. 261) или в третьей книге Паппа в переводе Вер Ееске (I, стр. 43).

Теперь мы переходим к последнему поистине великому геометру древности

Аполлонию Пергскому

Расцвет деятельности Аполлония падает примерно на 210 до н. э., в царствование Птолемея Филадельфа. Еще юношей он приехал в Александрию и учился там математике у учеников Евклида. В Музее у него было прозвище Epsilon будто бы потому, что он создал теорию движения Луны, а лунный серп похож на букву ϵ . Не столь важно, правда это или нет, но совершенно ясно, что он был не только великим математиком, но также и великим астрономом.

Первым свидетелем по этой части является астролог Веттий Валент, который сообщает нам, что он пользовался таблицами Аполлония при вычислении положения Солнца и Луны во время затмения. Правда, нельзя с уверенностью сказать, говорится ли у него об Аполлонии из Перги или о каком-нибудь другом Аполлонии; мы не знаем также, как были построены эти лунно-солнечные таблицы и на какой теории они основывались. Поэтому вернее поискать более надежные источники для того, чтобы узнать кое-что об астрономии Аполлония.

Теория эпициклов и эксцентров

была основой теоретической астрономии александрийских математиков вплоть до Клавдия Птолемея, который в своем мастерском труде «Альмагест» завершил дело античной астрономии.

Согласно теории эпициклов каждая планета движется по небольшому кругу, который называется *эпициклом*, а центр его в то же самое время описывает большую окружность вокруг наблюдателя. В теории эксцентров

получается наоборот: планета движется по большей окружности — *эксцентру*, центр которого описывает небольшой круг около наблюдателя.

Как рассказывает нам Птолемей, Аполлоний Пергский доказал два важных предложения, которые позволяют определить те точки планетной орбиты, в которых прямое движение для земного наблюдателя переходит в попятное и наоборот. Первое из этих предложений относится к теории эпициклов и гласит (рис. 134):

Если от нашего глаза Z провести прямую ZNB , которая пересечет эпицикл так, что

половина ее отрезка NB , находящегося внутри эпицикла, так относится к отрезку ZH между глазом и ближайшей точкой ее пересечения с эпициклом, как угловая скорость самого эпицикла относится к угловой скорости планеты по эпициклу, то эта точка H окажется как раз на границе между прямым и попятным движением, т. е. планета, достигнув точки H , будет казаться находящейся в покое. При этом подразумевается, что оба круговых движения — как эпицикла, так и планеты — по эпициклу совершаются в одном и том же направлении.

Второе предложение, аналогичное первому, относится к гипотезе эксцентра.

Если бы нам пришлось доказывать подобное предложение, то мы рассуждали бы примерно так:

Пусть r будет радиус эпицикла, Ω — угловая скорость центра E эпицикла, а ω — угловая скорость планеты по эпициклу. Линейная скорость планеты по эпициклу будет тогда

$$v = r\omega.$$

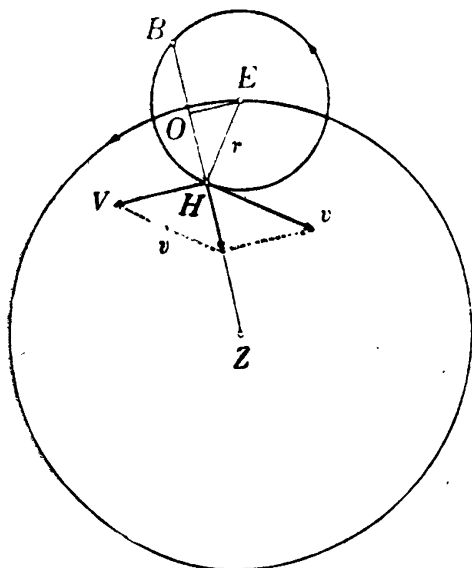


Рис. 134.

Точно так же линейная скорость точки H во вращении всего эпикла вокруг Z будет

$$V = ZH \cdot \Omega.$$

Наблюдаемая из Z планета будет казаться неподвижной, если результирующая обеих этих скоростей будет как раз проходить через Z . Тогда параллелограмм скоростей будет состоять из двух прямоугольных треугольников. Если опустить из E перпендикуляр EO на ZH , то эти прямоугольные треугольники будут подобны треугольнику $ЕОН$. Отсюда получается пропорция

$$V : v = HO : r,$$

$$V \cdot r = HO \cdot v,$$

$$ZH \cdot \Omega r = HO \cdot \omega r,$$

$$ZH : HO = \omega : \Omega.$$

Это как раз и будет результат Аполлония.

Конечно, это рассуждение никак нельзя назвать классическим: сложение и разложение скоростей не встречаются в классических произведениях. И, тем не менее, я полагаю, что Аполлоний мог получить свое заключение при помощи рассуждения в этом роде. В «Механике» Герона встречается сложение прямолинейных равномерных движений; следовательно, параллелограмм скоростей не мог быть совершенно чуждым для греков понятием *).

Причина, по которой Аполлоний не дал этого простого вывода, заключается, по моему мнению, не в том, что он не мог этого сделать, а в том, что он хотел большего. Он хотел не только определить момент, когда видимая скорость равна нулю, но и неопровержимо доказать, что движение, прямое до этого момента, после него сменяется попятным.

По словам Птолемея, Аполлоний в своем доказательстве исходил из следующего вспомогательного предположения: если в треугольнике $AB\Gamma$ (рис. 135), где $B\Gamma > A\Gamma$, отложить на стороне ΓB

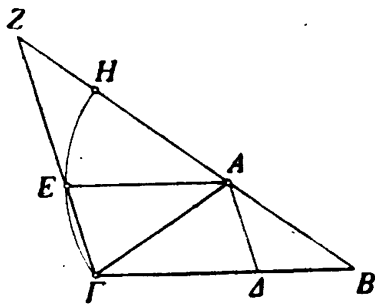


Рис. 135.

*) Параллелограмм скоростей для прямолинейных и равномерных движений совершенно ясно сформулирован уже в «Механических проблемах», приписываемых Аристотелю. Анализ способа построения касательной к архимедовой спирали в книге «О спиралях» с полной ясностью обнаруживает, что закон сложения скоростей был известен Архимеду. Наконец, вся астрономия у Птолемея основывается на совершенно ясно подразумеваемых правилах сложения вращательных движений. Птолемей знал даже, что пара вращений дает поступательное движение. (Прим. перев.)

Удвоенный вписанный угол В равен соответствующему центральному углу НЕК; следовательно,

$$\frac{1}{2} \text{ВН} : \text{НЗ} > \angle \text{НЗК} : \angle \text{НЕК}.$$

Но $\frac{1}{2} \text{ВН}$ и НЗ относятся, как угловые скорости эпицикла и планеты; следовательно, отношение этих угловых скоростей больше, чем отношение углов НЗК и НЕК.

Таким образом, угол, который к НЕК имеет то же отношение, что и угловая скорость эпицикла к угловой скорости планеты, больше угла НЗК. Пусть этот угол будет НЗН. В то время, когда планета проходит дугу эпицикла КН, центр эпицикла совершает прямое движение, которое в угловой мере будет равно углу НЗН. Следовательно, когда планета проходит дугу эпицикла КН в обратную сторону, она совершает меньший путь, нежели тот, на который ее передвигает вперед эпицикл собственным движением на угол НЗН. Таким образом, в общей сложности планета передвинулась вперед.

Разве это доказательство не мастерской образец классического рассуждения?

Аналогичным образом доказывается, что на дуге НК в видимом движении планета идет назад, если эта дуга отложена по направлению к перигею.

«Konika»,

т. е. *конические сечения*, — так называется самое знаменитое произведение Аполлония.

Математики древнего и нового времени имели все основания безмерно восхищаться этим поистине мастерским произведением *).

Не может быть речи о том, чтобы разобрать здесь «Konika» полностью. На это потребовалась бы целая книга, а такая книга уже существует: это превосходная работа Цейтена «Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum», дополненная в некоторых важных пунктах «Apollonius-Studien» Нейгебауэра **). Поэтому я ограничусь тем, что дам общее представление о построении и стиле труда Аполлония и укажу в главных чертах, что было известно до него о конических сечениях и что он добавил к этому ***).

*) Английский перевод: Th. Heath, *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections* (1896). Французский перевод: Ver Eecke, *Les Coniques d'Apollonius* (1924).

**) O. Neugebauer, *Studien zur antiken Algebra*, II, Quellen u. Studien [В] 2 (1933), стр. 215.

***) Весь конец данного раздела, заключенный нами в квадратные скобки, опущен в английском и немецком переводах. (Прим перев.)

[Во введении к рассматриваемому произведению сам Аполлоний касается последнего пункта:

«Аполлоний приветствует Евдема...

Когда я посетил тебя в Пергаме, то заметил, что ты хочешь познакомиться с написанными мной «Кони́ка». Поэтому я посылаю тебе эту первую книгу в исправленном виде; остальное я отправлю, когда сам буду им доволен. Ведь ты, конечно, должен вспомнить, что я тебе сказал о причине, заставившей меня приняться за писание этих книг, а именно, о желании, выраженном математиком Навкратом в то время, когда он гостил у меня в Александрии, и о том, что, когда он торопился уехать, то я как можно скорее написал это сочинение в восьми книгах и передал ему, без всякой отделки; я записывал все так, как мне это приходило в голову*), намереваясь пересмотреть это позднее. Теперь я имею свободное время, и буду последовательно издавать то, что я уже усовершенствовал...

Из восьми книг первые четыре содержат начала этой теории (т. е. общие основы): Первая книга содержит способ получения конических сечений, затем «противолежащие конические сечения»**) и их основные свойства (symptoma)***), изложенные подробнее и общее, чем в трудах моих предшественников. Вторая книга рассматривает диаметры, главные оси, асимптоты и другие вещи, необходимые для диоризмов****). Третья книга содержит много замечательных предложений, очень полезных для синтеза*****) пространственных геометрических мест*****)) и для диоризмов; из них большая часть являются изящными и новыми.... Четвертая книга учит, во скольких точках конические сечения могут пересекать друг друга или круг, и — чего мои предшественники не рассматривали, — во скольких точках два противолежащих конических сечения могут быть пересечены одним коническим сечением, окружностью или парой противолежащих сечений. Последние четыре книги рассматривают более высокие темы: пятая — наибольшие и наименьшие линии, идущие от какой-нибудь точки к коническому сечению, шестая — равенство и подобие конических сечений, седьмая — предложения, необходимые для диоризмов, восьмая — задачи, к которым относятся эти диоризмы.].

Конические сечения до Аполлония

Менехм уже знал параболу и равностороннюю гиперболу, он пользовался пересечением этих кривых для удвоения куба. Около 300 до н. э. теория конических сечений была уже настолько разработана, что Евклид смог написать учебное руководство по этому предмету. Эти «Начала конических сечений» утрачены, но мы можем

*) Аполлоний совершенно не упоминает о продолжавшихся многие годы подготовительных работах, которые, без сомнения, требовались для систематического построения этой теории. Работа Аполлония построена строго методически; таким образом, не следует буквально понимать, что он записывал «как ему приходило в голову».

**) То есть две ветви гиперболы.

***)) То есть их уравнения в прямоугольных и косоугольных координатных осях.

****)) То есть различие случаев, когда какое-нибудь построение является возможным или нет.

*****)) То есть для доказательства.

*****)) То есть геометрических мест, представляющих конические сечения.

все-таки составить о них представление, ибо Архимед нередко приводит предложения из этой книги. Любопытный читатель может обратиться за подробностями к уже упоминавшейся книге Дейкстергейса (*Dijksterhuis, Archimedes*, I, стр. 51 — 100).

Незадолго до Евклида Аристей написал книгу о «Пространственных местах», т. е. о конических сечениях, рассматриваемых как геометрические места. Архимед, определяя площади и объемы, попутно доказывает ряд нужных ему предложений о конических сечениях.

Итак, у Аполлония были выдающиеся предшественники, но он, по его собственным словам, изложил основания теории конических сечений более подробно и на более общих основаниях, чем его предшественники. В чем же заключались эти обобщения?

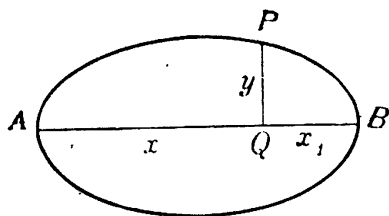


Рис. 137.

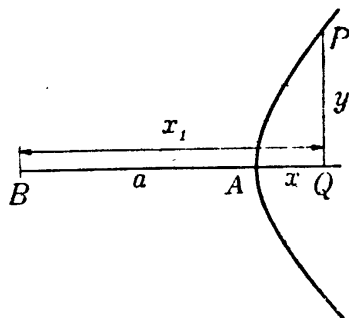


Рис. 138.

Архимед и более древние авторы уже систематически определяют конические сечения при помощи «симптомов», т. е. при помощи уравнений в прямоугольных большей частью, но иногда и в косоугольных координатах. У Менехма мы уже находим уравнение параболы

$$y^2 = px \quad (1)$$

и равносторонней гиперболы

$$xy = A. \quad (2)$$

У Архимеда уравнения гиперболы и эллипса всегда имеют форму «уравнения с двумя абсциссами» следующего вида. Пусть $AB = a$ — большая ось конического сечения (рис. 137 и 138). Опушенный из некоторой точки конического сечения на AB перпендикуляр $PQ = y$ называется «ординатой», а расстояния $AQ = x$ и $BQ = x_1$ — «абсциссами». Таким образом, в случае эллипса $x_1 = a - x$, а в случае гиперболы $x_1 = a + x$. «Симптом» кривой, т. е. условие, которому должна удовлетворять любая точка P кривой, в обоих случаях таков:

$$y^2 : xx_1 = a, \quad (3)$$

где α —данное отношение. Для круга $\alpha=1$, т. е. $y^2=xx_1$. Если $\bar{x}$, $\bar{x}_1$ и $\bar{y}$ будут абсциссы и ордината другой точки кривой, то (3) можно также переписать в виде

$$y^2 : xx_1 = \bar{y}^2 : \bar{x}\bar{x}_1. \quad [(4)]$$

Архимед всегда дает симптом именно в этой форме. В зависимости от задачи, которую он рассматривает, он по-разному выбирает вторую точку $(\bar{x}, \bar{y})$. Аполлоний в I, 21 *) дает этот симптом в той же форме (4), а в I, 20 он дает аналогичную форму для параболы:

$$y^2 : \bar{y}^2 = x : \bar{x}.$$

Разбирая «Data», мы естественно пришли к новому обозначению αB для величины, имеющей к B данное отношение α . Если α дано в виде отношений $c:d$, то вместо αB можно также писать:

$$(c:d) B.$$

Пользуясь этим очень удобным обозначением, можно весьма сжато передавать запутанные формулировки древних и вместо (3) можно писать:

$$y^2 = \alpha x x_1, \quad (5)$$

а для эллипса и гиперболы

$$y^2 = \alpha x (a - x) \quad \text{или} \quad y^2 = \alpha x (a + x).$$

А это уже довольно похоже на современную аналитическую геометрию. Каким же образом, однако, из определений конических сечений можно вывести симптом (3), (4) или (5)?

Мы уже указывали, что до Архимеда каждое из трех конических сечений получалось из кругового конуса определенного вида при помощи сечения его плоскостью, перпендикулярной к образующей. При этом параболу называли «сечением прямоугольного конуса», гиперболу—«сечением тупоугольного конуса», эллипс—«сечением остроугольного конуса».

Эллипс как сечение конуса по Архимеду

У Архимеда **) мы находим доказательство, что каждый эллипс можно рассматривать как сечение некоторого кругового конуса, вершина которого может быть произвольно выбрана в плоско-

*) То есть в 21-м предложении I книги «Конических сечений». (Прим. перев.)

**) «О коноидах и сфероидах», предложения 7—8.

сти симметрии эллипса. Архимед исходит из основного свойства («симптома») эллипса в виде (5) и доказывает, что кривая, представленная этим симптомом, действительно лежит на прямом или косом круговом конусе. Но тем же самым доказательством можно воспользоваться и для вывода симптома, если он еще не известен. Разберем поэтому подробнее это доказательство.

Архимед сначала рассматривает случай, когда вершина конуса лежит на перпендикуляре к плоскости эллипса, восстановленном

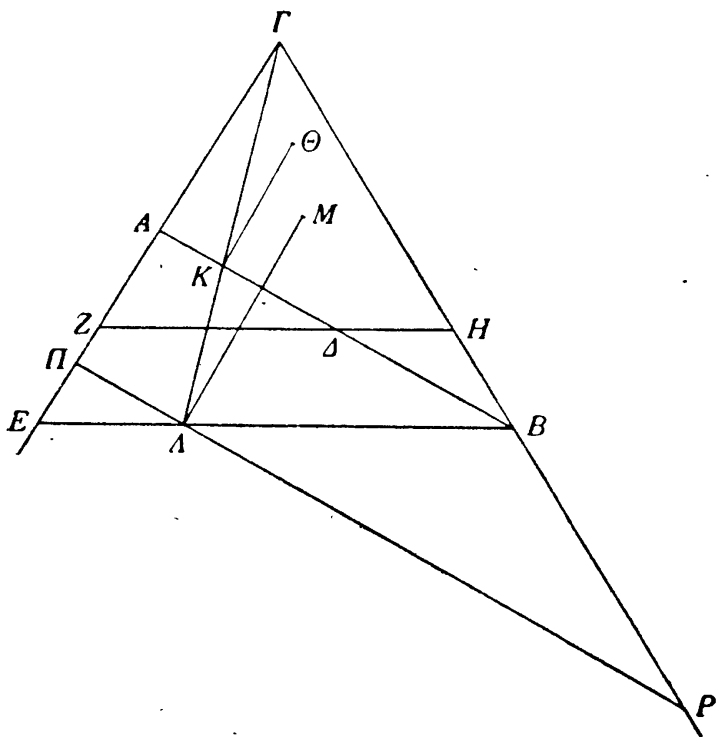


Рис. 139.

из его центра (предложение 7), и затем к этому частному приводит общий случай (предложение 8). Метод доказательства в обоих случаях в точности тот же самый, но доказательство предложения 8 более наглядно. Оно протекает следующим образом:

«Пусть AB —главная ось данного эллипса, Δ —его центр (рис. 139), N —половина другой оси, а точка Γ лежит в плоскости, проходящей через AB и перпендикулярной к плоскости эллипса. Надо найти конус с вершиной Γ , на котором лежит этот эллипс.

Возьми $\Gamma E = \Gamma B$ и через Δ параллельно EB проведи прямую ZH . Теперь в плоскости, проходящей через EB и перпендикулярной к плоскости $AB\Gamma$, построй круг, если N^2 равно $\Delta Z \cdot \Delta H$, или же, в противном случае, эллипс, у которого одна главная ось будет EB , а квадрат другой оси Σ определяется равенством

$$N^2 : (\Delta Z \cdot \Delta H) = EB^2 : \Sigma^2. \quad (6)$$

Согласно уже доказанному предложению 7 этот круг или эллипс лежит на прямом или косом круговом конусе с вершиной Г. Мы должны доказать, что на боковой поверхности этого конуса будет лежать также и эллипс с главной осью АВ.

Если это не имеет места, то пусть Θ будет точка эллипса, которая не находится на боковой поверхности конуса. Из Θ опусти на АВ перпендикуляр ΘК. Продолжи ГК, и пусть она пересечет ЕВ в точке Δ. Проведи ΔМ перпендикулярно к ВЕ (подразумевается, перпендикулярно к плоскости ВГЕ) так, чтобы точка М лежала на боковой поверхности конуса. Наконец, через Δ параллельно АВ проведи ПР.

Теперь на основании (6) получится:

$$N^2 : (\Delta Z \cdot \Delta H) = \Delta M^2 : (E\Delta \cdot \Delta B) \rangle. \quad (7)$$

Здесь Архимед воспользовался симптомом эллипса, построенного на ЕВ; отношение $\Delta M^2 : (E\Delta \cdot \Delta B)$ является одним и тем же для каждой точки эллипса и равно отношению квадратов полуосей.

После этого он применяет вспомогательное планиметрическое предложение, которое, очевидно, предполагает известным и которое можно формулировать так: *Если через некоторую точку Δ провести две прямые, например АВ и ЗН, до пересечения со сторонами угла АГВ, а через другую точку Λ параллельно первым—две линии ПР и ЕВ, то отношение произведений получившихся отрезков будет одним и тем же как для Δ, так и Λ:*

$$(\Delta Z \cdot \Delta H) : (\Delta A \cdot \Delta B) = (E\Delta \cdot \Delta B) : (\Delta П \cdot \Delta P). \quad (8)$$

Это вспомогательное предложение очень просто доказать, перемножая две пропорции

$$\Delta Z : \Delta A = \Delta E : \Delta П,$$

$$\Delta H : \Delta B = \Delta B : \Delta P.$$

Из (7) и (8) получается при помощи «сложения» отношений *):

$$N^2 : (\Delta A \cdot \Delta B) = \Delta M^2 : (\Delta П \cdot \Delta P).$$

При помощи симптома данного конического сечения можно левую часть заменить выражением $\Theta K^2 : AK \cdot BK$; следовательно,

$$\Delta M^2 : (\Delta П \cdot \Delta P) = \Theta K^2 : (AK \cdot BK). \quad (9)$$

Кроме того,

$$(\Delta П \cdot \Delta P) : \Gamma \Delta^2 = (AK \cdot BK) : \Gamma K^2. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получается опять при помощи «сложения» отношений:

$$\Delta M^2 : \Gamma \Delta^2 = \Theta K^2 : \Gamma K^2.$$

*) Напоминаем, что в греческой математике «сложение» отношений равносильно нашему умножению. (Прим. перев.)

Таким образом,

$$МЛ : ГЛ = \Theta К : ГК,$$

откуда и следует, что Г, Θ и М лежат на одной прямой и, значит, Θ —на поверхности конуса.

Как были первоначально выведены симптомы?

В этом доказательстве не так уж трудно изменить порядок рассуждений на обратный и из представления, что Г, Θ , М лежат на одной прямой, вывести симптом конического сечения. Таким образом, при помощи простых планиметрических пропорций из симптома для конического сечения ЕМВ можно вывести тот же симптом для конического сечения А Θ В.

Доказательство будет еще проще, если первое коническое сечение будет кругом, для которого симптом таков:

$$y^2 = xx_1.$$

Действительно, тогда вместо (6) получаем:

$$N^2 = \Delta Z_1 \Delta H \text{ и } EB = \Sigma,$$

а вместо (7)

$$\Lambda M^2 = EA \cdot \Lambda B.$$

Тогда наш конус будет прямым круговым. Пожалуй, именно этот случай и был нужен Менехму и Евклиду для вывода симптома их «сечения остроугольного конуса». Можно себе представить, что эти «древние» уже следовали такому методу доказательства, а Архимед только обобщил и обратил общеизвестное доказательство. Это объяснило бы и причину сжатости его изложения.

Легко придумать аналогичные доказательства для параболы и гиперболы. Эти доказательства можно найти у *Dijksterhuis, Archimedes*, I, стр. 53—54.

Предположение, что Менехм шел именно таким путем, становится еще вероятнее, потому что аналогичные доказательства имеются у Аполлония. Но прежде чем перейти к этому, придется ответить еще на один вопрос.

Вопрос и ответ

Почему «древние», и прежде всего Менехм, рассматривали только сечения плоскостями, перпендикулярными к образующей конуса? Может быть, общий случай был для них слишком труден? Вряд ли это можно допустить.

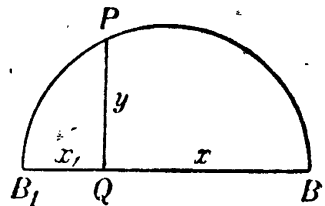


Рис. 140

Вместе с Цейтеном я ищу объяснение скорее в том, что им нужно было прежде всего доказать, что кривая с данным уравнением (1) и (5) всегда может быть получена как коническое сечение, т. е. как сечение некоторого конуса. Действительно, это доказательство особенно просто как раз в том случае, когда секущая плоскость перпендикулярна к образующей. Существует бесконечное множество конусов вращения, которые пересекаются данной плоскостью по заданному коническому сечению, но из всех этих конусов проще всего построить два конуса, вершины которых лежат на перпендикулярах к плоскости данного сечения, восстановленных в одной из его вершин.

Детальную разработку этой точки зрения можно найти в 21-й главе упомянутой книги Цейтена:

Вывод симптомов по Аполлонию *)

вполне аналогичен выводу, взятому нами у Архимеда, но проще и общее.

Осью косоугольного конуса Аполлоний называет прямую, соединяющую вершину T с центром основания. Пусть теперь

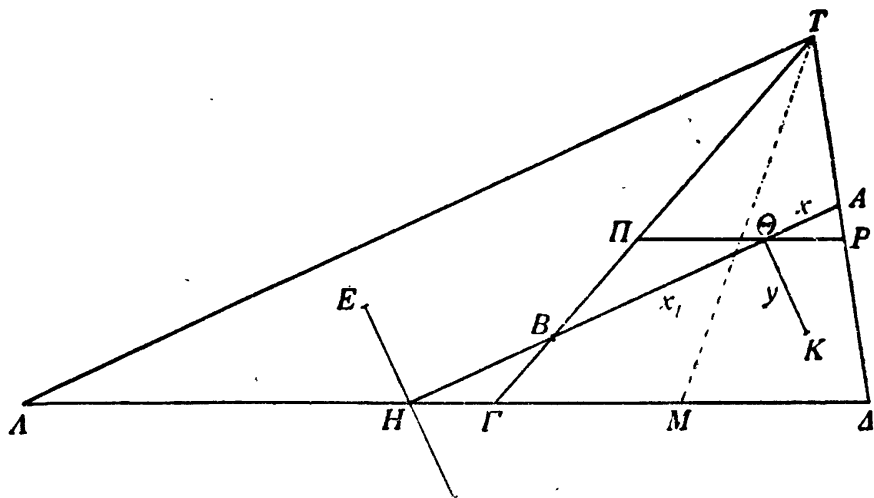


Рис. 141.

какая-нибудь секущая плоскость пересекает основание по прямой EZ ; тогда в плоскости основания он проводит диаметр $ГД$, перпендикулярный к EZ . Возьмем эту плоскость $ТГД$ как плоскость чертежа; тогда плоскость конического сечения пересечет ее по прямой $АВ$. Выберем ее за ось x . Ордината $КΘ$ произвольной точки конического сечения проводится параллельно EZ . Эта прямая

*) *Конические сечения*, I, 11—13.

лежит как в плоскости конического сечения АВ, так и в плоскости круга ПКР, проведенной через К параллельно кругу в основании. В плоскости этого круга ΘK согласно построению перпендикулярна к диаметру РП, так что уравнение круга будет опять

$$\Theta K^2 = \Theta П \cdot \Theta Р.$$

Теперь Аполлоний проводит ТЛ параллельно АВ и перемножает пропорции

$$\Theta П : \Theta В = \Lambda Г : \Lambda Т,$$

$$\Theta Р : \Theta А = \Lambda \Delta : \Lambda Т,$$

откуда получается:

$$(\Theta П \cdot \Theta Р) : (\Theta В \cdot \Theta А) = (\Lambda Г \cdot \Lambda \Delta) : \Lambda Т^2.$$

Это — частный случай того же самого вспомогательного предложения, которое мы уже встречали у Архимеда. Если мы заменим $\Theta П \cdot \Theta Р$ через ΘK^2 и отношение в правой части обозначим через α , то получим симптом эллипса:

$$K\Theta^2 = \alpha (\Theta А \cdot \Theta В)$$

или, если воспользуемся нашим прежним способом обозначения,

$$y^2 = \alpha x x_1. \quad (11)$$

Аналогично Аполлоний находит для параболы

$$y^2 = p x. \quad (12)$$

Уравнения совершенно такие же, как и раньше; различие лишь в том, что в плоскости конического сечения ордината $K\Theta$, которую мы отныне будем обозначать $PQ = y$, уже не перпендикулярна к диаметру АВ, который в дальнейшем мы будем обозначать AA_1 . Таким образом, новым у Аполлония является то, что конус и плоскость конического сечения уже не имеют более общей плоскости симметрии, а вследствие этого направления x и y уже не перпендикулярны друг к другу.

Но это еще не все. При помощи геометрической алгебры Аполлоний приводит уравнения (11) и (12) к новой очень полезной форме. Уравнение (12) просто означает, что y^2 равняется прямоугольнику с основанием x и постоянной высотой p . В двух других случаях y^2 будет так же равняться прямоугольнику с основанием x и высотой αx , но эта высота теперь уже не будет постоянной. Для гиперболы (рис. 143)

$$x_1 = a + x; \text{ следовательно, } \alpha x_1 = \alpha a + \alpha x;$$

таким образом, прямоугольник будет «приложен» к некоторому постоянному отрезку $p = \alpha a$ так, что в «избытке» получается еще один прямоугольник, и притом такой, что основание x и высота αx

избыточного прямоугольника имеют постоянное отношение $a = p : a$. Для эллипса (рис. 144)

$$x_1 = a - x; \text{ следовательно, } ax_1 = aa - ax;$$

таким образом, прямоугольник так приложен к отрезку $p = aa$, что «недостает» еще куса с основанием x и высотой ax , причем основание и высота опять имеют то же самое отношение $a = p : a$.

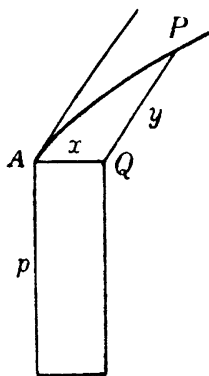


Рис. 142

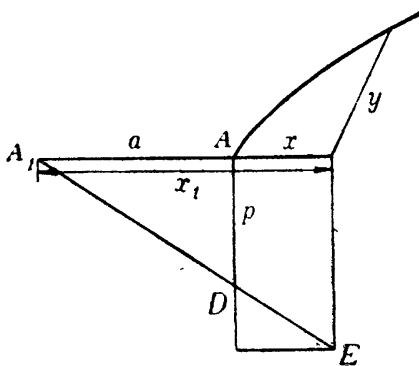


Рис. 143.

Как мы знаем, терминология такого приложения площадей заимствована из геометрической алгебры. От греческих слов «приложение», «избыток», «недостаток» произошли названия параболы, гиперболы и эллипса.

Приведенные выше чертежи Аполлония состоят из двух неодинаковых частей: можно было бы даже говорить о чертеже геометрическом и о чертеже алгебраическом.

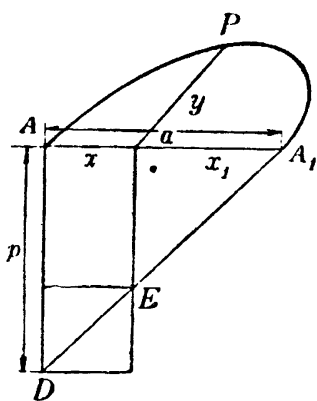


Рис. 144.

К геометрическому чертежу относятся: коническое сечение, в котором, собственно говоря, и заключается вся суть, система косоугольных осей, абсцисса x и ордината y . Алгебраический чертеж будет уже не косоугольным, а прямоугольным, он дает алгебраическое соотношение между a , p , x и y . Площади, которые в данном случае прикладываются или отнимаются, соответствуют членам уравнения современной аналитической геометрии, а все алгебраические преобразования, которые мы производим над уравнением, доказываются у Аполлония геометрически. При этом ход рассуждений является вполне алгебраическим, и он гораздо более «современен», чем можно было бы заключить из запутанной геометрической формулировки. Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не

геометрическим, и он гораздо более «современен», чем можно было бы заключить из запутанной геометрической формулировки. Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не

менее виртуозно умеет скрывать свой первоначальный ход мыслей. Из-за этого-то его книгу и трудно понимать: рассуждения его элегантны и кристально ясны, но что его привело именно к таким рассуждениям, а не к иным каким-нибудь,—об этом можно лишь догадываться.

Только что переданные геометрическим языком соотношения между площадями прикладываемых прямоугольников и квадратом y^2 можно выразить и алгебраическими формулами в таком виде:

$$y^2 = xax_1 = x(aa \pm ax) = x(p \pm ax) = x\{p \pm (p:a)x\}, \quad (13)$$

где знак плюс стоит для гиперболы, а знак минус для эллипса. Величины a и p , входящие в это уравнение, называются *latus transversum* и *latus rectum*. Пропорция $p:a = ax_1:x$ может быть также выражена геометрически, если провести прямую A_1DE .

Сопряженные диаметры и сопряженные гиперболы

Середину линии AA_1 (рис. 145) Аполлоний называет *центром конического сечения*; линию, проходящую через центр C в направлении ординат, он называет *сопряженным с AA_1 диаметром*.

У эллипса сопряженный диаметр пересекает кривую в двух точках D и D_1 , ординаты которых могут быть непосредственно определены из уравнения (11), если положить $x = x_1 = \frac{1}{2}a$. Длина сопряженного диаметра $DD_1 = \bar{a}$ будет, очевидно, средней пропорциональной между a и p :

$$\bar{a}^2 = aa^2 = ap. \quad (14)$$

Теперь Аполлоний доказывает (I, 15), что оба сопряженных диаметра могут взаимно заменить друг друга, т. е. что эллипс, у которого DD_1 есть направление абсцисс, а CA_1 — направление ординат, определяется симптомом точно такого же вида, как первоначальный симптом (13), причем новый *latus transversum* $\bar{a}$ определяется формулой (14), а новый *latus rectum* $\bar{p}$ — из пропорции

$$\bar{a}:a = a:\bar{p} \text{ или } a^2 = \bar{a}\bar{p}. \quad (15)$$

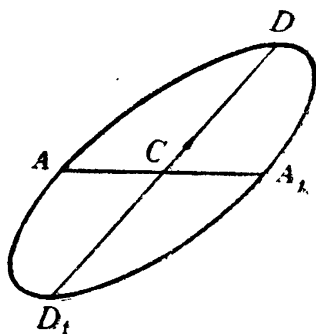


Рис. 145.

Слово «гипербола» обозначает у Аполлония то, что мы называем одной из ветвей гиперболы. Две ветви, которые вместе, по нашему представлению, образуют гиперболу, он называет, «про-

тиволежащими гиперболами». Это понятие вовсе не является новейшим открытием Аполлония, ибо он в предисловии к IV книге говорит, что Никотелес в полемическом сочинении против Конона уже указал (без доказательства), во скольких точках самое большее круг или коническое сечение могут пересечь пару противоположащих сечений. Новостью, по-видимому, было введенное Аполлонием понятие о *сопряженных гиперболах*. Вот как они были определены в конце первой книги:

Аполлоний исходит из пары «противолежащих гипербол» и проводит через центр C в направлении ординат прямую DD_1 .

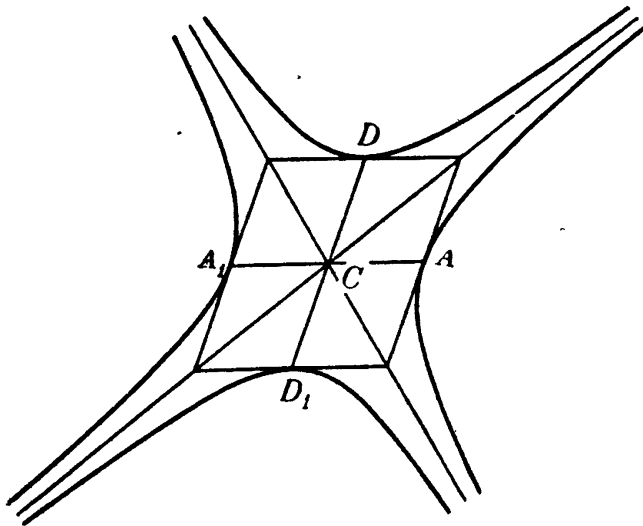


Рис. 146.

На ней в обе стороны откладываются равные отрезки $CD = CD_1$ так, чтобы $DD_1 = \bar{a}$ удовлетворяла уравнению (14), т. е. была бы средней пропорциональной между a и p . После этого по уравнению (15) определяется $\bar{p}$ так, чтобы и a тоже была средней пропорциональной между $\bar{a}$ и $\bar{p}$. Затем строятся две новые, противоположащие гиперболы, имеющие в качестве направления ординат CA , диаметр DD_1 , latus rectum $\bar{a}$ и latus transversum $\bar{p}$. Это и будут сопряженные гиперболы. В книге II доказывается, что они имеют те же самые асимптоты. Введя сопряженные гиперболы, Аполлоний так же изящно и просто формулирует все теоремы о сопряженных диаметрах для гипербол, как это было сделано для эллипса.

Касательные

При поверхностном чтении первой книги «Конических сечений» Аполлония можно подумать, что у Аполлония нет никакого определенного метода и что просто он «записывает все, что ему случай-

но придет в голову», если воспользоваться выражением Декарта*). Но это не так. Цейтен показал, что Аполлоний имел определенную цель, которая и была достигнута к концу первой книги, и что он ввел в эту книгу именно те предложения, которые ему были необходимы для достижения этой цели. Цель же эта была — доказать, что сечения, которые первоначально были определены на произвольном наклонном круговом конусе и характеризовались определенным «симптомом», могут быть получены и как сечения прямых круговых конусов и, следовательно, тождественны с тремя уже давно известными типами.

Для достижения этого надо было сначала показать, что диаметр AA_1 и соответствующее ему направление ординат, которые естественно появлялись при стереометрическом выводе этого симптома, могут быть заменены любым другим диаметром PP_1 и соответствующим направлением ординат, причем последнее будет совпадать с направлением касательной в P . Поэтому сперва должна была быть определена касательная в любой точке кривой.

Касательной Аполлоний называет прямую, которая имеет с коническим сечением одну общую точку, а в других местах лежит вне его. Прежде всего, в I, 17 доказывалось, что прямая, проведенная через A в направлении ординат, будет касательной в указанном смысле. Затем идет несколько простых предложений о прямых, пересекающих коническое сечение. В I, 32 еще раз повторяется, что прямая, проведенная через A в направлении ординат, касается конического сечения, но уже добавляется некоторое уточнение: между этой прямой AC и коническим сечением не может быть никакой другой прямой, проходящей через A . Для доказательства он показывает, что всякая другая прямая AD пересекает коническое сечение еще в другой точке H . После этого он строит касательную в произвольной точке P . Для параболы построение очень просто: через P проводится ордината PQ , а QA продолжается на равный отрезок AR . Тогда PR будет касательной в P (предложение 33).

Для гиперболы, эллипса и круга R определяется при помощи пропорции

$$RA : RA_1 = QA : QA_1 \quad (16)$$

(I, 34). Позднее это соотношение между 4 точками называли «гармоническим расположением».

В I, 35—36 доказывалось, что построенная таким образом касательная в P является единственной и что между коническим

*) Descartes, *Géometrie* (изд. Van Schooten, стр. 7). Хотя Декарт слова «как ему прямо придет в голову» взял из предисловия Аполлония, но он употребляет их в совершенно другом смысле. Декарт хочет сказать, что у него есть метод, у Аполлония же нет. [Прим. к немецкому переводу.]

сечением и касательной не может быть проведена через P никакая другая прямая.

В I, 37 пропорция (16) преобразуется в соотношение между отрезками, начинающимися в центре C (рис. 148):

$$CQ \cdot CR = CA^2.$$

После этого дается соотношение, могущее послужить для

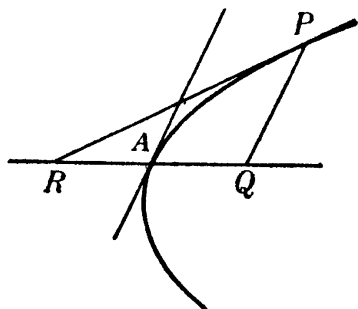


Рис. 147.

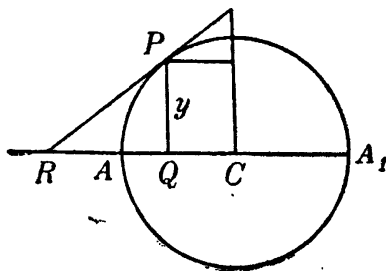


Рис. 148

определения точки касания P , если дано R (а следовательно, и Q):

$$(CQ \cdot QR) : y^2 = a : p. \quad (17)$$

Аналогичные соотношения существуют и для сопряженного диаметра (I, 38).

Уравнение, отнесенное к центру

Уравнение эллипса или гиперболы «с двумя абсциссами» имело вид

$$y^2 : xx_1 = p : a,$$

или, что то же,

$$xx_1 = (a : p) y^2. \quad (18)$$

Если мы теперь перенесем начало координат в центр C (рис. 149 и 150), т. е. возьмем $x_C = CQ$ в качестве новой абсциссы, и положим $AC = \frac{a}{2} = c$, то получим для гиперболы

$$xx_1 = (x_C - c)(x_C + c) = x_C^2 - c^2,$$

а для эллипса или круга

$$xx_1 = (c - x_C)(c + x_C) = c^2 - x_C^2,$$

так что уравнение (18) будет теперь иметь вид

$$x_C^2 - c^2 = (a : p) y^2 \text{ (гипербола),} \quad (19)$$

$$c^2 - x_C^2 = (a : p) y^2 \text{ (эллипс и круг).} \quad (20)$$

Эти уравнения, отнесенные к центру, в предложении 41 Аполлоний представляет в несколько другой форме. Квадраты в левой части он заменяет сначала двумя подобными прямоугольниками $c \cdot \beta c$ и $x_c \cdot \beta x_c$, где β —некоторое произвольное отношение.

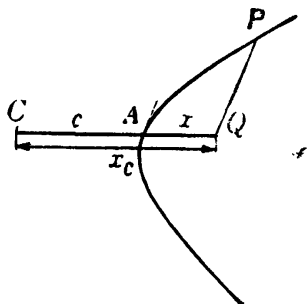


Рис. 149.

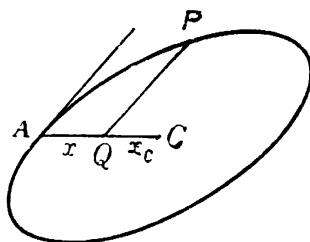


Рис. 150.

Тогда, если γ представляет отношение, «сложенное» из $(a : p)$ и β , то уравнение (19) принимает вид

$$x_c \cdot \beta x_c - c \cdot \beta c = y \cdot \gamma y,$$

или

$$x_c \cdot \beta x_c - y \cdot \gamma y = c \cdot \beta c. \quad (21)$$

Таким же образом получается для эллипса или круга

$$x_c \cdot \beta x_c + y \cdot \gamma y = c \cdot \beta c. \quad (22)$$

После этого прямоугольники в левых и правых частях (21) и (22) заменяются тремя подобными параллелограммами, которые

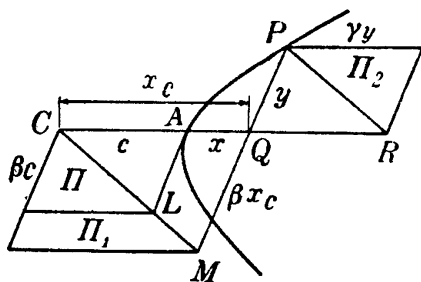


Рис. 151.

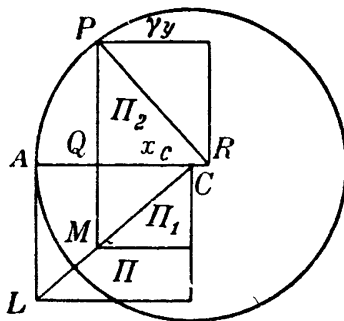


Рис. 152.

пропорциональны этим прямоугольникам. Пусть Π будет параллелограмм со сторонами c и βc , Π_1 — подобный ему параллелограмм со сторонами x_c и βx_c , а Π_2 — параллелограмм со сторонами y и γy , с теми же углами, что у Π и Π_1 . Тогда формулы (21) и (22) могут быть выражены так:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \Pi \text{ (гипербола)}, \quad (23)$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi \text{ (эллипс или круг)}. \quad (24)$$

В приложениях Аполлоний выбирает угол параллелограмма всегда равным углу между направлениями абсцисс и ординат. Для этого случая даны рис. 151 и 152.

Если разделить параллелограмм пополам, то получится соотношение между площадями треугольников:

$$\triangle CQM \pm \triangle PQR = \triangle CAL. \quad (25)$$

При этом отношение β может быть выбрано произвольно. В форме (25) уравнение, отнесенное к центру, написано как раз в наиболее удобном виде для задуманного Аполлонием преобразования координат.

Теорема о двух касательных и преобразование к новым осям

Аполлоний хочет показать, что все диаметры равноценны, т. е. что если исходить из любой точки E кривой и в качестве оси абсцисс взять диаметр EC , а в качестве оси ординат — направле-

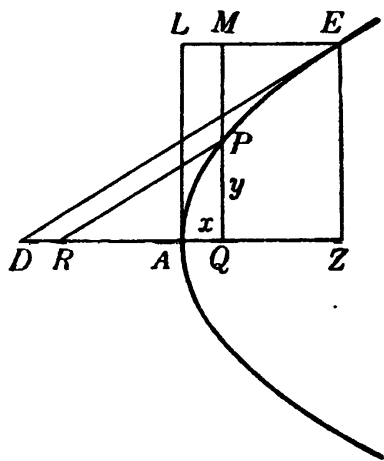


Рис. 153.

ние касательной в E , то получится симптом в той же форме, что и для первоначального диаметра с соответствующим направлением ординат.

Для этого он, прибегая к операциям с площадями, так преобразует симптом конического сечения, чтобы в него входили на равных правах оба диаметра AC и EC вместе с их направлениями ординат. Первоначально симптом был уравнением, куда входили прямоугольники и квадраты. Сначала (в предложении 41, о котором мы уже говорили) он преобразует их в параллелограммы, затем

в треугольники, затем в трапецию с треугольником и, наконец (в III книге), в четырехугольники, стороны которых параллельны двум диаметрам и направлениям их ординат.

Главную роль при этом играют два предложения, которые Нейгебауэр назвал «теоремами о двух касательных». Первая относится к параболе и гласит (рис. 153):

1, 42. Пусть дана парабола с началом A и диаметром AB ; в некоторой точке E параболы проведены касательная ED и ордината EZ . Проведем, далее, через произвольную точку P параболы прямые PR и PQ , параллельные касательной ED и ординате EZ . Дополним параллелограмм $AZEL$. Тогда

$$\text{треугольник } PQR = \text{параллелограмму } ALMQ. \quad (26)$$

«площадью $CMPR$ » надо называть разность площадей треугольников CMS и PRS .

Аполлоний не применяет таких несобственных четырехугольников, и поэтому он несколько иначе формулирует свои теоремы о площадях. Например, в предложении III, 3 утверждается, что для двух произвольных точек P , P' площади $SPMM'$ и $SP'RR'$ будут равны между собой (рис. 159—161).

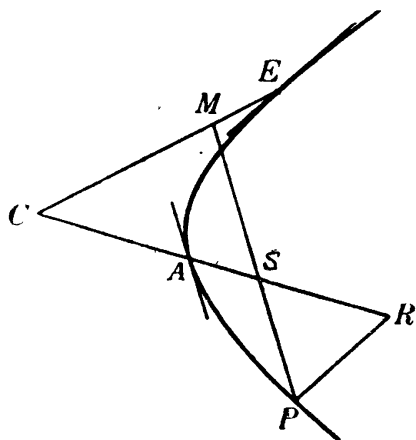


Рис. 158.

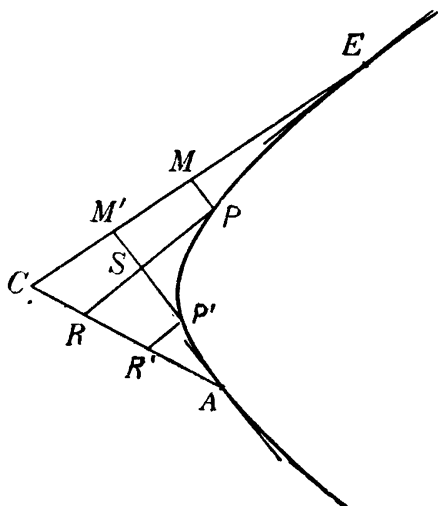


Рис. 159. Гипербола.

Такая формулировка, кроме того, имеет то преимущество, что она остается неизменной и для параболы, где центра не существует. В двух других случаях предложение III, 3, очевидно, равносильно формулировке Цейтена

$$CMPR = CM'P'R'.$$

Сам Аполлоний в третьей книге рассматривает теоремы о площадях в систематической последовательности:

III, 1. Предельный случай $P' = A$, $P = E$.

III, 2. Предельный случай $P' = A$, P — произвольная точка.

III, 3. Точки P и P' обе произвольные.

III, 4—12. То же самое для двух противоположащих ветвей гиперболы.

III, 13—15. То же самое для двух сопряженных гипербол.

Это, конечно, показывает, как высоко ценил Аполлоний эти теоремы. [Он сам в предисловии говорит: «Третья книга содержит много замечательных доказательств, которые полезны для синтеза и диоризма пространственных геометрических мест; большая часть их являются новыми и изящными»]*).

*) Эта фраза выпущена в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

Цейтен говорит, что эти теоремы о площадях важны по той причине, что их можно рассматривать как «симптомы» конических сечений по отношению к двум произвольным диаметрам, взятым

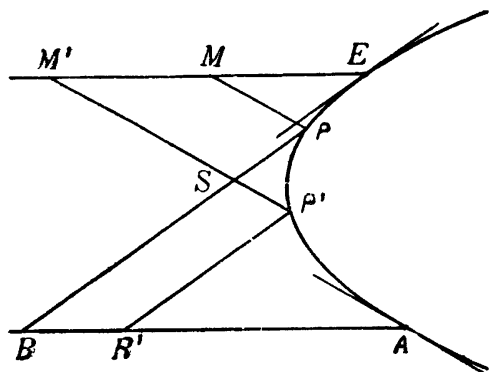


Рис. 160. Парабола.

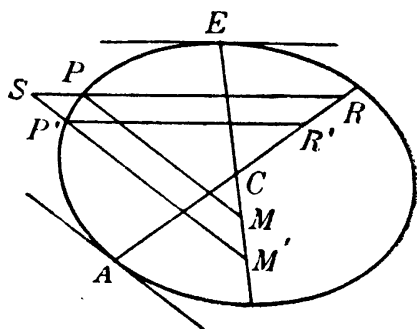


Рис. 161. Эллипс.

в качестве координатных осей. Если, например, в случае, изображенном на рис. 162, четырехугольник $CMPR$ разделить пунктирными линиями на параллелограмм $CQPT$ и два треугольника PQR и PTM и обозначить стороны параллелограмма через x и y , то ясно, что этот

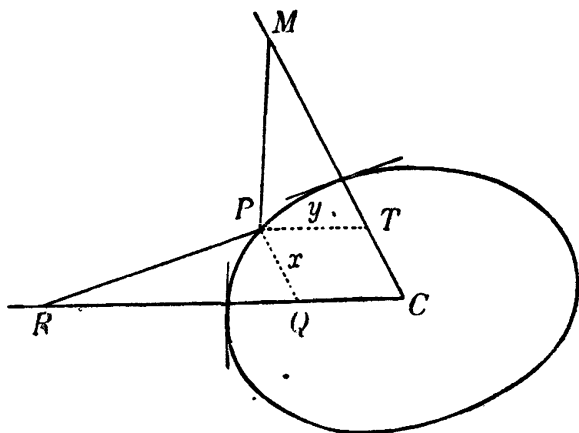


Рис. 162.

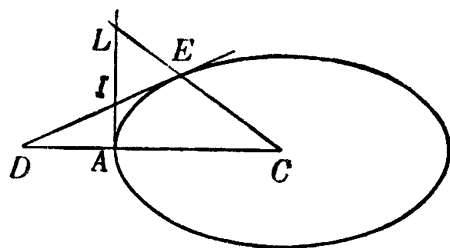


Рис. 163.

параллелограмм будет пропорционален xy , а треугольники пропорциональны x^2 и y^2 . «Симптом» эллипса, следовательно, примет форму

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \text{const},$$

и аналогично во всех других случаях. Сопряженные гиперболы в III, 13—15 необходимы для рассмотрения и тех случаев, когда оси конических сечений не пересекаются.

Аполлоний в первой книге рассматривает только те теоремы о площадях, которые необходимы для его непосредственной цели — взаимной замены точек A и E . В I, 46—48 он доказывает, что новый диаметр делит пополам все хорды, параллельные касатель-

ной в *E*. В I, 49—50 он показывает, что по отношению к новому диаметру теорема о двух касательных столь же справедлива, как и по отношению к старому диаметру *AC*, после чего без труда выводится симптом кривой по отношению к новому диаметру с соответствующим направлением ординат.

Новый *latus rectum* p' определяется по формуле

$$p' = (EI : EL) \cdot 2ED, \quad (30)$$

где *I* представляет точку пересечения касательных *AL* и *ED*, причем точка *D* лежит на диаметре *AC*, а *L* на диаметре *EC*.

Тем самым завершено преобразование координат и доказана равноценность всех диаметров.

Конус вращения, проходящий через данное коническое сечение

Теперь Аполлоний ставит (I, 52—53) такую задачу: «найти» коническое сечение, если даны определенная точка *A* с диаметром и направлением ординат, *latus rectum* p и (для гиперболы или эллипса) *latus transversum* a . Как видно из построения, под словом «найти» он подразумевает: получить кривую с заданным симптомом, как сечение конуса вращения.

Построение сначала производится для случая, когда направление ординат перпендикулярно к заданному диаметру, т. е. когда заданный диаметр является *главной осью*. Общий случай приводится к этому путем предварительного построения главной оси.

Сначала мы рассмотрим именно это последнее построение, потому что оно непосредственно примыкает к только указанному чертежу и формуле (30). Пусть *E* будет заданная определенная точка, *EC*—данный диаметр, $a' = 2EC$ —*latus transversum* и p' —*latus rectum*. Надо найти такую точку *A*, чтобы в ней касательная *AL* была перпендикулярна к диаметру *AC*. Проведем ординату *EF* параллельно *LA*; тогда точка *F* должна лежать на полуокружности с диаметром *EC*. Далее, проведем *FG* параллельно *DE*. Тогда согласно (30)

$$p' : 2ED = EI : EL = GF : GE,$$

и далее

$$2ED : a' = ED : EC = GF : GC;$$

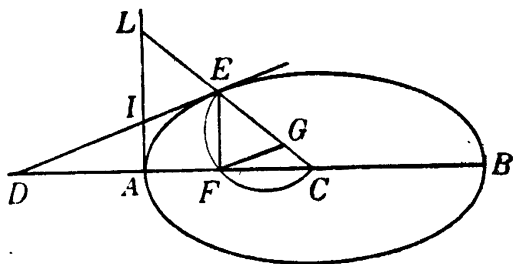


Рис. 164.

поэтому, если из двух отношений $p' : 2ED$ и $2ED : a'$ составить сложное отношение $p' : a'$, то

$$p' : a' = GF^2 : (GE \cdot GC). \quad (31)$$

Этого анализа у Аполлония нет. Аполлоний просто рубит сплеча и говорит: проведем прямую FG параллельно DE между полуокружностью и диаметром EC так, чтобы имела место пропорция (31). Он ни слова не говорит, как это сделать, но это не трудно*). После этого он проводит CFD и определяет на ней точку A так, чтобы $CA^2 = CD \cdot CF$; это на основании I,34 есть характеристическое свойство касательной в E . Теперь AC является искомой главной осью; *latus transversum* $AB = a$ определяется при помощи удвоения AC ; *latus rectum* p определяется так, чтобы точка E удовлетворяла симптому кривой.

Наконец, для того, чтобы по заданной главной оси AB построить конус вращения, пересечение которого с плоскостью чертежа и дает искомое коническое сечение, Аполлоний через AB проводит плоскость, перпендикулярную плоскости чертежа, и через точки A и B в этой плоскости проводит произвольную окружность, на которой должна лежать вершина T конуса. Это выполнимо потому, что угол при вершине конуса может быть выбран произвольно. Теперь ему остается только так определить T на этой окружности, чтобы *latus rectum* и *latus transversum* конического сечения находились в заданном отношении $p : a$. Это — простая планиметрическая задача, в подробности которой мы здесь не будем входить, так как нашей целью было только обрисовать в общих чертах план строения первой книги.

Вторая книга

подробно разбирает теорию сопряженных диаметров и главных осей, а также асимптот сопряженных гипербол. В изложении естественно появляется и «уравнение в асимптотах» гиперболы:

$$xy = \text{const};$$

затем идут предложения об отрезках, отсекаемых на произвольной секущей прямой двумя сопряженными гиперболами и их асимптотами, о построении касательной через заданную точку и т. д.

Более важное значение имеет

*) Нейгебауэр показал, что общий метод, который Аполлоний каждый раз применяет к пропорциям вида (31), и в этом случае приводит к цели.

Третья книга

Теоремы о площадях III, 1—15 мы уже рассмотрели.

В III, 16—23 развивается *теорема о степени точки*, которую иногда называют теоремой Ньютона. Давно уже существует обычай называть теоремы по именам ученых, которые их открыли, но Ньютон вполне определенно говорит, что эту теорему он заимствовал у «древних». Теорема о степени точки гласит: *если через любую точку Z в коническом сечении проведены в заданных направлениях две хорды EK и DT, то отношение*

$$(ZD \cdot ZT) : (ZE \cdot ZK)$$

равно постоянной величине.

Одна из таких прямых или обе могут быть и касательными, совершенно так же как в хорошо известном случае с кругом.

Теорему о степени точки Аполлоний выводит непосредственно из теорем о площадях III, 1—3 и затем рассматривает еще некоторые особые случаи и приложения (III, 24—29).

Предложения 30—40 имеют отношение к тому, что теперь называется *теорией полюсов и поляр*. Для каждой точки D внутри или вне конического сечения Аполлоний определяет некоторую соответствующую ей прямую l , которая так сопряжена с проходящим через D диаметром, что для каждой прямой, проведенной через D и пересекающей коническое сечение в E и F , а линию l в G , имеет место пропорция

$$DE : DF = GE : GF.$$

Если D лежит вне конического сечения, то l будет прямой, соединяющей точки касания обеих касательных, проведенных через D . Особые случаи, когда одна из четырех точек «лежит в бесконечности», как говорят в настоящее время, рассматриваются как отдельные теоремы.

Предложения III, 41—44 суть теоремы о касательных; устанавливаются соотношения между двумя рядами точек, в которых меняющая свое положение касательная пересекает две неподвижные касательные или асимптоты. Эта тема тесно связана с современной проективной геометрией. Этими предложениями можно пользоваться — вероятно, это и делалось — для построения касательных из данной точки. При помощи III, 41—43 эти построения сводятся к задаче: через данную точку провести прямую, которая на двух заданных прямых, начиная от двух данных точек, отсекает отрезки, которые имеют или заданное отношение (III, 41; парабола), или заданное произведение (III, 42—43; эллипс и гипербола). Первую задачу, где дается отношение, сам Аполлоний решил в своем сочинении «О сечении в данном отношении», а вторую — в сочинении «О сечении с заданным произведением».

Теоремы о касательных III, 41—44 применяются в теории фокусов (III, 45—52). Как показал Цейтен (*Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, стр. 213), уже Евклиду было известно предложение о том, что геометрическим местом точек, расстояния которых до данной точки и данной прямой находятся в данном отношении, будет парабола, гипербола или эллипс, в зависимости от того, равно ли это отношение 1, больше 1 или меньше 1. Только совершенно непонятливый человек не заметил бы, что таким путем можно построить любой эллипс, гиперболу или параболу. Следовательно, должны были знать фокусы и директрисы всех трех конических сечений*). Аполлоний, однако, рассматривает только фокальные свойства эллипса и гиперболы. Он доказывает, что прямые, соединяющие некоторую точку P кривой с фокусами F_1 и F_2 , образуют с касательной в P равные углы (III, 48) и что их сумма или разность являются постоянными, а именно равными большей оси (III, 51—52).

Последние предложения, 53—56, дают соотношение между двумя пучками лучей, которыми точка P , движущаяся по коническому сечению, соединяется с двумя неподвижными точками A и B на том же коническом сечении. Лучи AP пересекаются прямой, проходящей через B параллельно касательной в A , а лучи BP — прямой, проходящей через A параллельно касательной в B . Аполлоний доказывает, что произведение отрезков, начиная от A до точек, определенных секущей на лучах AP , и отрезков от B до точек, определенных таким же образом на лучах BP , будет постоянным.

Эта теорема также очень тесно связана с современной проективной геометрией.

Геометрические места к трем или четырем прямым

В предисловии к «Коническим сечениям» Аполлоний говорит, что предложения книги III могут быть использованы для окончательного решения задачи о «геометрических местах» к трем или четырем прямым, для которых у Евклида нет полного решения.

Эта знаменитая задача, о которой упоминает и Папп, гласит: определить геометрическое место точек, расстояния которых x , y , z , и от четырех заданных прямых удовлетворяют уравнению вида

$$xz = \alpha yu, \quad (32)$$

где α — заданное отношение. Если две последние прямые совпадают, то получается «геометрическое место к трем прямым».

*) Для параболы, как заметил Нейгебауэр в своих «Apollonios-Studien», это следует из III, 41 точно так же, как для эллипса и гиперболы — из III, 42.

Папп уже знает, что эти геометрические места суть конические сечения. Декарт гордился тем, что его аналитическая геометрия позволила ему найти эти конические сечения легко и просто. Но из указанного предисловия видно, что Аполлоний при помощи своего метода также мог уже полностью решить эту проблему, и Цейтен показал (Abschnitt 7—8), что предложений III книги действительно вполне для этого достаточно.

Определенное выражением (32) коническое сечение, очевидно, проходит через четыре вершины четырехугольника, образованного четырьмя данными прямыми. Постоянную α можно выбрать так, что это коническое сечение будет, кроме того, проходить еще и через пятую данную точку. Вместе с проблемой о «геометрическом месте к четырем прямым» была одновременно решена и задача о том, как провести через пять данных точек коническое сечение (т. е. круг, эллипс, параболу или две противолежащие гиперболы).

Аполлоний не рассматривает задачу о проведении конического сечения через пять данных точек, вероятно, потому, что подготовка к этому и очень сложный разбор частных случаев завели бы его слишком далеко. Но во всяком случае он доказывает, что эта задача может иметь только одно решение. Действительно, четвертая книга главным образом посвящена доказательству предложения, что два конических сечения не могут иметь более четырех общих точек. У Аполлония эта теорема распадается на три предложения,

IV, 25. Два конических сечения не могут пересекать друг друга более чем в четырех точках.

IV, 36. Коническое сечение или круг не могут иметь более четырех общих точек с парой противолежащих гипербол.

IV, 57. Пара противолежащих гипербол может пересечь другую аналогичную пару самое большее в четырех точках.

В предисловии к четвертой книге он говорит, что Конон Самосский рассматривал первый случай (IV, 25), но что его доказательство неудовлетворительно. «Никотелес Киренский вполне основательно нападал за это на Конона. Никотелес говорил также, что он владеет доказательством второго предложения (IV, 36), но он его еще не опубликовал, а о третьем предложении (IV, 53) еще никто и не думал», — пишет Аполлоний.

Пятая книга

рассматривает, как говорит Аполлоний во введении, задачу о том, как провести из одной точки O к коническому сечению самый длинный и самый короткий прямолинейный отрезок. Однако он дает больше, чем обещает: он определяет все проходящие через O прямые, которые пересекают коническое сечение под прямым углом (в настоящее время мы называем их нормальными), разбирает, при каком положении O задача имеет два, три или четыре

решения, и тщательно исследует максимальные и минимальные свойства этих прямых.

Сначала он берет точку O на главной оси (рис. 165). В таком случае, кроме самой этой оси, или совсем не будет таких пря-

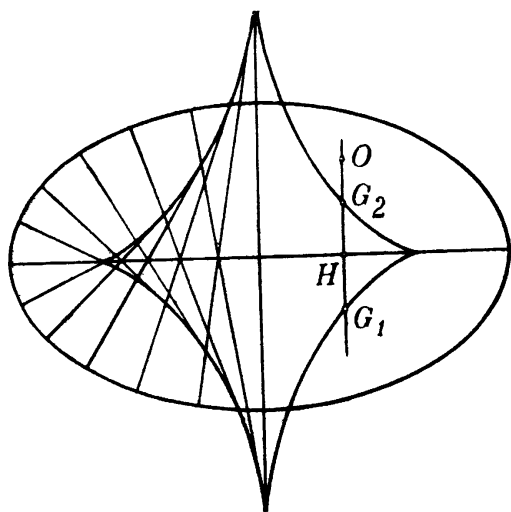


Рис. 165.

мых, или будут две симметрично расположенные максимальные или минимальные прямые, проходящие через O . Он доказывает, что эти максимальные или минимальные линии OM будут всегда перпендикулярными к касательной в M . Затем он перемещает точку O по ординате HO перпендикулярно к большой оси и определяет ординаты граничных точек G_1 и G_2 , где число проходящих через O нормалей разом переходит с 2 на 4 или обратно. Эти граничные точки лежат на кривой, огибающей все эти нормали, ко-

торую мы называем эволютой конического сечения. Аполлоний эту кривую не вводит. Он только определяет граничные точки G_1 и G_2 для каждого положения точки H .

Шестая, седьмая и восьмая книги

Шестая книга большого значения не имеет.

Основные предложения седьмой книги таковы:

VII, 12. Сумма квадратов на двух сопряженных диаметрах эллипса равна сумме квадратов на главных осях.

VII, 13. Разность квадратов на двух сопряженных диаметрах гиперболы равна разности квадратов на главных осях.

VII, 31. Для эллипса, а также для двух сопряженных гипербол параллелограмм на двух сопряженных диаметрах, угол которого равен углу между диаметрами в центре, равен прямоугольнику на осях.

Кроме того, седьмая книга содержит предложения, которые по собственным словам Аполлония полезны для диоризмов (т. е. различения условий возможности для общего числа решений) задач, которые рассматриваются в восьмой книге. Восьмая книга потеряна, но Галлею удалось реконструировать значительное число задач на основании ряда вспомогательных предложений к восьмой книге, которые имеются у Паппа. Эту очень удачную реконструкцию Галлея можно найти в большинстве современных изданий Аполлония.

Другие произведения Аполлония

Кроме «Конических сечений», полностью сохранилось еще только одно произведение Аполлония, именно:

1. *О сечении в данном отношении.*

Это произведение в двух книгах рассматривает следующую задачу: даны две прямые и точка на каждой из них; через некоторую заданную точку надо провести прямую так, чтобы она отсекала на данных прямых, начиная от данных точек, отрезки, которые находились бы в заданном отношении. Сначала Аполлоний дает анализ этой задачи, которая приводит к квадратному уравнению, и затем синтез: решение квадратного уравнения и доказательство, что поставленная задача действительно решена.

Содержание следующих произведений известно нам только по извлечениям в геометрическом «Собрании» Паппа.

2. *О сечении с заданной площадью.*

Здесь рассматривается совершенно аналогичная задача, причем оба отсеченных отрезка должны в произведении дать заданную величину, или, как, разумеется, пишет сам Аполлоний, определять заданный прямоугольник. Эта задача также приводит к квадратному уравнению, равно как и следующая.

3. *Об определенном сечении.*

На прямой даны точки A, B, C, D ; определить на этой прямой точку P так, чтобы прямоугольник $AP \cdot CP$ имел заданное отношение к $BP \cdot DP$.

4. *О касаниях.*

Эти две книги рассматривают знаменитую задачу Аполлония о касательных: даны три объекта, каждый из которых может быть точкой, прямой или кругом. Найти окружность, которая проходит через каждую из заданных точек и касается заданных прямых или окружностей. Относительно реконструкции содержания этой книги см. Th. Heath, *History of Greek Mathematics*, II, стр. 182.

5. *О плоских геометрических местах.*

Некоторое число предложений о геометрических местах, которые, по-видимому, относятся к прямым или окружностям. Наиболее интересное предложение рассматривает некоторый класс плоских преобразований, которые переводят круги и прямые снова в круги и прямые. У Паппа эта теорема гласит так:

Если из одной или из двух заданных точек проведены два прямолинейных отрезка, которые

а) лежат один на продолжении другого, или б) параллельны, или с) образуют заданный угол, и которые либо

1) находятся в заданном отношении друг к другу, либо

2) дают в произведении заданную величину, и если свободный конец одного из этих отрезков описывает окружность или пря-

мую, то свободный конец другого отрезка тоже описывает окружность или прямую.

Отметим, что эта теорема содержит как частный случай «инверсию относительно некоторой точки O ». Если (1) OP и OQ имеют одинаковое направление и (2) произведение $OP \cdot OQ$ имеет постоянную величину, а точка P описывает прямую или окружность, то точка Q будет тоже описывать прямую или окружность. Затем, частными случаями будут все преобразования подобия. Более того, все плоские преобразования, которые переводят окружности и прямые в окружности и прямые, содержатся как частные случаи в общей теореме Аполлония. Может быть, Аполлоний знал это?

6. *Neusis*.

Напомним, что «построение с *neusis*» (от *neusis* — склонность) означало у греков построение такого отрезка заданной длины, который — возможно при продолжении — проходил бы через заданную точку и конечные точки которого лежали бы на двух заданных прямых или окружностях. Аполлоний в этой книге дает некоторое число случаев, когда это построение может быть выполнено при помощи циркуля и линейки *).

Следующая книга упоминается Гипсиклом во введении к так называемой XIV книге Евклида:

7. *Сравнение додекаэдра и икосаэдра*.

Если додекаэдр и икосаэдр вписаны в один и тот же шар, то их поверхности имеют то же отношение, что и объемы их.

Совершенно утрачены:

8. *Общее рассуждение*.

9. *О винтовой линии **).*

10. *О неупорядоченных иррациональностях*.

11. *О быстром разрешении от бремени*.

В этом последнем сочинении Аполлоний, если верить Евтокию, дал для π более точное приближение, чем Архимед. Мы можем только гадать, имеет ли это приближение какое-нибудь отношение к началам тригонометрии и знал ли, или составлял ли Аполлоний таблицы хорд.

*) Не может быть и речи о том, что греки, как думали ранее, допускали только построения циркулем и линейкой. Все дошедшие до нас построения удвоения куба и трисекции угла полностью опровергают это. Впрочем, первые построения действительно считали более элементарными, и Папп где-то говорит, что в тех случаях, когда построение можно выполнить при помощи циркуля и линейки, нет нужды применять более сильные вспомогательные средства. См. об этом A. D Steele, Quellen u. Studien [B] 3 (1936), стр. 287.

**) Или спиральной. (Прим. перев.).

ГЛАВА VIII

УПАДОК ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

ВНЕШНИЕ ПРИЧИНЫ УПАДКА

После Аполлония греческая геометрия сразу кончается. Правда, были еще эпигоны, вроде Диокла и Зенодора, которые время от времени решали некоторые задачи, оставшиеся им от Архимеда и Аполлония словно крохи от пира великих. Писались еще, правда, произведения типа сборников вроде сочинения Паппа Александрийского (300 н. э.); математика еще применялась для практических или астрономических задач, причем разрабатывались плоская и сферическая тригонометрии. Но, кроме тригонометрии, ничего значительного, ничего нового уже не появлялось. Геометрия конических сечений дожила до Декарта в той форме, какую придал ей Аполлоний; произведения Аполлония читались очень мало, а частью были даже утрачены. «Метод» Архимеда также был потерян из вида и проблема интегрирования оставалась без движения, пока за нее не взялись снова в 17-м веке (прежде всего в Англии)*. Хотя семена проективной геометрии уже были посеяны, но довести их до плодов смогли только Дезарг и Паскаль. Высшие плоские кривые исследовались только спорадически; для систематического исследования не хватало алгебраических средств. Геометрическая алгебра и теория пропорций вплоть до нашего времени передавались в качестве застывшей традиции, смысл которой был уже, в сущности, непонятен. Арабы начали свою алгебру заново и с гораздо более примитивной формы. Теория иррациональностей пояснялась комментариями, но тол-

*) Прежде всего в Италии (метод неделимых Кавальери—Галилея), затем во Франции (Паскаль) и Голландии (Гюйгенс) и наконец уже в Англии (Валлис). (*Прим. перев.*)

ком ее уже не понимали. Короче говоря, греческая геометрия зашла в тупик.

Как же это случилось?

Правда, иногда говорят: «Греческая культура состарилась и потеряла свою жизненность!» Это, конечно, верно, но ведь это только общее замечание, а не объяснение.

Разумеется, политические и экономические отношения играют очень важную роль. Мы видели, что наука стала принадлежностью придворных, попала в зависимость от библиотек и царских субсидий. Когда у царей уже больше не было денег на науку, прекратились и субсидии. Войны, тяжелые налоги, а позднее римское владычество, вместе с которым шла эксплуатация, положили конец благосостоянию эллинистических стран. Когда Цезарь в Александрии попал в осаду, большая часть знаменитой библиотеки сгорела. Римские императоры очень мало заботились о чистой науке, а богатые римляне хотя и пускали к себе греческих скульпторов, педагогов и историков, но математиков не приглашали.

Конечно, все это очень важно, но все-таки это еще всего не объясняет. Именно, это только помогает понять, почему наука время от времени останавливалась, но это не может объяснить, почему она пошла назад и пришла в полный упадок. В астрономии, скажем, развитие шло совершенно иначе. Правда, и тут бывали короткие и длинные периоды остановки, но после их окончания работа каждый раз возобновлялась именно с того места, где она остановилась. Гиппарх (150 до н. э.) продолжал работу Аполлония и привлек вавилонские наблюдения. Около 150 н. э. Птолемей непосредственно примкнул к работам Гиппарха и развил теоретическую астрономию до поистине удивительной высоты. В течение 300 лет, между Гиппархом и Птолемеем, тоже не было настоящего перерыва в работе, и сам Птолемей упоминает о других авторах, которые пытались воспроизвести планетные движения при помощи эксцентров и эпициклов. Индийская Сурья-Сиддханта в значительной степени опирается на греческую доптолемеевскую астрономию. Великие арабские астрономы, как аль-Баттани, вносили улучшения в систему Птолемея. Даже Коперник исходил из Птолемеевой системы, как и Кеплер, отец современной астрономии. Каждый из этих великих астрономов стоял на плечах своих предшественников, и существенные достижения их оставались достоянием науки.

А в математике дело шло совершенно по-другому. Правда, еще прилежно изучали Евклида, но только не Архимеда и не Аполлония. Многие труды великих математиков были потеряны, другие считались необычайно трудными и большей частью не читались. Аль-Хваризми, отец арабской алгебры, намеренно отвернулся от «греческой учености»: он хотел написать книгу, понятную про-

стым людям, которым приходилось иметь дело с задачами о делении наследства и которые нуждались в коротеньких и легких правилах для составления и решения алгебраических уравнений. На его работе, а не на греческой учености, основывалась арабская алгебра, а вслед за ней и алгебра Возрождения.

Итак, мы видим, что астрономия продолжает развиваться, хотя иногда и с перерывами, но в математике долгое время длится упадок, а затем снова начинается развитие, но уже на совершенно другой основе. Почему же это произошло?

Ясно, что общие политические и экономические факторы не могут вполне удовлетворительно объяснить этот упадок математики; ведь эти причины должны были бы совершенно так же действовать и на астрономию. Могут возразить, что астрономия использовалась как вспомогательная наука для астрологии, но точно так же математика была нужна как вспомогательная наука для астрономии. Следовательно, какие-то внутренние причины должны были привести к упадку античной математики.

Эти внутренние причины очень хорошо вскрыл Цейтен в своем «*Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*».

ВНУТРЕННИЕ ПРИЧИНЫ УПАДКА

1. Трудность геометрической алгебры

Мы уже не раз говорили, какое важное значение имел алгебраический элемент в геометрии греков. Теэтет и Аполлоний были по существу алгебраистами: мыслили они алгебраически, но свои рассуждения облекали в геометрическую одежду.

Греческая алгебра была геометрической алгеброй: она оперировала отрезками прямой и прямоугольниками, но не числами. И пока крепко держались требований строгой логики, это было неизбежно. Ведь «числами» были только целые или самое большее дробные, но во всяком случае рациональные числа, а отношение двух несоизмеримых отрезков нельзя изобразить рациональными числами; следовательно, по понятиям древних греков, его вообще нельзя было представить числом. К чести греческой математики нужно сказать, что она была неуклонно последовательна в своей логике.

Однако это же самое обстоятельство определило границы эллинской алгебры. Уравнения первой и второй степени можно было хорошо передать на языке геометрической алгебры; в крайнем случае это было возможно для уравнения третьей степени. Но пойти дальше можно было только, пользуясь громоздкими и утомительными вспомогательными средствами пропорций.

Гиппократ, например, приводил кубическое уравнение $x^3 = V$ к пропорции

$$a : x = x : y = y : b,$$

а Архимед писал уравнение третьей степени

$$x^2(a - x) = bc^2$$

в виде пропорции

$$(a - x) : b = c^2 : x^2.$$

Этим путем еще можно было добраться до уравнения четвертой степени; примеры этого, пожалуй, можно найти и у Аполлония (например, в V книге). Однако дальше пойти нельзя; больше того, чтобы получать результаты этим в высшей степени сложным методом, нужно было еще обладать математическим гением и быть весьма искушенным по части преобразования пропорций при помощи геометрических фигур. Нашими алгебраическими обозначениями может пользоваться каждый инженер или естествоиспытатель, а греческой теорией пропорций и геометрической алгеброй — только очень одаренный математик.

К этому присоединяется еще другое обстоятельство, а именно,

2. Трудность письменной передачи

Чтение доказательств у Аполлония требует долгого и напряженного размышления. Вместо удобной алгебраической формулы стоит длинная фраза, где каждый отрезок обозначается двумя буквами, которые всякий раз нужно еще отыскивать на чертеже. Чтобы понять ход мыслей, приходится заменять эти фразы современными сжатыми формулами. Этого вспомогательного средства древние не имели: взамен этого у них было другое — устная передача.

При устном объяснении отрезки можно указывать пальцем, можно делать ударение на особенно важных местах и, кроме того, можно рассказать, каким образом получилось доказательство. Все это отпадает в письменной формулировке строго классического стиля: доказательства закончены, логически обоснованы, но они ничего не подсказывают. Не можешь ничего возразить, чувствуешь, что попался в логическую мышеловку, но не видишь, какая основная линия рассуждений за этим скрывается.

Таким образом, пока еще традиция не прерывалась, пока каждое поколение могло передавать свою методику следующему, все шло хорошо и наука процветала. Но как только по ряду причин внешнего характера устная передача прерывалась и оставались только одни книги, понимать труды великих предшественников становилось крайне трудно, а выйти за их пределы и двинуться вперед — почти невозможно.

Очень хорошее представление об этом дают

КОММЕНТАРИИ ПАППА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО

В распоряжении Паппа (320 н. э.) была великолепная Александрийская библиотека, к его услугам были все труды величайших математиков и астрономов. Он был талантлив, трудолюбив и даже энтузиаст, но ему приходилось большей частью изучать письменные произведения, и там он встречался с теми же самыми трудностями, с которыми встречаемся и мы. В борьбе с этими трудностями и для того, чтобы облегчить труд тем, кто будет читать после него, он писал обширные комментарии, как, например, его комментарий к Птолемею «Альмагесту» и к десятой книге Евклида. И его огромный сборник, из которого мы многое уже заимствовали, точно так же состоит из обширных комментариев к классикам. Если Папп находил какое-нибудь доказательство трудным или неполным, то он писал к нему пояснительную «лемму». Нередко Птолемей, или кто-нибудь иной, рассматривал только один из возможных случаев; тогда Папп приводил аналогичные доказательства и для других случаев. Иногда бывало, например, что Аполлоний пользовался неким соотношением между отрезками, скажем, пропорциональностью или каким-нибудь соотношением между произведениями, не приводя доведенного до конца доказательства. Большой частью эти соотношения можно было бы вывести из чертежа, имея навык в преобразовании произведений или отношений. В таких случаях Папп обычно, не торопясь, шаг за шагом выводит эти соотношения из предложений, которые имеются у Евклида. Отсюда ясно, какого труда уже во времена Паппа стоило понимать вещи, которые при устной передаче были непосредственно ясны и просты.

Для дальнейшего развития математики были действительно необходимы четкие алгебраические обозначения, но их нельзя было получить, развивая далее строгие греческие методы. Нужно было вернуться к наивной вавилонской точке зрения, не размышляя, перемножать и делить друг на друга всевозможные величины, обращаться с выражениями вроде $2 + \sqrt{5}$ как с обыкновенными числами, не очень огорчаясь по поводу их иррациональности. Чтобы пойти вперед, надо было сначала сделать шаг назад. Именно это и сделали арабы.

Алгебра итальянского Возрождения основывалась не на греческой геометрической алгебре, а на арабской алгебре. У арабов и итальянцев были довольно несовершенные обозначения, но французы Виет и Декарт упростили их *), и отсюда начала развиваться наша алгебра.

Теперь мы переходим к

*) В подробном описании надо было бы упомянуть еще итальянца Бомбелли и нашего соотечественника голландца Симона Стевина.

ЭПИГОНАМ ВЕЛИКИХ МАТЕМАТИКОВ

1. Диокл

Диокл жил, вероятно, во 2-м веке до н. э. Он написал книгу о зажигательных стеклах. При помощи конических сечений он решил «задачу Архимеда» о делении шара на два сегмента, находящихся в данном отношении, а кроме того, и делийскую задачу — при помощи новой кривой «циссоиды». Оба построения нам сообщил Евтокий в своем комментарии к Архимеду. Здесь мы будем говорить только о второй задаче.

Циссоида

определяется следующим образом (рис. 166).

Пусть АВ и ГΔ будут два взаимно перпендикулярных диаметра круга. Пусть точки Е и Z удаляются от В в обе стороны по окружности и притом на всегда одинаковые расстояния. Из Z опустим на ГΔ перпендикуляр ЗН, и пусть ΔЕ будет пересекать этот перпендикуляр в Θ. Тогда точка Θ опишет циссоиду.

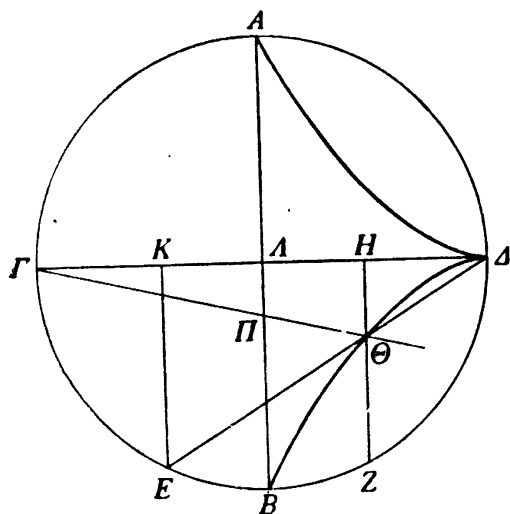


Рис. 166.

Симптом» циссоиды, т. е. ее уравнение в прямоугольных координатах ГН и НΘ, легко найти, если провести ЕК перпендикулярно ГΔ и написать пропорцию

$$\Delta H : H\Theta = \Delta K : KE,$$

которую можно переписать и так:

$$H\Delta : H\Theta = ГН : HZ.$$

Далее, HZ является средней пропорциональной между ГН и HΔ; таким образом, мы получаем:

$$ГН : HZ = HZ : H\Delta = H\Delta : H\Theta.$$

Это значит, что HZ и HΔ суть две средние пропорциональные между ГН и HΘ. Если мы еще потребуем, чтобы крайние члены ГН и HΘ имели заданное отношение ($a : b$), то делийская задача будет решена. Для этого находим точку пересечения циссоиды с прямой ГΠ, которая на двух взаимно перпендикулярных радиу-

сах $\Delta\Gamma$ и ΔB отсекает отрезки $\Delta\Gamma$ и $\Delta\Pi$, имеющие как раз данное отношение ($a : b$). После этого для получения двух средних пропорциональных между двумя заданными отрезками (a и b) остается только пропорционально увеличить четыре члена пропорции (1).

2. Зенодор,

автор очень интересной книги об изопериметрических фигурах, жил между Архимедом (250 до н. э.), о котором он упоминает, и Квинтилианом (75 н. э.), который упоминает его. Имея в виду превосходное качество и стиль его труда, он, надо полагать, был ближе к Архимеду, чем к Квинтилиану.

Изопериметрические фигуры

путь фигуры с равными периметрами. Вопросы, которые Зенодор исследует и частично решает, таковы: какая плоская фигура при данном периметре имеет наибольшую площадь и какое тело при данной поверхности имеет наибольший объем?

Ответ на поставленные вопросы угадать легко, но чрезвычайно трудно доказать правильность решения. Только в 1884 году Германн Аманд Шварц совершенно строго доказал методами Вейерштрасса изопериметрические свойства круга и шара. Но для своего времени Зенодор тоже достиг многого. В своем сочинении, которое мы знаем по извлечениям у Паппа и Теона, он доказывает 14 предложений, из которых важнейшие таковы:

1. Из двух правильных многоугольников с равными периметрами большим будет тот, у которого большее число углов.

3. Если круг и правильный многоугольник имеют одинаковый периметр, то круг будет больше.

7. Из треугольников с одинаковым основанием и равным периметром наибольшим будет равнобедренный.

10. Сумма двух подобных равнобедренных треугольников будет больше, чем сумма двух неподобных треугольников с тем же основанием и с одинаковой суммой периметров.

11. Из всех многоугольников равного периметра и с равным числом сторон наибольшим будет правильный многоугольник.

В доказательстве предложения 11 принимается, как само собой разумеющееся, что существует наибольший многоугольник с данным периметром. Этот наибольший многоугольник, как легко доказывается при помощи 7 и 10, будет равносторонним и равноугольным.

Далее, на основании 3 и 11 Зенодор заключает, что из всех фигур одинакового периметра круг будет наибольшим. Это

заклучение будет справедливо лишь в том случае, если называть «фигурами» только круги и многоугольники.

После этого Зенодор объявляет, что из всех пространственных тел с одинаковой поверхностью шар будет наибольшим. Но доказывает он только следующие предложения:

13. Если правильный многоугольник (с четным числом сторон) вращать около самой длинной его диагонали, то получится тело, ограниченное коническими поверхностями, которое будет меньше шара с такой же поверхностью.

14. Каждый из пяти платоновых многогранников будет меньше шара с той же поверхностью.

3. Гипсикл

жил, вероятно, в Александрии около 180 до н. э., немного позднее Аполлония. Он писал о многоугольных числах и гармонии сфер; таким образом, он придерживался пифагорейской традиции. Из его работ сохранились две: первая — это так называемая

Четырнадцатая книга «Начал»,

которая входит под этим названием в большую часть изданий Евклида. В этом небольшом сочинении Гипсикл сравнивает поверхности и объемы додекаэдра и икосаэдра, вписанных в один и тот же шар. Круги, описанные вокруг граней этих двух тел, будут равны друг другу по одной теореме Аристия. Отсюда легко получается:

$$\begin{aligned} \text{объем додекаэдра : объем икосаэдра} &= \\ &= \text{поверхность додекаэдра : поверхность икосаэдра.} \end{aligned}$$

Кроме этого, Гипсикл доказывает, что указанное отношение будет также равно отношению

$$\text{ребро куба : ребро икосаэдра,}$$

и дает планиметрическое построение для этого отношения.

Далее, Гипсиклу принадлежит сочинение под названием

Анафорик,

где определяются промежутки времени, в продолжение которых восходят и заходят определенные знаки зодиака, и градусы эклиптики. Вычисления его основаны не на точном геометрическом расчете, а на грубом приближении. Он попросту принимает, что времена восхода знаков зодиака от Овна до Девы составляют возрастающую, а от Весов до Рыб — убывающую арифметическую прогрессию. Если, кроме того, известна продолжительность наибольшего дня, то при помощи некоторых простых предложений относительно арифметических рядов можно все вычислить.

[Пусть времена восходов знаков от Овна до Девы будут:

$$A \ B \ C \ D \ E \ F,$$

тогда для знаков от Весов до Рыб мы будем иметь обратный порядок:

$$F \ E \ D \ C \ B \ A.$$

Подобно вавилонянам Гипсикл делит день на 360 «градусов времени». Поэтому сумма каждой из приведенных арифметических прогрессий будет равна 180 градусам:

$$A + B + C + D + E + F = 180.$$

В течение светлой части каждого суток над горизонтом восходят как раз шесть знаков зодиака, потому что в начале дня восходит Солнце, а в конце дня — точка прямо ему противоположная. В течение самого длинного дня будут поэтому восходить три первых и три последних знака зодиака. Следовательно, половина самого длинного дня будет равна $A + B + C$.

Затем Гипсикл принимает, что для Александрии самый длинный день продолжается 210 градусов времени. Следовательно,

$$A + B + C = 105,$$

а так как эта сумма равна утроенному среднему члену, то

$$B = 35.$$

Таким же точно путем получается, что $D + E + F = 75$ и $E = 25$.

Остальные времена восхода могут теперь быть вычислены без затруднений. Для нахождения начальных моментов восхода отдельных градусов эклиптики Гипсикл пользуется тем же самым методом]*).

Такой примитивный способ расчета, собственно говоря, недостойн греческого математика, хотя он дает вполне достаточную точность для практических приложений, например в астрологии. [Подобные арифметические ряды для других географических широт можно найти у римских астрологов Веттия Валента и Фирмика Матерна. Нейгебауэр показал, что подобные методы расчета непосредственно связаны с вавилонскими расчетами движения Луны.] Действительно, такие же вычисления с возрастающими и убывающими арифметическими прогрессиями можно найти в вавилонских текстах того времени (см., например, K u g l e r, *Babylonische Mondrechnung*). Вавилонское влияние ясно также из употребления градусов и минут в этой работе Гипсикла**).

*) Отрывки, заключенные нами в квадратные скобки здесь и ниже, добавлены в английском и немецком переводах для замены непосредственно предшествующего предложения. (Прим. перев.)

**) См. B. L. van der Waerden. *Babylonian Astronomy*, III. I. Near astern Stud. 10 (1951), стр. 32. Там же указана и дальнейшая литература.

Точное тригонометрическое вычисление времени восхода и захода знаков зодиака было, очевидно, Гипсиклу еще не по силам. Однако Гиппарх, который жил лишь немного позже, уже мог производить подобные вычисления. Чтобы разобраться в этом, нам придется бросить взгляд на

ИСТОРИЮ ТРИГОНОМЕТРИИ

Вместо синуса, косинуса и тангенса греческие астрономы Гиппарх (150 до н. э.) и Птолемей (150 н. э.) всегда пользовались хордами дуг окружности. Правда, большой разницы не будет, работать ли с хордами или с синусами, так как синусом некоторого угла мы ныне называем полухорду удвоенной соответствующей дуги, деленную на радиус *),

$$\sin \alpha = \frac{1}{2R} \text{chd}(2\alpha).$$

Индийские астрономы перешли от хорд к синусам уже в начале 5-го века н. э. Таблицы синусов имеются в их большом классическом руководстве «Сурия-Сиддханта», а также в «Āryabhatīya» Арьябхаты. Затем арабы ввели тангенс и котангенс, что значительно упростило вычисления.

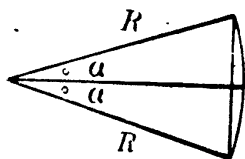


Рис. 167.

Итак, греки работали с таблицами хорд. Мы уже рассказывали, как они вычислялись.

Нам неизвестно, был ли сам Гиппарх изобретателем тригонометрии и пользовался ли он только плоскими, или только сферическими треугольниками, или же теми и другими, так как его произведения большей частью утеряны. Поэтому древнейшую историю плоской и сферической тригонометрии нам приходится черпать главным образом из работ Менелая и Птолемея.

Плоская тригонометрия

Птолемей не знает формул для косоугольных треугольников вроде наших теорем синусов или косинусов. Когда ему приходится иметь дело с косоугольными треугольниками, то он всегда делит их на прямоугольные треугольники.

Вот интересный пример.

*) Делить на радиус мы начали приблизительно с 1800 года. До этого времени синусом называлась полухорда удвоенной дуги произвольно выбранного радиуса R .

В главѣ 6 четвертой книги «Альмагеста» Птолемей для определения эпицикла Луны должен решить следующую задачу:

На окружности лежат три точки А, В, Г. Дуги $BA=53^{\circ}35'$ и $BA\Gamma=150^{\circ}26'$ известны из наблюдений. Из находящейся вне круга точки Δ эти дуги видны под углами $B\Delta A=3^{\circ}24'$ и $B\Delta \Gamma=0^{\circ}37'$. Как далеко отстоит точка Δ от центра, если радиус круга взять равным 60?

| Птолемей рассуждает следующим образом. Пусть ΔB пересекает окружность второй раз в точке Е. Проведем EA и $E\Gamma$ и опустим из Е перпендикуляры EZ и EH на ΔA и $\Delta \Gamma$; соответственно

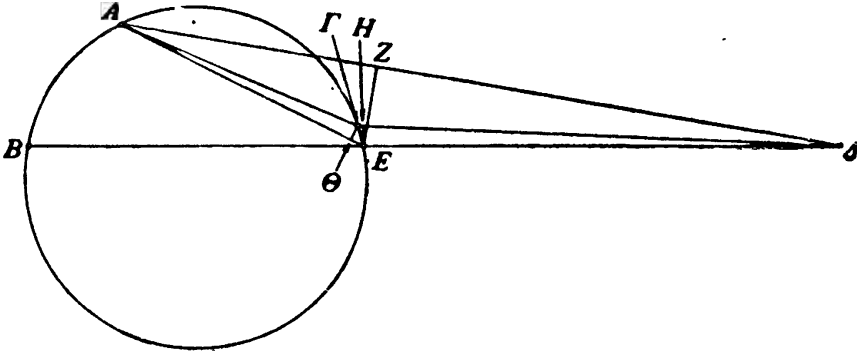


Рис. 168.

из Г опустим на EA перпендикуляр $\Gamma\Theta$. В полукруге на диаметре $E\Delta$ вписанный угол $E\Delta Z=3^{\circ}24'$, следовательно, дуга $EZ=6^{\circ}48'$, а хорда EZ будет по таблице хорд равна $7^p7'$, если диаметр $E\Delta$ положить равным 120^p .

Совершенно так же $\angle EAZ = \angle BEA - \angle B\Delta A$ будет известным; будет известной также и дуга EZ в полукруге на диаметре AE , а значит, по таблице хорд и хорда EZ , если диаметр AE положить равным 120^p . Если мы, пропорционально изменяя числовые значения, сделаем прямую EZ равной $7^p7'$, то окажется, что $AE=17^p55'32''$ тех же самых единиц, каких в диаметре ΔE содержится 120^p .

Таким же образом Птолемей находит $EH=1^p17'3''$ и $\Gamma E=1^p2'23''$, если $\Delta E=120^p$.

Как мы видим, в данном случае косоугольный треугольник вроде ΔAE или ΓAE , в котором углы известны, разделяется на два прямоугольных, после чего определяются отношения высоты к двум прилежащим сторонам, и отсюда получается отношение сторон друг к другу. Получается тот же результат, что и по нашему правилу синусов.

В треугольнике ΔGE угол при E известен, как вписанный угол, опирающийся на данную дугу. Высота $\Gamma\Theta$ делит этот треугольник на два прямоугольных треугольника. В прямоугольном треугольнике $E\Theta\Gamma$ известны оба угла; таким образом, отношение $E\Theta$

и $\Gamma\Theta$ к $ЕГ$ можно вычислить по таблице хорд. Если положим $\Gamma E = 1^p 20' 23''$, то получим $\Gamma\Theta = 1^p 0' 8''$ и $E\Theta = 0^p 53' 21''$.

В тех же самых единицах, в которых $\Gamma E = 1^p 20' 23''$, $AE = 17^p 55' 32''$; следовательно, $A\Theta = AE - E\Theta = 17^p 2' 11''$. По теореме Пифагора получаем $AG^2 = A\Theta^2 + \Gamma\Theta^2 = 291^p 14' 36''$ и, следовательно

$$AG = 17^p 3' 57'', \text{ если } \Delta E = 120^p.$$

Но в тех единицах, которых в диаметре круга 120^p , AG как хорда, соответствующая дуге $96^\circ 51'$, будет по таблице хорд равна $89^p 46' 14''$. Если мы найденные ранее длины AG , ΓE и ΔE пропорционально увеличим так, чтобы $AG = 89^p 46' 14''$, то будет

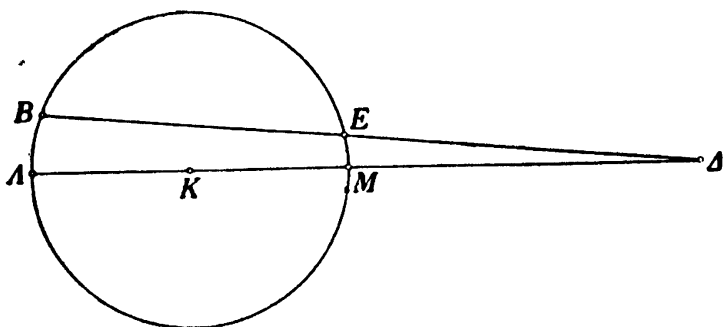


Рис. 169.

$\Delta E = 631^p 13' 48''$ и $\Gamma\Delta = 7^p 2' 50''$ в тех же единицах, каких в диаметре круга 120^p . При обратном чтении таблицы хорд найдем, что дуга $\Gamma E = 6^\circ 44' 1''$. Если мы прибавим к этому дугу $B\Gamma A = 150^\circ 26'$, то получим, что дуга $B\Gamma E = 157^\circ 10' 1''$. Соответствующая ей хорда BE будет по таблице хорд равна $117^p 37' 32''$.

После этого остается только решить такую задачу (рис. 169): в круге с диаметром 120^p на продолжении хорды $BE = 117^p 37' 32''$ отложен отрезок $\Delta E = 631^p 13' 48''$. Каково расстояние Δ от центра K ?

Это легко определить даже и без тригонометрии. Проведем через Δ диаметр AKM , тогда

$$\Delta A \cdot \Delta M = \Delta B \cdot \Delta E = (\Delta E + EB) \cdot \Delta E = 748^p 51' 20'' \times 631^p 13' 48''.$$

Но согласно геометрической алгебре

$$\Delta K^2 = \Delta A \cdot \Delta M + KM^2,$$

таким образом будет известна ΔK^2 , а тем самым и ΔK :

$$\Delta K = 690^p 8' 42''.$$

Таким образом, поставленная задача решена.

Слова Птолемея наводят на мысль, что этот метод заимствован у Гиппарха. Действительно, в предыдущей главе он говорит:

«Мы будем следовать теоретическому методу, который, как мы видели, употреблял Гиппарх. Именно, мы тоже будем на основании трех выбранных лунных затмений...»

Теперь переходим к

Сферической тригонометрии

и прежде всего рассмотрим труды

МЕНЕЛАЯ

В 98 н. э. Менелай производил в Риме астрономические наблюдения. Кроме утерянной работы о хордах, где, вероятно, были таблицы хорд, он написал «Сферику», которая сохранилась. В двух первых книгах доказываются различные теоремы о сферических треугольниках (между прочим, теоремы о равенстве). Третья книга начинается со знаменитой

Теоремы о трансверсалиях,

которая постоянно применяется и у Птолемея и гласит следующее (рис. 170):

Пусть точка Δ лежит на AB , а E на AG , и пусть $\Gamma\Delta$ и BE пересекаются в Z . Тогда ΓE будет иметь к AE отношение, которое составлено из отношений $\Gamma Z : \Delta Z$ и $\Delta B : AB$. А отношение $\Gamma A : AE$ составлено из отношения $\Gamma \Delta : \Delta Z$ и $ZB : BE$. В современном обозначении

$$\frac{\Gamma E}{AE} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta B}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta Z} \cdot \frac{ZB}{BE}.$$

Чтобы доказать, например, второе соотношение, проведем через E параллельную $\Gamma\Delta$ прямую EH , пересекающую AB в точке H . Тогда будет:

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma A}{EH} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta Z}{EH} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta Z} \cdot \frac{ZB}{BE}.$$

При помощи проектирования из центра (рис. 171) Менелай переводит эти отношения на сферу и, если $A\Delta B$, AEG , $\Gamma Z \Delta$ и BZE

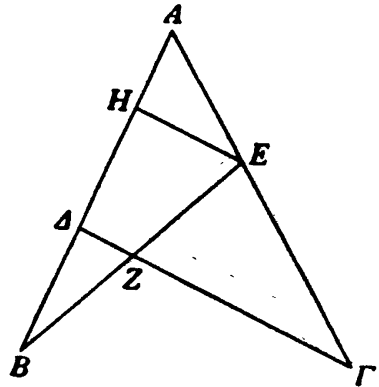


Рис. 170.

будут большими кругами сферы, получает отношения

$$\frac{\text{chd}(2\Gamma E)}{\text{chd}(2\Delta E)} = \frac{\text{chd}(2\Gamma Z)}{\text{chd}(2\Delta Z)} \cdot \frac{\text{chd}(2\Delta B)}{\text{chd}(2AB)}$$

и

$$\frac{\text{chd}(2\Gamma A)}{\text{chd}(2\Delta E)} = \frac{\text{chd}(2\Gamma \Delta)}{\text{chd}(2\Delta Z)} \cdot \frac{\text{chd}(2ZB)}{\text{chd}(2BE)}.$$

Из теоремы о трансверсальных Менелай выводит еще другие предложения, игравшие некоторую роль в сферической тригонометрии*).

Мы не будем входить в дальнейшие подробности относительно этого, но разберем приложения теоремы о трансверсальных в «Альмагесте».

В главе 14 первой книги Птолемею надо по заданной долготе λ вычислить склонение δ Солнца. Наклон ε эклиптики, т. е. угол при E между эклиптической и экватором, разумеется, тоже известен

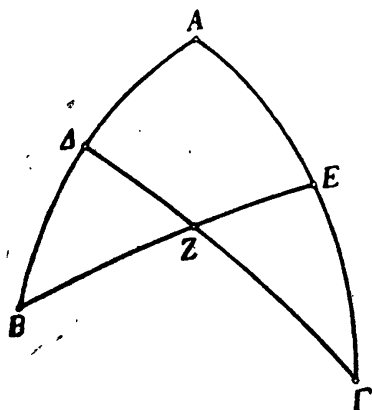


Рис. 171

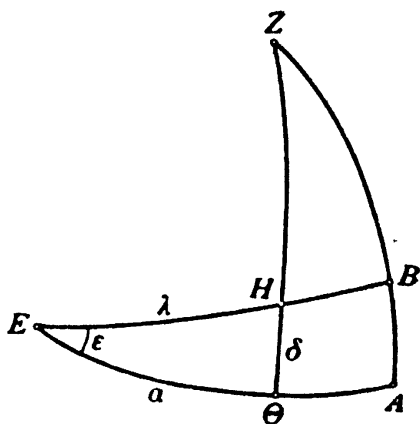


Рис. 172.

(рис. 172). Пусть Солнце находится в H , тогда $EH = \lambda$ — данной долготе. Если Z будет полюс экватора и большой круг ZH пересекает экватор в Θ , то $H\Theta = \delta$ будет искомое склонение. Птолемей проводит круг ZBA , проходящий через полюсы экватора и эклиптики и, следовательно, пересекающий оба эти круга под прямым углом. Тогда по теореме о трансверсальных получим:

$$\frac{\text{chd}(2ZA)}{\text{chd}(2AB)} = \frac{\text{chd}(2Z\Theta)}{\text{chd}(2\Theta H)} \cdot \frac{\text{chd}(2HE)}{\text{chd}(2EB)}$$

или

$$\frac{\text{chd}(180^\circ)}{\text{chd}(2\varepsilon)} = \frac{\text{chd}(180^\circ)}{\text{chd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{chd}(2\lambda)}{\text{chd}(180^\circ)}$$

*) См. А. von Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie*, Leipzig, 1900, стр. 17.

или вследствие того, что хорда дуги в 180° в птолемеевых единицах равняется 120,

$$\text{chd}(2\delta) = \frac{\text{chd}(2\lambda) \text{chd}(2\varepsilon)}{120}.$$

Это совпадает с нашей современной формулой

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \varepsilon.$$

[Таким же образом в главе 16 Птолемей вычисляет прямое восхождение α из соотношения

$$\frac{\text{chd}(2\text{ZB})}{\text{chd}(2\text{BA})} = \frac{\text{chd}(2\text{ZH})}{\text{chd}(2\text{H}\Theta)} \cdot \frac{\text{chd}(2\Theta\text{E})}{\text{chd}(2\text{EA})}$$

или

$$\frac{\text{chd}(180^\circ - 2\varepsilon)}{\text{chd}(2\varepsilon)} = \frac{\text{chd}(180^\circ - 2\delta)}{\text{chd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{chd}(2\alpha)}{\text{chd}(180^\circ)},$$

которое совпадает с нашей формулой

$$\text{ctg } \varepsilon = \text{ctg } \delta \cdot \sin \alpha.$$

В других случаях теорема о трансверсалиях дает не прямо хорду удвоенной дуги, а отношение хорд двух дуг, для которых, кроме того, дана их сумма (или разность). Как можно тогда найти сами дуги, Птолемей излагает в главе 13 непосредственно после менелеевой теоремы о трансверсалиях.] *)

Такими методами Птолемей может вычислять все прямоугольные сферические треугольники, для которых даны две стороны, или сторона и угол. А этого, по-видимому, достаточно для сферической астрономии.

Время Менелая и Птолемея было эпохой нового расцвета математики. Астрология была страшно популярна, астрологам нужны были астрономические вычисления и без математики нельзя было обойтись.

Но в течение двух веков до Менелая, во время распространения могущества римской державы, математика опустилась до самого жалкого уровня.

В блестящую эпоху римской литературы, во времена Вергилия, Горация и Овидия нигде нельзя встретить даже и просто упоминания о математике. Цицерон был хорошо начитан в философии, знал кое-что об астрономии, но математика не вызывает у него никакого интереса. Даже архитектор Витрувий, который так охотно выставляет напоказ свою ученость в различных областях, и тот почти ничего не говорит о математике.

Интерес к математике снова немного проявляется у

*) Часть текста, заключенная нами в квадратные скобки, опущена в английском и немецком переводах. (Прим. перев.)

ГЕРОНА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО

около 60 н. э.

Откуда взялась эта дата? В Героновой книге «Диоптра» изложен достаточно запутанный способ определения разницы во времени между Римом и Александрией при помощи наблюдения солнечного затмения, и Нейгебауэр заметил, что приведенное для примера затмение было, вероятно, затмением 62 года*). Имеются основания полагать, что Герон сам наблюдал это затмение в Александрии.

Труды Герона представляют собой что-то вроде энциклопедии по прикладной геометрии и механике. Он рассказывает об изготовлении и употреблении разных измерительных инструментов, вроде водяных часов и диоптров, и таких машин, как пневматические машины, автоматы, военные устройства, подъемные машины и т. д. Кроме того, он написал комментарий к Евклиду и работу об определениях. Наконец, существует еще

«Geometrika»

«Геометрика» никак не может быть названа научным трудом: это просто собрание формул с задачами на их применение, весьма элементарная книжка, но написанная очень ясно и удобопонятно. Можно вообразить себя перенесшимся в аудиторию Герона в Александрийском высшем техническом училище. Представьте себе: сначала десять примеров на вычисление площади квадрата, затем четыре примера на площадь прямоугольника, затем четырнадцать задач на прямоугольные треугольники (определение гипотенузы и площади) и т. д. Одни только числовые примеры, без каких бы то ни было доказательств; точь-в-точь как какой-нибудь клинописный текст или древнеиндийская арифметическая книжка**).

В качестве примера здесь можно привести объяснение «формулы Герона» для площади треугольника:

«Ты можешь измерить треугольник и так. Пусть, например, одна сторона треугольника имеет в длину 13 мерных шнуров, вторая 14 и третья 15. Чтобы найти площадь, поступай вот как. Сложи 13, 14 и 15; получится 42. Половина этого будет 21. Вычти из этого три стороны одну за другой; сперва вычти 13—останется 8, затем 14—останется 7 и, наконец, 15—останется 6. А теперь

*) O. Neugebauer, Kgl. Danske Vid. Selsk., Hist.-fil. Meddel. 26, № 2, (1938).

**) Весь абзац о Героне мы даем в том виде, в каком он стоит в самом последнем по времени немецком переводе. В голландском подлиннике вместо «Геометрика» стояло просто «Метрика», но в дальнейшем автор заметил, что рассматриваемый им текст взят не из «Метрики» Герона, а из «Геометрики», которая, таким образом, оказалась «самым популярным» из математических произведений Герона, что нельзя признать правильным. (Прим. перев.)

перемножь их: 21 раз по 8 получится 168, возьми это 7 раз — получится 1176, а это еще 6 раз — получится 7056. Отсюда квадратный корень будет 84. Вот сколько мерных шнуров будет в площади треугольника».

Сборник «Geometrika» составлен, вероятно, не самим Героном, но возник в его школе в Александрии. Сам Герон пишет очень кратко и точно. В сохранившейся «Метрике» он дает совершенно правильное доказательство примененной в вышеприведенном примере формулы

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Как уже было упомянуто, мы знаем из арабского источника, что эта «геронова формула» восходит к Архимеду. Кантор еще полагал, что эту формулу можно приписать самому Герону, хотя у Герона она дана без указания на источник. Но это то же самое, как если бы мы приписали самому Хютте все те формулы из его «Карманной книжки инженера», которые даны без упоминания об источнике!

Несколько героновых рецептов имеется (также без указания источников) у римских «агрименсоров» — землемеров*). Нет сомнений, что подобного рода книжечки с рецептами существовали во все времена; так оно было даже в эпоху величия греческой математики; ведь всегда существовали землемеры и архитекторы, которым такие книжки были нужны.

Некоторые формулы Герона, главным образом для вычисления объемов, заимствованы у Архимеда. Вообще же, вряд ли возможно исследовать историю примеров и правил вычисления. Такие вещи обычно передаются без изменений из века в век. Иногда можно встретить что-нибудь новое, найденное настоящим математиком; в единичных случаях называется имя нашедшего, но большей частью вся передача является анонимной. Числовые примеры Герона встречаются еще в клинописных текстах. В римское время и в средние века примеры Герона цитировались без конца с небольшими изменениями. Древнейшее китайское собрание геометрических задач на приложения пропорций**) 3-го века н. э. напоминает древневавилонский текст, но практически невозможно доказать зависимость, или определить пути, по которым могла идти передача ***).

*) F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff, *Schriften der Römischen Feldmesser* (Berlin, 1848 u. 1852); M. Cantor, *Agrimensoren*.

**) P. L. van Hee, *Le classique de l'île maritime, Ouvrage chinois du III siècle*, Quellen u. Studien [B] 2 (1933), стр. 255.

***). На русском языке см. статью А. П. Юшкевича, «О достижениях китайских ученых в области математики», Историко-математические исследования, вып. VIII (1955), стр. 539—572. Упомянутое в тексте произведение рассматривается на стр. 565. (Прим. перев.)

Да в конце концов все это не так уж важно. Интересны только великие идеи человечества, а не их разведение водой в учебниках и собраниях задач. Будем радоваться, что мы обладаем гениальными творениями Архимеда и Аполлония, и не будем печалиться об утрате бесчисленных расчетных книжечек типа Героновских.

Одним из самых своеобразных математиков позднеантичной (т. е. римской) эпохи был

ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Трудно выяснить, когда жил Диофант. Бомбелли считает, что он жил при Антонине Пие (150 н. э.), а Абульфарадж относит его ко времени Юлиана Отступника (350 н. э.) Но, согласно Пселлу, ученый Анатолий Александрийский, который в 270 году был епископом Лаодикийским, посвятил Диофанту одно сочинение. В силу этого полагают, что Диофант, всего вероятнее, жил около 250 н. э.

В алгебраической стихотворной загадке, имеющейся в «Anthologia Palatina», жизнь Диофанта описывается следующим образом:

«Прах Диофанта гробница покойт; дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей».

Предоставляем читателю самому разобраться, сколько лет жил на свете Диофант, когда у него появилась борода и т. д.

Его основное произведение под названием

«Arithmetika»

посвящено «достопочтеннейшему Дионисию». Возможно, что это тот Дионисий, который в 247 году был епископом Александрийским. Посвящение начинается так:

«Зная, достопочтеннейший Дионисий, что Вы очень усердно изучаете задачи, касающиеся чисел, я взялся изложить природу их и могущество, начиная с самых основ, на которых все это покоится. Это, может быть, покажется более трудным, чем оно есть на самом деле, потому что еще неизвестно. Начинаящие склонны скоро терять мужество. Но Вы легко разберетесь в этом благодаря устремлению Вашего духа и моим пояснениям»^{*)}.

^{*)} Текст посвящения в немецком переводе опущен. Мы сохранили «вы» голландского подлинника, ибо, начиная с 3-го века н. э., это обращение к вышестоящим начинает входить в употребление. (Прим. перев.)

Во введении говорится о тринадцати книгах, но из них сохранилось только шесть. Эти шесть книг содержат 189 задач с решениями.

Задачи первой книги почти все приводят к определенным уравнениям вроде

$$as = b \quad \text{или} \quad as^2 = b,$$

имеющим только одно положительное решение. В остальных пяти книгах находятся главным образом неопределенные уравнения, называемые также

Диофантовыми уравнениями

Они допускают большей частью бесконечно большое число решений.

Диофант рассматривает исключительно лишь *положительные рациональные решения*. Обычно он удовлетворяется каким-нибудь одним решением, не делая различий, будет ли оно целочисленным или дробным.

Его метод меняется от одного случая к другому. Систематической теории диофантовых уравнений у него нет и следа. Общее решение диофантовых уравнений первой степени

$$ax \pm by = c$$

впервые намечено у Арьябхаты (500 н. э.) и вполне развито у Брахмагупты. Это, однако, не значит, что у Диофанта вообще не было никакого метода. Например, он знает общее решение уравнения «пифагоровых треугольников»

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

и, кроме того, специальный метод решения неопределенных уравнений вида

$$Ax^2 + Bx + C = y^2, \quad (2)$$

который приводит к цели, если A и C равны нулю, если A или C представляют квадрат, или если $A+C$ является квадратом, а B равно нулю. Диофант имеет также метод решения «двойных уравнений» вида

$$\left. \begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y^2, \\ dx^2 + ex + f &= z^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сейчас мы увидим на примерах, как Диофант действовал при решении этих уравнений.

Диофанту было также известно, что число вида $8n+7$ нельзя представить в виде суммы трех квадратов. Но это, пожалуй, и все,

что можно найти у Диофанта по части общих представлений. Наряду с этим он знает множество специальных, иногда очень остроумных уловок и ухищрений.

Предшественники Диофанта

в области неопределенных уравнений нам большей частью не известны. Мы уже видели выше, что Пифагору и Платону приписывались специальные методы решения диофантова уравнения (1) в целых числах. Мы знаем также, что уже вавилоняне знали общее его решение, которое есть и у Диофанта:

$$x = p^2 - q^2,$$

$$y = 2pq,$$

$$z = p^2 + q^2.$$

Пифагорейцы знали также бесконечно большое число решений диофантова уравнения

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1,$$

а именно, «диагональные и боковые числа», о которых мы подробно говорили выше. Можно еще указать на Архимедову задачу о быках. Это примерно все, что мы знаем.

Что же касается *определенных уравнений*, то тут, наоборот, мы можем составить себе известное представление о традиции, к которой принадлежал Диофант. Системы линейных уравнений с двумя или более неизвестными мы находим не только в клинописях, но и в одном папирусе 2-го века н. э.*). Затем я напому об «эпантеме Тимарида» и о вавилонской алгебре. Алгебраические задачи в стихотворной форме, вроде вышеприведенной эпитафии Диофанта, были очень популярны в Греции в эпоху Архимеда. В греческой палатинской антологии **) можно найти большое их число под именем Метродора. В противоположность этим общенародным сборникам Диофант почти всегда дает чисто арифметическую формулировку без поэтической оболочки.

Связь с вавилонской и арабской алгеброй

Весьма вероятно, что традиция таких алгебраических методов никогда не прерывалась, иными словами, что наряду с ученой греческой математикой все время существовала общенародная традиция алгебраических задачек и методов их решения. Эта традиция

*) L. C. K a r p i n s k i und F. E. R o b b i n s, *Michigan Papyrus* 260, *Science* 70 (1929), стр. 311.

**) См., например, Диофант в немецком переводе Вертгейма (Wertheim).

исходит из вавилонской алгебры и завершается арабской алгеброй с ответвлениями в греческий культурный мир, в Китай и в Индию.

Доказать по-настоящему, что такая непрерывная традиция существовала, мы не можем; для этого, к сожалению, нам недостает еще многих промежуточных звеньев. Речь, скорее, идет только об общем впечатлении родственности, которое получается, если после клинописных текстов начнешь перелистывать Герона или Диофанта, китайского «классика морского острова», или «Āryabhatīya» Арьябхаты, или алгебру аль-Хваризми.

Все арабские источники согласно утверждают, что аль-Хваризми был первым, кто писал об алгебре; однако его алгебра уже производит такое впечатление зрелости, что невозможно допустить, чтобы он все это изобрел сам. В клинописных текстах мы находим первобытное изобилие задач и методов решения, но только начатки систематизации; у аль-Хваризми же, наоборот, — строгое ограничение основным материалом, а именно решением линейных и квадратных уравнений с одним неизвестным. Все приводится к очень небольшому числу нормальных форм, и примитивным назвать это, конечно, нельзя. При помощи известных нам греческих и индийских источников нельзя объяснить создание книги Аль-Хваризми. Поэтому склоняешься к мысли, что он черпал из более древних источников, которые были как-то связаны с вавилонской алгеброй.

К числу этих источников Диофант определенно не принадлежит: совершенно очевидно, что аль-Хваризми от Диофанта не зависит. Однако возможно, что Диофант относится к той же самой традиции, так как задачи 27—30 первой книги «Арифметики» Диофанта тесно связаны с вавилонскими задачами на уравнения в нормальных формах; то же можно сказать и относительно их решений. Задачи эти таковы. Найти два числа, для которых даны:

- (27) сумма и произведение;
- (28) сумма и сумма квадратов;
- (29) сумма и разность квадратов;
- (30) разность и произведение.

Метод решения полностью совпадает с вавилонским. Если дана сумма $2a$, то Диофант полагает одно число равным $a+s$, а другое $a-s$ и получает уравнение для s . Если дана разность $2b$, то одно число принимается равным $s+b$, а другое $s-b$.

Все свои задачи, сколь бы они ни были сложны, Диофант систематически сводит к уравнениям с одним неизвестным. Другие неизвестные он или выражает через одно, или выбирает для них произвольные значения, которые позднее в случае надобности изменяются так, чтобы они удовлетворяли другим условиям задачи. Аль-Хваризми тоже систематически приводит свои задачи к уравнениям с одним неизвестным. Но все-таки аль-Хваризми не зависит от Диофанта.

Алгебраические обозначения

у Диофанта еще очень примитивны. Для неизвестного (которое мы всегда будем обозначать s) он имеет специальный знак, который немного напоминает букву s и который встречается в Мичиганском папирусе 620. Возможно, что этот знак получился из начальных букв или конечного ς слова *Arithmos**).

Точно так же как и аль-Хваризми, Диофант имеет особые названия и сокращенные обозначения для степеней неизвестного s , а именно:

$$(1) \quad M^0 = \text{Μόνας} = \text{единица},$$

$$(s) \quad \varsigma = \text{'Αριθμός} = \text{число **),}$$

$$(s^2) \quad \Delta^Y = \text{Δύναμις} = \text{квадрат},$$

$$(s^3) \quad K^Y = \text{Κύβος} = \text{куб},$$

$$(s^6) \quad K^Y K = \text{Κυβίζουβος} = \text{кубокуб}.$$

Кроме того, есть названия для обратных величин степеней s^{-1} , s^{-2} и пр.

Если нужно сложить несколько членов, то Диофант просто пишет их друг за другом, например:

$$\Delta^Y \gamma M^0 \beta = 3s^2 + 12.$$

Таким образом, он не пишет просто 12, а пишет «12 единиц». Точно так же большей частью пишет и аль-Хваризми: «12 дирхемов» ***).

Для обозначения вычитания Диофант пользуется специальным знаком: это нечто вроде перевернутого ϕ . Все остальное: умножение, равенство, «больше» и «меньше», он выражает словесно, точно так же как после него будут делать арабы, а по их примеру итальянцы. Аль-Хваризми даже не пользуется сокращениями Диофанта: его алгебра вполне «риторическая» и в этом отношении еще примитивнее, чем алгебра Диофанта****).

*) См. подробное обсуждение этой проблемы у Хизса: Th. Heath, *Diophantus of Alexandria* 2-nd, Cambridge, 1910, или стр. 456 второго тома «*History of Greek Mathematics*» того же автора.

**) Если, кроме «числа» s , имеется еще и квадрат s^2 , то Диофант называет s «стороной». То же самое и у аль-Хваризми.

***). Дирхем—монетная единица на арабском Востоке. (Прим. перев.)

****) Даем типичный пример из алгебры аль-Хваризми по переводу Розена (The algebra of Mohammed ben Musa, изд. Rosen, London, 1831, стр. 5) «Квадрат и десять его корней составляют тридцать девять дирхемов, т. е. если ты прибавишь десять корней к одному квадрату, то сумма будет равняться тридцати девяти. Решение таково: возьми половину от числа корней, т. е. в этом случае пять, и умножь их на себя; в результате получится двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, это даст шестьдесят четыре; возьми квадратный корень, т. е. восемь, и вычти из него половину числа корней, именно пять, и вот останется три. Это и будет корень».

В своем введении Диофант объясняет, каким образом производятся умножения или деления степеней неизвестного, как умножаются многочлены и как можно соединять вместе члены с той же степенью s . Затем идет то, что у арабов называлось *al-jabr* и *al-mukâbala*, а у более поздних математиков — *restauratio* и *oppositio*. *Al-jabr* (откуда наше слово «алгебра») — это перенесение отрицательных членов в другую часть уравнения, а *al-mukâbala* — вычитание равных членов из правой и левой частей.

Если посчастливится, то после этих операций в каждой части уравнения остается по одному члену; тогда уравнение будет иметь вид

$$as = b,$$

или

$$as^2 = bs,$$

или

$$as^2 = b,$$

и решается просто.

Случай, когда в одной части остаются два члена, Диофант обещает разобрать позже. В сохранившейся части его «Арифметики» это обещание не выполняется, но ясно, что квадратные уравнения вида

$$as^2 + bs = c,$$

или .

$$as^2 + c = bs,$$

или

$$bs + c = as^2$$

он умел решать не хуже вавилонян, индийцев и арабов.

Приведенные здесь шесть форм уравнений первой и второй степени будут как раз шестью основными формами аль-Хваризми.

Таким образом, решение определенных уравнений было, по видимому, для Диофанта темой традиционной. Гораздо более оригинальной является его виртуозная трактовка вопроса о неопределенных уравнениях. Постараемся на некоторых типичных примерах выяснить способ действий Диофанта при решении таких задач.

Из книги II

Задача 9. Представить данное число, равное сумме двух квадратов, в виде суммы двух других квадратов.

В вольном переводе решение таково:

«Пусть данное число будет 13, оно равно сумме квадратов 2 и 3.

Пусть сторона одного квадрата будет $s+2$, а сторона другого на 3 единицы меньше какого-нибудь произвольно кратного s , пусть, например, она

будет $2s-3$. Тогда первый квадрат будет s^2+4s-4 , а другой $4s^2+9-12s$, вместе $5s^2+13-8s$. Это должно равняться 13; следовательно, $s=\frac{8}{5}$.

Таким образом, сторона первого квадрата будет $s+2=\frac{18}{5}$, а второго $2s-3=\frac{1}{5}$. Тогда сами квадраты будут $\frac{324}{25}$ и $\frac{1}{25}$. Сумма их действительно равна 13».

Задача 20. *Найти два таких числа, чтобы квадрат каждого из них, сложенный со вторым числом, был бы квадратом.*

«Пусть первое число будет s . Чтобы его квадрат, увеличенный вторым числом, был тоже квадратом, положим второе число равным $2s+1$ ».

Остановимся здесь на минуту. Если Диофанту приходится, как в этом примере, удовлетворять больше чем одному условию, то он выбирает для неизвестных чисел такие зависящие от s выражения, чтобы они «тождественно удовлетворяли» всем условиям кроме одного, как бы это s ни было выбрано. Это последнее условие и приведет тогда к уравнению относительно s .

В нашем случае s^2+2s+1 будет всегда квадратом, как бы ни было выбрано s . Теперь Диофант продолжает:

«Квадрат второго числа, увеличенный на первое, будет $4s^2+5s+1$. Это тоже должно быть квадратом. В качестве стороны этого квадрата возьмем $2s-2$. Тогда квадрат ее будет $4s^2+4-8s$ и из равенства

$$4s^2+5s+1=4s^2+4-8s$$

получается $s=\frac{3}{13}$ ».

Метод в обоих этих примерах один и тот же. Диофант полагает искомые числа равными простым выражениям относительно s , как $s+2$ и $2s-3$ в первом примере. Затем он получает квадратное уравнение относительно s , и ему удается так хитро устроить, чтобы в этом квадратном уравнении выпал либо член с s^2 , либо постоянная величина, и удалось для s получить рациональное решение.

Большинство задач книги II решается этим методом.

Другой довольно типичный искусственный прием, «метод двойного равенства», основывается на формуле

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y). \quad (4)$$

Этот метод применяется, когда оба выражения с s должны быть квадратами. В таком случае их разность должна быть равна разности квадратов (например, x^2-y^2). Этого достигают, разлагая разность на два множителя ($x+y$ и $x-y$). Полусумма этих множителей будет тогда x , а полуразность y .

Этот метод впервые применяется в

Задача 11. *К двум заданным числам прибавить одно и то же число так, чтобы каждое из полученных было квадратом.*

«Пусть данные числа будут 2 и 3; прибавляем к каждому s , тогда $s+2$ и $s+3$ должны быть квадратами; мы имеем здесь так называемое „двойное равенство“. Последнее решается так: возьми разность ($s+3$ и $s+2$) и подыщи два таких числа, произведение которых равнялось бы этой разности, например 4 и $\frac{1}{4}$. Полуразность их, умноженную на самое себя, положи равной $s+2$ или полусумму, умноженную на самое себя, положи равной $s+3$...; в обоих случаях мы получим $s = \frac{97}{64}$. Таким образом, число, которое надо прибавить, будет $\frac{97}{64}$. Оно, очевидно, удовлетворяет условиям задачи».

Из книги III

Задача 10. *Найти три таких числа, чтобы произведение любой их пары, увеличенное на 12, давало бы всегда квадрат.*

«Произведение двух первых чисел, увеличенное на 12, должно быть квадратным числом. Бери его равным 25; если я вычту отсюда 12, то остаток 13 будет произведением двух этих чисел. Пусть первое число будет $13s$, а второе s^{-1} .

Произведение второго и третьего чисел, увеличенное 12-ю, должно тоже быть квадратом. Пусть этот квадрат 16; тогда само произведение будет 4. Так как второе число равнялось s^{-1} , то третье должно быть $4s$.

Теперь произведение первого и третьего плюс 12 должно быть квадратом. Но произведение первого и третьего равно $52s^2$; следовательно, $52s^2 + 12$ должно быть квадратом.

Если бы теперь множитель 13 при s в выражении для первого числа ($13s$) был квадратом, то задача решилась бы легко».

Действительно, тогда и коэффициент при s^2 , который получился в виде $13 \cdot 4$, оказался бы тоже квадратом и мы, пожалуй, смогли бы применить тот же самый метод, что и раньше при решении задачи 20-й, где коэффициент при s^2 , именно 4, тоже был бы квадратом. Вот каким образом мы могли бы восполнить ход рассуждений Диофанта.

«Так как здесь это не имеет места, то нам придется (вместо 13 и 4) взять два таких числа, чтобы их произведение было квадратом и чтобы каждое из них, увеличенное на 12, тоже давало бы квадрат.

Если теперь я возьму не просто два любых числа, а два квадратных числа, то их произведение, естественно, тоже будет квадратным числом. Таким образом, мне нужно отыскать два таких квадрата, чтобы каждый из них, будучи увеличен на 12, все-таки оставался бы квадратом.

Но это уже сделать легко, и как только эти квадраты будут найдены, решение уже не представит никаких трудностей. Один квадрат будет 4, а другой $\frac{1}{4}$, ибо каждое из этих чисел, будучи увеличено на 12, дает квадрат.

Теперь я возвращаюсь к первоначальной задаче и полагаю первое число равным $4s$, второе s^{-1} и третье $\frac{1}{4}s$. Теперь нам придется еще сделать так, чтобы произведение первого и третьего плюс 12 было квадратом. Произведение первого и третьего будет s^2 ; следовательно, $s^2 + 12$ должно быть квадратом. Я составляю квадрат $s+3$; он будет $s^2 + 6s + 9$. Тогда $s^2 + 6s + 9 = s^2 + 12$, и мы получаем $s = \frac{1}{2}$. Это и решает задачу».

Диофант применяет здесь так называемый «метод ложного положения».

Для своих неизвестных чисел он прежде всего берет такие выражения, зависящие от s , что часть условий задачи уже оказывается выполненной. Если ему не удастся сразу совместить это с удовлетворением остальных условий, то он исследует причину этого и так изменяет свои предположения, чтобы все сходилось.

При выполнении этого плана он сталкивается с задачей: найти два таких квадрата, чтобы каждый из них, увеличенный на 12, тоже давал бы квадрат: «Это сделать легко», — говорит Диофант, и это действительно легко. Ведь все дело заключается в том, чтобы двумя способами представить 12 в виде разности двух квадратов. На основании равенства (4) достаточно разложить 12 двумя способами на два множителя. Диофант выбрал разложения:

$$12 = 2 \cdot 6 = (4 - 2)(4 + 2) = 4^2 - 2^2$$

и

$$12 = 3 \cdot 4 = \left(3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Они дают

$$2^2 + 12 = 4^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12 = \left(3\frac{1}{2}\right)^2.$$

Из книги IV

Очень изящный пример метода ложного положения дает

Задача 31. *Раздели единицу на две части и прибавь к каждой из них по заданному числу так, чтобы их произведение было квадратом.*

«Пусть числа, которые надо прибавить, будут 3 и 5. Положи одну часть равной s , а другую $1-s$. Если прибавить 3 и 5 к этим частям, то получатся $s+3$ и $6-s$. Таким образом, их произведение будет $3s+18-s^2$. Это должно быть тоже квадратом, положим $4s^2$. Если прибавить к обеим частям по s^2 , то получится:

$$3s+18=5s^2.$$

Это уравнение не решается в рациональных числах. Коэффициент 5 есть квадрат плюс 1. Для того чтобы уравнение имело рациональные решения, этот коэффициент, взятый 18 раз и увеличенный квадратом половины от 3, должен быть квадратом. Таким образом, вместо 4 мы должны отыскать другой квадрат, который, увеличенный на 1 и взятый 18 раз плюс $2\frac{1}{4}$, давал бы квадрат.

Для этой вспомогательной задачи вводится новое неизвестное s , которое нельзя смешивать с прежним s . Диофант выражает это так:

«Пусть искомый квадрат будет s^2 . Тогда s^2+1 , взятое 18 раз плюс $2\frac{1}{4}$, или $18s^2+20\frac{1}{4}$, должно быть квадратом. Я беру все это четыре раза: тогда $72s^2+81$ должно быть сделано квадратом. Я полагаю этот квадрат равным $(8s+9)^2$ и получаю $s=18$. Искомый квадрат будет, таким образом, 324.

Теперь я возвращаюсь к первоначальной задаче: $3s + 18 - s^2$ должно быть квадратом. В качестве этого квадрата я беру теперь $324s^2$, тогда получится $s = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}$. Таким образом, первая часть будет $\frac{6}{25}$, а вторая $\frac{19}{25}$.

Мы видим, что Диофант знал общие решения квадратных уравнений вида

$$as^2 = 2bs + c.$$

Он писал решение в виде дроби со знаменателем a (в вышеприведенном примере $a = 325$), и ему было известно, что решение будет только тогда рациональным, когда $b^2 + ac$ является квадратом. Его формула, очевидно, была

$$s = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}.$$

Для этой же самой задачи Диофант дает еще второе решение, в котором он с помощью «ложного положения» получает сначала отрицательное решение, которое он, естественно, отбрасывает. Ему приходится тогда так видоизменить свое предположение, чтобы удовлетворялось некоторое неравенство. Мне кажется, что это решение еще изящнее, чем предыдущее.

«И н ы м с п о с о б о м. Первую часть, которую надо увеличить на 3, мы полагаем равной s минус 3 единицы. Тогда вторая часть будет $4 - s$ и условие становится таким: $9s - s^2$ должно быть квадратом. Положи этот квадрат равным $4s^2$; тогда получится $s = \frac{9}{5}$. Но отсюда нельзя отнять 3 единицы; следовательно, s должно быть больше 3, но меньше 4.

Мы нашли s при помощи деления 9 на 5, т. е. на квадрат плюс 1. Так как s лежит между 3 и 4, то этот квадрат плюс 1 должен лежать между 3 и $2\frac{1}{4}$, а следовательно, сам квадрат между 2 и $1\frac{1}{4}$. Таким образом, мы должны искать квадрат, который будет более $1\frac{1}{4}$ и менее 2.

Обрати эти числа в дроби с знаменателем 64; тогда числители будут 80 и 128. Теперь уже все просто: искомый квадрат будет

$$\frac{100}{64}, \text{ т. е. } \frac{25}{16}.$$

Возвращаясь к первоначальной задаче, мы находим уравнение

$$9s - s^2 = \frac{25}{16}s^2,$$

откуда следует $s = \frac{144}{41}$. Таким образом, первое число будет $\frac{21}{41}$, второе $\frac{20}{41} \dots$.

Из книги V

Простой пример «метода двойного равенства»:

Задача 1. Найти три числа в геометрической пропорции таких, чтобы каждое из них, уменьшенное на 12, было квадратом.

«Сначала я ищу квадрат, который после уменьшения на 12 остается квадратом. Это просто: искомый квадрат будет $42\frac{1}{4}$.

Теперь я полагаю первый член пропорции равным $42\frac{1}{4}$, а третий s^2 ; тогда средний член будет $6\frac{1}{2}s$. Теперь оба выражения $s^2 - 12$ и $6\frac{1}{2}s - 12$ должны быть квадратами. Их разность будет $s^2 - 6\frac{1}{2}s$. Она будет произведением s и $s - 6\frac{1}{2}$. Если полуразность двух этих выражений помножить на самое себя, то получится $\frac{169}{16}$; это мы полагаем равным меньшему выражению $6\frac{1}{2}s - 12$. Таким образом, получается $s = \frac{361}{104}$ и т. д.»]

Из книги VI

Книга VI рассматривает прямоугольные треугольники с рациональными сторонами, т. е. решения диофантова уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Диофант знает, что такие треугольники можно получить «при помощи двух чисел» p и q по формулам

$$x = p^2 - q^2,$$

$$y = 2pq,$$

$$z = p^2 + q^2.$$

В каждой из задач VI книги Диофант накладывает еще дополнительные условия на стороны или на площадь. Пример:

Задача 1. *Найти такой прямоугольный треугольник (с целочисленными сторонами), чтобы гипотенуза минус каждая из сторон давала бы куб.*

«Пусть прямоугольный треугольник образован при помощи двух чисел, из которых одно пусть будет s , а другое 3. Тогда гипотенуза будет $s^2 + 9$, высота $6s$ и основание $s^2 - 9$.

Если теперь вычесть из гипотенузы катет $s^2 - 9$, то в остатке будет 18. Это не куб.

Как же получилось число 18? Оно будет удвоенным квадратом 3. Таким образом, нужно (вместо 3) взять такое число, чтобы его квадрат, взятый дважды, был кубом. Если мы обозначим это число опять через s^* , то $2s^2$ должно быть кубом, например s^3 . Отсюда получается, что s равно 2.

Теперь я снова составляю треугольник „при помощи чисел” s (старое s^{-1}) и 2 (вместо 3). Гипотенуза будет $s^2 + 4$, высота $4s$ и основание $s^2 - 4$. Теперь условие выполнено, так как разность между гипотенузой ($s^2 + 4$) и основанием $s^2 - 4$ является кубом.

*) Это s , естественно, нельзя смешивать с прежним s . Здесь мы имеем типичный пример метода ложного положения. Если с числом 3 ничего не вышло, то Диофант заменяет 3 другим числом, которое временно он тоже называет s .

Но также должна быть кубом разность гипотенузы и высоты, т. е. выражение $s^2 + 4 - 4s$. Это выражение будет квадратом со стороны $s - 2$. Таким образом, задача будет решена, если мы сделаем $s - 2$ равным кубу. Пусть этот куб будет 8; тогда $s = 10$. Таким образом, треугольник образуется при помощи 10 и 2. Гипотенуза будет 104, высота 40, основание 96».

Если у читателя после этих проб разовьется аппетит, то он может взять переводы Вертгейма (Wertheim) (Лейпциг, 1890) или Чвалина (Czwalina) (Геттинген, 1952), или же французский перевод Ver Eecke и английский Heath'a и изучить полностью самого Диофанта.

Небольшая работа Диофанта о многоугольных числах не имеет значения*).

Еще один раз Александрийская школа выдвинула значительного математика: это был

ПАПП АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Случай помог нам узнать, когда жил Папп: 18 октября 320 н. э. он наблюдал солнечное затмение и рассказал об этом в своем комментарии к «Альмагесту»**).

Об его главном произведении «Математическом собрании» внимательный читатель должен был уже и сам составить себе известное представление, потому что мы уже неоднократно заимствовали оттуда. В этом сочинении Папп собрал вместе все, что он нашел интересного в трудах своих предшественников: касательно высших кривых, о квадратуре круга, об удвоении куба и трисекции угла, методе анализа и т. д. Когда он считал необходимым что-нибудь пояснить или добавить к трудам великих геометров, он излагал это в виде лемм. Отсюда мы немало узнали о содержании утраченных произведений Евклида и Аполлония.

Но, кроме этого, Папп в некоторых пунктах пополнил и расширил труды своих предшественников. Так, например, в третьей книге он дает новое построение для пяти правильных многогранников, вписанных в заданный шар***).

Четвертая книга содержит интересное обобщение теоремы Пифагора и ряд изящных предложений относительно кругов, вписанных в «арбелос» Архимеда. В той же книге Папп определяет некоторую спираль на поверхности шара и находит площадь поверхности, ограниченной этой спиралью и дугой круга (метод

*) Весь отдел о Диофанте дан в переводе с немецкого издания, текст которого значительно отличается и от голландского подлинника и от английского перевода. (Прим. перев.)

**) См. A. R o m e, Annales Soc. Scient. Bruxelles 47 [AI], стр. 46.

***). Некоторые авторы относят эти построения к старшему современнику Евклида Аристее. (Прим. перев.)

заимствован у Архимеда*)). Он показывает, каким образом, построение для *neusis*, примененное где-то Архимедом**), может быть сведено к пересечению двух конических сечений.

В пятой книге излагается работа Зенодора об изопериметрических фигурах с дополнением нескольких предложений, найденных самим Паппом.

В шестой книге Папп определяет центр эллипса, заданного как перспективное преобразование круга***).

Седьмая книга имеет очень важное историческое значение, так как в ней дается обзор содержания довольно большого числа сочинений о геометрическом анализе и геометрических местах, которые почти все утеряны. В качестве собственного открытия Папп формулирует теорему относительно объемов тел вращения, которая, в сущности, есть то же самое, что теперь называется «теоремой Паппа—Гульдена».

Восьмая книга посвящена в большей своей части механике, но содержит, кроме того, и построение конического сечения, проходящего через 5 данных точек. Поводом для этого послужила задача: определить диаметр цилиндрической колонны по произвольному ее обломку. Затем книга дает способ построения главных осей эллипса по двум сопряженным диаметрам.

Чтобы дать читателю понятие о высоком уровне этого произведения, мы рассмотрим первую из тринадцати лемм к «Поризмам» Евклида. Они содержат идеи, которые в дальнейшем имели большое значение в проективной геометрии.

«Поризмы» Евклид

Во введении к седьмой книге своего «Собрания» Папп говорит, что некоторое число поризмов Евклида может быть объединено в одно предложение, которое гласит (рис. 173):

* Если из шести точек пересечения четырех прямых (a, b, c, d на нашем чертеже) три, лежащие на одной прямой (a) или две — в случае параллельности — будут неподвижны, а две из трех остальных (P и Q) лежат на неподвижных прямых (p и q), то и шестая точка (R) будет лежать на неподвижной прямой (r).

*) Теоремы об арбелосе сам Папп считает принадлежащими какому-то другому автору (возможно, Архимеду). Задача о спирали на поверхности шара дана у Паппа без решения, т. е. наверняка ему не принадлежит. (Прим. перев.)

**) В книге «О спиралях». (Прим. перев.)

***) Шестая книга содержит комментарии Паппа к так называемому «Малому астроному» — сочинениям, которые читались после «Начал» Евклида и до «Альмагеста» Птолемея. Это были труды Аристарха, Автолика и «Сферика» Феодосия триполлийского. (Прим. перев.)

Папп мог бы еще добавить, что прямые p, q, r проходят через одну точку s , или параллельны. На нашем чертеже переменные прямые обозначены пунктиром, а неподвижные — сплошной чертой.

Если мы представим себе два различных положения пунктирных прямых (b, c, d и b', c', d'), получится чертеж известной

Теоремы Дезарга

Если два треугольника PQR и $P'Q'R'$ (рис. 174) расположены так, что точки пересечения соответствующих сторон (b и b' , c и c' , d и d') лежат на одной прямой (a), то прямые, соединяющие соответственно вершины (P и P' , Q и Q' , R и R'), проходят через одну точку S и обратно.

Мы не будем здесь рассматривать обобщение для более чем четырех прямых, которое добавляет Папп, но, конечно, стоит поставить вопрос: каким образом Евклид доказал теорему для четырех прямых?

Вполне естественно допустить, что доказательство могло быть получено при помощи тех лемм, которые при этом излагает Папп, чтобы сделать доказательство более ясным. Мы сейчас увидим, что так действительно и было.

Теорема о полном четырехугольнике

Чертеж для теоремы о четырех прямых можно также рассматривать как чертеж полного четырехугольника $PQRS$, в котором шесть сторон его (PQ, RS и т. д.) пересекаются некоторой

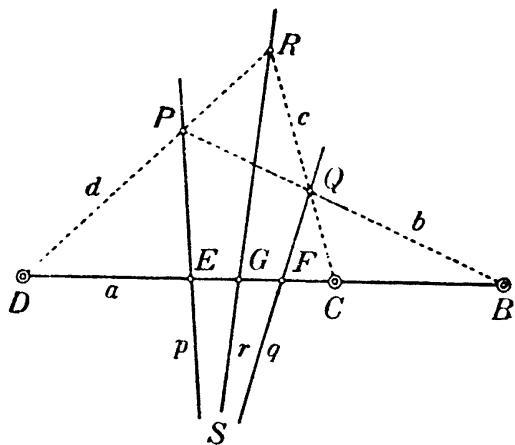


Рис. 173.

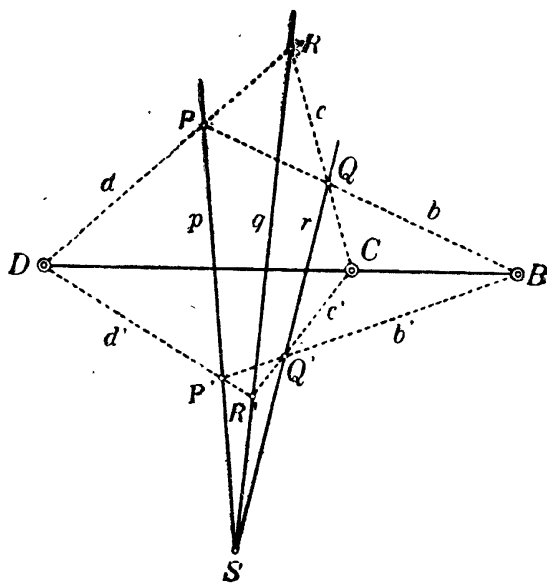


Рис. 174.

неподвижной прямой a . Если теперь можно доказать, что из шести точек пересечения B, C, D, E, F, G шестая G однозначно определяется пятью остальными, то отсюда непосредственно следует, что если P пробегает неподвижную прямую ES , а Q — прямую FS , то R должна описать неподвижную прямую GS , чем и доказывается теорема для четырех прямых.

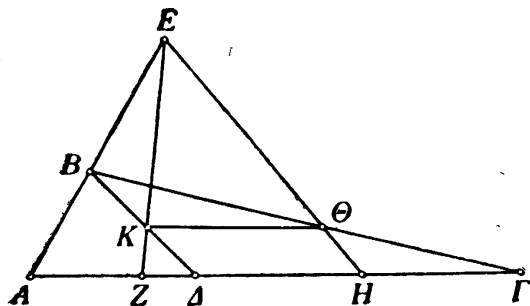


Рис. 175.

Предложение, что G однозначно определяется через B, C, D, E и F , называют *второй теоремой Дезарга*, или *теоремой о полном четырехугольнике*. Папп по-своему формулирует это предложение, выражая соотношение между шестью точками B, C, D, E, F, G в виде пропорции, причем в леммах I

и II он рассматривает случай, когда одна из сторон четырехугольника параллельна прямой a , а в лемме IV — случай, когда все шесть точек $B, \dots, G$ остаются на конечных расстояниях.

Действительно, лемма I гласит:

«Пусть будет построена фигура $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ и пусть

$$A\Delta : \Delta\Gamma = AZ : ZH, \quad (1)$$

а Θ соединена с K ; я утверждаю, что ΘK параллельна $A\Gamma$ ».

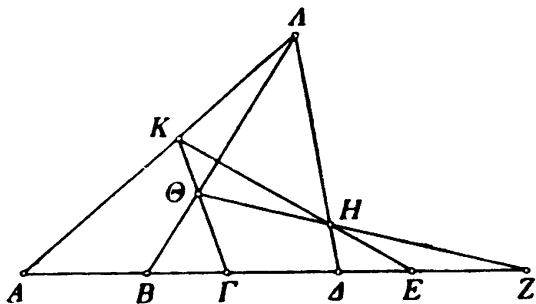


Рис. 176.

На рис. 175 легко узнать полный четырехугольник $BE\Theta K$, шесть сторон которого пересечены одной прямой. Если между пятью из шести точек сечения имеется соотношение (1), то эта шестая точка будет «бесконечно удаленной», как говорят в наше время.

Лемма II совершенно аналогична, но в задании предполагается, что $K\Theta$ параллельна $A\Gamma$.

Лемма IV гласит:

«Пусть будет построена фигура $AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda$ и пусть

$$(AZ \cdot \Delta E) : (A\Delta \cdot EZ) = (AZ \cdot B\Gamma) : (AB \cdot \Gamma Z). \quad (2)$$

Я утверждаю, что точки Θ, H, Z лежат на одной прямой».

Мы опять узнаем полный четырехугольник $H\Theta K\Lambda$, в котором шесть сторон пересечены одной прямой. Равенство (2) выражает в современной терминологии, что двойное отношение $(AZ : EA)$

равно двойному отношению $(ZA : BG)$. В настоящее время мы говорим, что три пары точек A, Z ; B, E и Γ, Δ находятся в инволюции.

Лемма V относится к частному случаю, когда две пары из шести точек сливаются вместе на прямой $A\Gamma$ (рис. 177). Тогда вместо (2) мы получаем пропорцию

$$AB : BG = A\Delta : \Delta\Gamma. \quad (3)$$

В таком случае мы говорим о *двух гармонических парах точек* A, Γ и B, Δ .

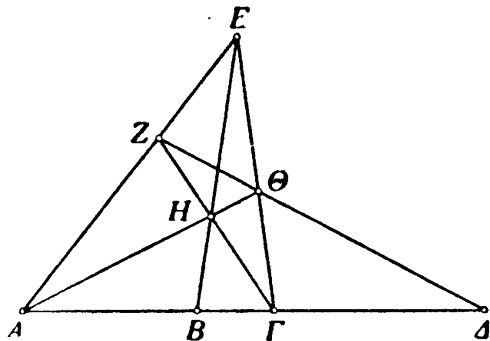


Рис. 177.

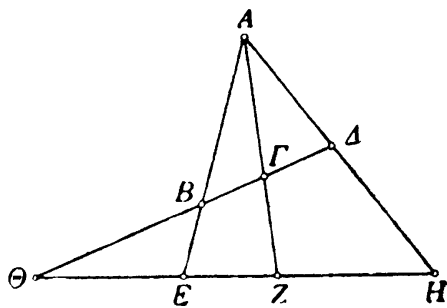


Рис. 178.

Свои леммы Папп доказывает, проводя параллельные прямые и искусно жонглируя пропорциями. Он мог бы при своих доказательствах также воспользоваться тем, что двойное отношение четырех точек остается неизменным при проектировании этих четырех точек на какую-нибудь другую прямую, как он и сделал, формулируя это предложение в качестве леммы III. Правда, он рассматривает только тот частный случай, когда одна из четырех точек представляет точку пересечения двух прямых.

Л е м м а III (рис. 178). *Через три прямые $AB, A\Gamma, A\Delta$ проведи прямые ΘE и $\Theta \Delta$. Я утверждаю, что*

$$(\Theta B \cdot \Gamma \Delta) : (\Theta \Delta \cdot B\Gamma) = (\Theta E \cdot HZ) : (\Theta H \cdot ZE).$$

Лемма X представляет обращение леммы III, а лемма XI касается особого случая, когда одна из двух трансверселей параллельна одной из четырех прямых.

А теперь при помощи этих лемм Папп доказывает знаменитую

Теорему Папп

которая гласит:

Если на прямых AB и $\Gamma\Delta$ взяты точки E и Z и проведены линии $A\Delta, AZ, B\Gamma, BZ, E\Delta$ и $E\Gamma$, то точки пересечения: H, K, M лежат на одной прямой.

Папп формулирует и доказывает это предложение сначала для случая, когда AB и GD параллельны (лемма XII), а затем для случая, когда они пересекаются (лемма XIII).

В настоящее время эту теорему рассматривают как частный случай *теоремы Паскаля*, которая утверждает, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой.

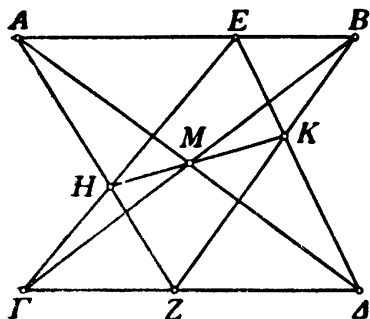


Рис. 179.

ТЕОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (380 н. э.)

был довольно посредственным математиком. Он написал книгу об астролябии*), комментарий к «Альмагесту»**) и заново издал «Начала» Евклида с довольно незначительными добавления-

ми и изменениями. Наибольшую славу он, однако, получил не как математик, а как отец

ИПАТИИ

поистине ученой женщины, героини романтических повестей «с ужасами».

Она была очень хороша, красноречива и обаятельна, писала ученые комментарии к Диофанту и Аполлонию и была профессором платоновской философии в Александрии. Немного позднее епископ Синезий называет ее своей «матерью, сестрой и досточтимой наставницей». У нее были связи в высших кругах; ее советы ценились не только по части литературы, но и в практической жизни. Будучи женщиной в центре мужского круга, она умела быть и свободной и держать себя с достоинством. Существует рассказ о том, как она довольно решительно сумела привести в чувство одного из своих безумно влюбленных поклонников (см. у Свида под заголовком «Ипатия»).

Несмотря на дружбу со многими христианами, она оставалась верна традициям языческого эллинизма. Это и было причиной ее гибели. Одним из ее друзей был римский префект Орест, смертельный враг епископа Кирилла. В христианской общине ее обвинили в том, что она восстановила Ореста против Кирилла. Когда она однажды возвращалась домой, чернь вытащила ее

*) См. O. Neugebauer, Isis 40 (1949), стр. 240.

**) A. Rome, Commentaires de Pappus et de Théon sur l'Almageste, т. 2 (1936).

из повозки, потащила к церкви; там с нее сорвали одежды и убили острыми черепками. В церковной истории Сократа говорится, что ее тело было разорвано еще на куски и сожжено. Это произошло в 418 н. э.

После Ипатии с александрийской математикой было покончено. Единственная оставшаяся библиотека при храме Сераписа была еще в 392 году разгромлена александрийской чернью.

АФИНСКАЯ ШКОЛА. ПРОКЛ ДИАДОХ

Академия Платона, в распоряжении которой были немалые денежные средства, держалась несколько дольше. Прилежный неоплатоник Прокл (450 н. э.) написал, среди многих других тол-

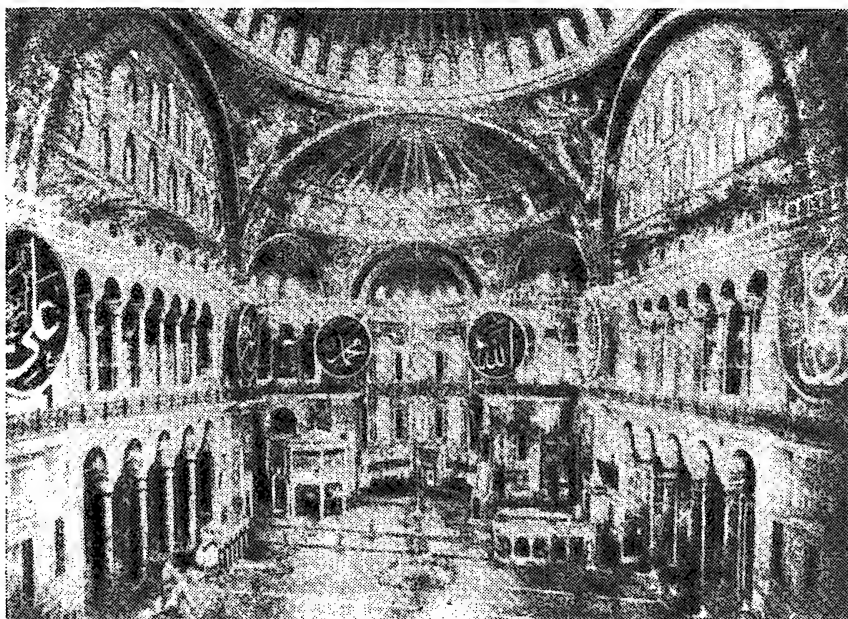


Рис. 180. Святая София. Конструкции с арками, сводами и куполами не играли важной роли в греческой архитектуре. Демокрит изучал теорию арки уже во второй половине 5-го века до н. э., но греки очень мало пользовались арками, на практике и то только в позднеэллинистическом периоде. У римлян было совершенно иначе. В связи с разными римскими и итальянскими конструкциями из арок, сводов и куполов эти формы получили очень большое развитие; этому помогло введение новых строительных материалов (кирпичи, известка, цемент); стоит только вспомнить о Пантеоне. Хотя восточные влияния проявляются очень сильно, но «Святую Софию» невозможно представить себе вне связи с расцветом римских построек со сводами и куполами.

стых книг, комментариев к первой книге Евклида*) и весьма изящную книжечку об астрономических гипотезах**). После него гла-

*) Французский перевод: P. Ver Eecke, Брюгге, 1948. Немецкий: P. S. Schönberger, изд. M. Steck (Halle, 1945).

**) P r o k l o s, *Hypotyposis*, изд. и перевод К. Manitius (Лейпциг, 1909).

вой школы были Исидор Александрийский, прозванный Великим, и Дамаский из Дамаска. При Дамаскии в Афины приехал также Симпликий, замечательный комментатор Аристотеля, который сохранил для нас исключительно важные фрагменты из древних философов, а также отрывок из Евдема о гиппократовых луночках. Но в 529 году Афинская школа, последний оплот язычества, была закрыта императором Юстинианом. Симпликий и Дамаский уехали в Персию ко двору царя Хозроя I.

Последним центром греческой культуры был Константинополь. Здесь жили

ИСИДОР МИЛЕТСКИЙ И АНТЕМИЙ ТРАЛЛЬСКИЙ

строители величественной Святой Софии. Они занимались не только архитектурой, но и математикой. Антемий писал о зажигательных стеклах.

Из школы Исидора, вероятно, вышла так называемая «пятнадцатая книга Начал», или во всяком случае последняя часть этой книги, так как ее составитель называет «знаменитого Исидора» своим учителем. Книга эта содержит предложения о правильных многогранниках.

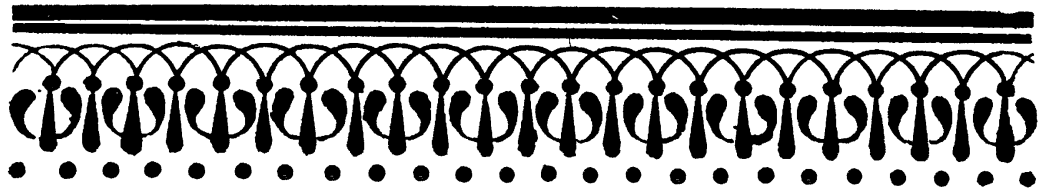
После этих последних вспышек пламя греческой математики погасло, как догоревшая свеча.



Б.Л ВАН.ДЕР ВАРДЕН

ПИФАГОРЕЙСКОЕ
УЧЕНИЕ
О ГАРМОНИИ





Настоящая работа составляет лишь одно звено в ряду исследований о пифагорейской науке. Первая, краткая, заметка в «*Mathematische Annalen*» 118 (1941) рассматривала пифагорейскую алгебру в ее связи с вавилонской алгеброй, а эта вторая работа посвящена теории музыки. Третья статья будет посвящена пифагорейской астрономии и ее значению для древней астрономии; основные ее результаты я представил в журнале «*Himmelswelt*» 51 (1941). В плане стоит работа о пифагорейской арифметике.

Особенно я должен поблагодарить гг. проф. Г. Юнге в Берлине и д-ра Т. Г. Андерхуба в Висбадене за их в высшей степени ценные критические замечания о первом наброске этой работы. Г. д-р Андерхуб дал также перевод трудных фрагментов из «Послесловия к Законам» в 6-м разделе этой статьи*).

1. Введение

«Так называемые пифагорейцы были первые, занимавшиеся науками (*τὰ μαθημᾶτα*). Поскольку в дальнейшем они узнали, что отношения и законы музыкальной гармонии основываются на числах, а также и все остальные [предметы по своей природной сущности тоже, по-видимому, pochodят на числа..., то они высказали мнение, что элементы чисел являются элементами и всех вещей и что весь мир в целом является гармонией и числом».

(Аристотель, *Метафизика* A5,985b).

К философии пифагорейцев существуют три пути. Первый исходит из их метафизики, которую пытаются реконструировать из фрагментов, вроде филолаевских, и разбросанных данных у Аристотеля и доксографов. По этой дороге шли Boeckh, Zeller, Burnet

*) Часто цитируемые издания источников: *Aristoteles, Problemes musicaux*, изд. Gevaert—Vollgraff с комментарием и французским переводом, Гент, 1899. *Aristoxenos, Stoiceia*, изд. Macran, с комментарием и англ. переводом, Оксфорд, 1902. Страницы указываются по изданию Meibom'a, Амстердам, 1652 (в изд. Макрана соответствующие числа даны на полях).

и другие, но она не привела к удовлетворительным общепризнанным результатам. Уж слишком фрагментарны эти краткие заметки, из которых можно получить лишь тезисы, а не общий ход мысли, уж слишком трудны также вопросы об определении подлинности, которые позволили бы отделить пифагорейские, платоновские и неопифагорейские мнения.

Второй путь исходит из религии и морали. Delatte*), Rostagni**) и другие, опираясь на древнейшие свидетельства (Ксенофан, Эпихарм, Эмпедокл), на платоновский «Федон» и Овидиевы «Метаморфозы», а также на многочисленные старопифагорейские фрагменты, реконструировали религиозно-этические учения Пифагора и «акусматиков»; Ростаньи, в частности, коснулся и их метафизики. Но на таком пути можно лишь очень мало узнать о взглядах более математически ориентированных «так называемых пифагорейцев» Аристотеля.

Для усвоения этих взглядов надо по примеру Frank'a***) и прежде всего Tannery***) исходить из точных наук, из которых по Аристотелю исходили также и сами «так называемые пифагорейцы». При помощи древней специальной литературы этого рода надо снова оживить их арифметику и геометрию, их теорию музыки и астрономию. Внутреннее логическое членение этих наук и их связь с неопровержимыми фактами опыта позволяют здесь значительно лучше, чем где-либо в истории философии, выделить ошибки в предании, надежно восполнить пробелы и взаимно разграничить различные исторические слои. Если же восстановить таким образом раз навсегда характер точных наук у пифагорейцев, то, пожалуй, можно будет лучше понять и метафизику этих пифагорейцев и изучить влияние их учений на Платона и его учеников.

Мы будем, таким образом, исходить из специальной научной литературы. (Псевдо?)аристотелевские музыкальные проблемы содержат в высшей степени ценную дискуссию с пифагорейских точек зрения о различных музыкальных вопросах. Евклидово «Sectio canonicis» (выросшее, вероятно, из традиций Академии)

Boethius, *Institutio musica*, изд. Friedlein, Лейпциг, 1867. Немецкий перевод. O. Paul'a, Лейпциг, 1923. Eukleides, *Sectio canonicis*, изд. H. Menge, Euklidis Opera, VIII, Лейпциг, 1923. Франц. перевод Ruelle, Annuaire Assoc. ét. grec., 1884. Nikomachos, *Gaudentius etc.*, изд. Jan, Musici scriptores graeci, Лейпциг, 1895. Страницы указываются по Meibom'y, Амстердам, 1652. Ptolemaios, *Harmonielehre*, изд. Düring, Göteborgs Högskolas Arsskrift, 1930. Немецкий перевод с комментарием Дюринга там же, 1934 (в дальнейшем цитируется как Düring, 1934). Porphyrios, *Kommentar zum Harmonielehre des Ptol.*, изд. Düring, Göteborgs Högsk. Arsskr., 1932. Цитаты даются так, что можно пользоваться любым изданием.

*) A. Delatte, *Etudes sur la litterature pythagoricienne*, Paris, 1915.

**) A. Rostagni, *Il verbo di Pitagora*, Turin, 1924.

***) E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle, 1923.

****) I. Tannery, *Memoires scientifiques*, особенно т. III.

представляет систематический учебник пифагорейской теории музыки*). Наконец, птолемеява теория гармонии дает законченное представление того же самого учения вместе с ценными историческими данными, которые очень хорошо с противоположной стороны восполняются Аристоксеном.

Из этих источников мы познакоимся с течением мыслей у пифагорейцев. Мы исследуем, какую долю в обосновании их теории имеют опыт, рассуждение и эксперимент и проследим за развитием этой теории, начиная от Пифагора через Гиппаса вплоть до «каноников».

Исследование этого исторического развития, которое кратко подытоживается в 9-м разделе этой статьи, и является основной целью этой работы. В частности, можно упомянуть следующие отдельные результаты.

Пифагорейцы нисколько не являются какими-нибудь экспериментирующими естествоиспытателями. Они не исходили из точных измерений натянутых струн, как в этом хочет уверить предание, они просто из ежедневного опыта с духовыми и струнными инструментами нашли числовые отношения для октавы, квинты и кварты (раздел 3). Уже сам Пифагор знал эти числовые отношения и вычислял по ним гаммы (разделы 4 и 7). Позднейшие пифагорейцы, бывшие в первую очередь математиками, обосновали теорию числовых отношений с теоретически-спекулятивной точки зрения, исходя из теории чисел (раздел 2). Только после 300 года «каноники» при помощи измерений на монохорде дали экспериментальное подтверждение основ пифагорейской теории музыки.

Отсюда становится понятным разделение пифагорейцев на две секты — «акусматиков» и «математиков» — на основании внутренней необходимости их мышления. При этом проливается новый свет на образ Гиппаса, главы «математиков» (раздел 5).

Показывается, что в основе упоминаемых Птолемеем трех родов музыкальных тонов у Архита Тарентского лежит деление квинты и кварты на два меньших интервала при помощи гармонической средней. При этом впервые удовлетворительно объясняется темное место в «Послесловии к Законам» (раздел 6).

Диатоническая гамма «каноников», отличающаяся абсолютной чистотой всех квинт и кварт, у более поздних авторов вообще считается пифагорейской; она содержится также во фрагментах Филолая и в платоновском «Тимее». Франк увидел в ней «метафизическое построение Платона, не имеющее ничего общего с действительной музыкой», и вывел отсюда далеко идущие заключения, особенно против подлинности фрагментов Филолая.

*) Ср. T a n n e r y, *Inauthenticité de la division du canon*, Mém. scientif., .III, 213.

В противоположность этому мы покажем, что настройка по чистым квинтам и квартам была в употреблении у музыкантов-практиков, а в древности являлась даже преобладающей. Таким образом, реабилитируется традиция, приписывающая Пифагору установление числовой закономерности этой гаммы (раздел 7). Платон в музыкальной гамме «Тимея» держался древней музыкальной традиции, в то время как Архит больше руководился модой своего времени.

Завершителем пифагорейской теории музыки, а также и астрономии*) мы должны считать Гераклида Понтийского. Насколько мы знаем, он первый рассматривал тон как множество быстро следующих один за другим воздушных толчков и тем самым сделал возможным числовые отношения консонансов (которые им попеременно рассматривались как отношения то натяжений, то длин или скоростей) толковать как отношение частот, подобно тому как мы это делаем и в настоящее время (раздел 8).

2. Теория созвучных интервалов

Греческое понятие о созвучном интервале не совпадает с нашим понятием о консонансе. Два звука образуют созвучный интервал, если при одновременном их появлении они сливаются в единое впечатление. Поэтому созвучными интервалами будут октава, квинта, составленная из октавы и квинты дуодецима, кварта, двойная октава, по Птолемею еще ундецима, по Аристоксену же, кроме того, и другие интервалы, большие двойной октавы, но только не большая и малая терции. Последние, хотя и являются эммелическими, т. е. входят в хорошо звучащие гаммы и мелодии и красиво вместе звучат, но они не сливаются вместе и поэтому называются не симфонными, но диафонными. В этом согласны все наши источники**).

Клавдий Птолемей, выдающийся астроном и теоретик музыки поздней древности, в первой книге своей «Теории гармонии» следующим образом излагает пифагорейскую теорию созвучных интервалов***):

«Ухо признает следующие созвучные интервалы: так называемые кварту и квинту, разность между которыми называется целым тоном, затем октаву, ундециму, дуодециму и двойную октаву.

*) См. приведенную выше мою статью в «Himmelswelt» (51).

**) Так, Аристоксен пишет (*Stoicheia* изд., Мейбома, стр. 20): все меньшие кварты интервалы являются диафоническими. Боэций приводит мнения Никомеха, Евбулида и Гиппаса, которые все признают только 5 созвучных интервалов. Птолемей пишет так же (*Теория гармонии*, 16, стр. 13), что пифагорейцы к созвучным интервалам причислили только пять названных, но только не интервалы вроде 5 : 4 и 5 : 1.

***) Я пользуюсь переводом Дюринга, 1934.

Интервалы большие этих мы для нашей настоящей задачи должны оставить в стороне. Пифагорейская теория из упомянутых интервалов оставляет в стороне также и ундециму в соответствии со своеобразными основными положениями, которые были главами этой школы выставлены из следующих соображений.

Особенно важным исходным пунктом в их методе является то, что равные числа сопоставляются с тонами одинакового напряжения, неравные же — с тонами разного напряжения. Далее они говорят: подобно тому как существуют два основных различия тонов разного напряжения — симфонные и диафонные тона, из которых прекраснейшими являются симфонные, то и среди неравных чисел существуют два главных рода отношений, во-первых, так называемые сверхмерные (*ἐπιμερεῖς*), или как <меньшее> число к <большему> числу, а во-вторых, эпиморные, или же кратные (*πολλὰπλάσιον*)*. Более предпочтительными являются последние, вследствие простоты сравнения, так как для эпиморных чисел избыток является как раз некоторой дробной частью целого, в то время как в кратных отношениях меньшее число содержится в большем.

Поэтому они эпиморные и кратные отношения сравнивают с созвучными интервалами: октаву они выражают как отношение $2 : 1$, квинту — как отношение $3 : 2$, кварту — как отношение $4 : 3$. Это представляет несколько теоретический метод, поскольку он выражает следующее: из созвучных интервалов прекраснейшим является октава, а из числовых отношений лучшим — двукратное, октава, — по той причине, что он ближе всего подходит к равенству напряжений, а двукратное потому, что только при этом отношении избыток является равным первоначальному числу. Затем октава состоит из двух следующих один за другим первых созвучных интервалов — квинты и кварты, а двукратное отношение — из двух первых эпиморных, а именно $3 : 2$ и $4 : 3$. Поскольку отношение $3 : 2$ больше $4 : 3$, то, следовательно, квинта будет больше кварты, так что их разность или целый тон стоит в отношении $9 : 8$; именно настолько отношение $3 : 2$ превосходит $4 : 3$. В соответствии с этим они причисляли к созвучным интервалам также дуодециму и двойную октаву, так как последняя соответствует отношению $4 : 1$, а первая — $3 : 1$. Ундециму же они не причисляли к созвучным интервалам, так как этот интервал соответствует отношению $8 : 3$, которое не является ни эпиморным, ни кратным.

*) Две величины находятся в кратном отношении (например, $2 : 1$ или $3 : 1$), если большая является кратной меньшей, а меньшая, таким образом, частью большей. Они находятся в эпиморном отношении (например, $3 : 2$, или $4 : 3$), если большая величина превышает меньшую на некоторую часть меньшей.

В соответствии с этим они добились тех же самых результатов при помощи следующего более геометрического способа. Представим себе некоторую квинту AB и, кроме того, еще новую квинту BC , так что AC будет двойной квинтой. Поскольку двойная квинта не является созвучной, то и AC не будет стоять в двойном отношении, поэтому и AB не будет в кратном отношении, но она является созвучным интервалом: следовательно, квинта соответствует эпиморфному отношению. Подобным же образом они доказывают, что кварта, которая меньше квинты, тоже соответствует эпиморфному отношению. Теперь, говорят они, представим себе октаву AB и затем еще одну октаву BC , так что AC будет некоторой двойной октавой. Так как двойная октава будет созвучной, то AC будет соответствовать или эпиморфному, или же кратному отношению. Но этот интервал не может соответствовать эпиморфному отношению, ибо тогда его нельзя было бы разделить пополам; следовательно, AC , а значит и AB , будут соответствовать кратному отношению; таким образом, октава будет иметь кратное отношение.

Отсюда они выводят очевидное заключение, что октава соответствует отношению $2 : 1$, квинта — отношению $3 : 2$ и кварта — отношению $4 : 3$.

Мы имеем все основания полагать, что относительно пифагорейской теории музыки Птолемей имел сведения из лучших научных источников. Хотя он критикует данное пифагорейцами обоснование, его изложение является логическим и лишенным противоречий, совершенно противоположно спорным филолаевским фрагментам. Он также не рассказывает никаких мифов о Пифагоре, как это охотно делают его современники, но в качестве наиболее выдающегося теоретика музыки он называет старшего современника Платона, а именно Архита Тарентского, относительно системы интервалов которого он кажется хорошо осведомленным. Вторым признаком подлинности является то, что система интервалов Архита отличается от принятой в Платоновом «Тимее». Наконец, следует еще упомянуть, что его изложение второго «более геометрического» способа обоснования точно совпадает с почти на пятьсот лет более старшим «*Sectio canonis*».

В вышеприведенном изложении Птолемея упоминаются два способа обоснования. Первый, более первоначальный, исходит из следующих четырех постулатов:

1. Тона приведены в соответствие с числами, причем тонам одинаковой высоты соответствуют равные числа, тонам разной высоты — неравные числа.
2. Равным интервалам соответствуют при этом равные отношения чисел.
3. Созвучным интервалам соответствуют эпиморфные отношения $(n+1) : n$ или кратные $n : 1$ (обратного требования не выставляется).

4. Октаве, ближе всего подходящей к равнозвучию, соответствует отношение $2 : 1$, ближе всего подходящее к равенству.

Так как октава составляется из квинты и кварты, которые являются созвучными, и так как отношение $2 : 1$ может быть только одним способом составлено из двух кратных или эпиморных отношений, а именно:

$$2 : 1 = (3 : 2) \cdot (4 : 3),$$

так как, далее, квинта будет больше кварты и, с другой стороны, $3 : 2$ больше, чем $4 : 3$, то, следовательно, квинте может соответствовать лишь отношение $3 : 2$, а кварте — лишь отношение $4 : 3$. Для их разности, целого тона, остается лишь отношение $9 : 8$.

Второй способ обоснования, изложенный у Птолемея кратко, а в «*Sectio canonis*» более подробно, опускает постулат 4 и пытается вывести этот постулат из трех первых при помощи установленного опытом факта, что двойные квинта и кварта не являются созвучными, в то время как двойная октава будет созвучной. Доказательство содержит замечательную логическую ошибку, на которую обратил внимание уже Таннери*). «Так как двойная квинта не является созвучной», то отсюда заключается, что «она не находится в кратном отношении». Однако это заключение покоится не на постулате 3, а на его обращении: все кратные или эпиморные отношения будут созвучными. Но это нелепость: по свидетельству Птолемея (I,6) также и пифагорейцы не считали созвучными интервалы $5 : 1$ и $5 : 4$.

Кроме того, доказательство основывается на следующих трех положениях теории чисел:

I. Кратное отношение, будучи удвоено (т. е., по современному способу выражения, возведено в квадрат), дает снова кратное отношение.

II. Если числовое отношение после удвоения дает кратное отношение, то оно само будет кратным.

III. Между двумя числами, стоящими в эпиморном отношении, нельзя найти ни одной, ни нескольких средних пропорциональных.

Из этих предложений I является самоочевидным, а II равносильно предложению VIII, 7 «Начал» Евклида. Предложение III приписывается Боэцием Архиту. Приводимое Боэцием доказательство Архита, согласно Таннери**), во всех существенных пунктах совпадает с доказательством в «*Sectio*». Оно основывается на предложении VIII, 8 Евклида: если между двумя числами можно вставить другие числа в непрерывной пропорции, то такое же

*) Соответствующее место у Таннери (Mém. Sc., III, 215) содержит, к сожалению, опечатку. Надо читать так: La proposition 11 (вместо II) contient un paralogisme: au lieu d'un postulat posé dans la préambule, on invoque la réciproque de ce postulat, laquelle est absolument déraisonnable.

**) P. T a n n e r y, Mém. Sc., III, 247.

количество чисел в непрерывной пропорции можно вставить между двумя любыми числами, имеющими то же самое отношение, и, значит, в частности, между наименьшими числами, имеющими равное отношение.

Совпадение хода мыслей в доказательстве, приведенном Боэцием, с ходом мыслей в доказательстве «*Sectio canonis*» показывает, что Боэций заимствовал его из хорошего специального научного источника. Поэтому мы можем верить и его свидетельству, что данное предложение и доказательство восходят к Архиту. Но отсюда получаются два важных следствия.

Во-первых, Архит предполагает уже известной теорему VIII, 7, хотя она ничуть не является самоочевидной. Отсюда следует, что тогда уже существовала теория чисел, обнимавшая большую часть VII и VIII книг Евклида*). Это подтверждается некоторыми местами из Платона. Таким образом, можно реконструировать ценный отрывок из пифагорейской арифметики**).

Во-вторых же, следует, что поскольку изложенное Евклидом и Птолемеем теоретико-числовое обоснование учения о созвучных интервалах существенным образом предполагает теорему III Архита, то это обоснование следует приписать или самому Архиту, или же считать, что оно было найдено после него. Однако Птолемей выразительно приписывает его пифагорейцам. Следовательно, под этими пифагорейцами нельзя подразумевать более древних, но только современников самого Архита. Точно так же, между предложениями I, II, III и их музыкально-теоретическими приложениями имеется такая тесная связь по существу, что, пожалуй, приходится приписать их одному и тому же автору, или по крайней мере одной и той же группе математиков. Предложения I, II, III, по видимому, были выставлены только ради их музыкальных приложений. Поэтому мы не слишком ошибемся, если это второе теоретико-числовое обоснование пифагорейского учения о гармонии припишем Архиту Тарентскому. С этим согласно также и высказывание Птолемея, что Архит является самым выдающимся из пифагорейских теоретиков музыки.

3. Опыт, теория и эксперимент

Каким образом дошли пифагорейцы до мысли представлять тона числами и музыкальные интервалы — отношениями чисел? На эту тему имеется прекрасная история у Никомаха (Meibom, стр. 10), Гауденция (Meibom, стр. 13) и Боэция (Friedlein, стр. 10—11), которая, однако, никак не может быть истинной. В ней рас-

*) P. Tannery, *Mém. Sc.*, III, 244.

**) Ср. K. Reidemeister, *Die Arithmetik der Griechen*, Leipzig, 1939, стр. 27.

сказывается, что Пифагор, проходя мимо кузницы, в тонах падающих молотов слышал интервалы в кварту, квинту и октаву. При помощи точного взвешивания он установил, что веса молотов стояли друг к другу в отношениях чисел 12, 9, 8, и 6. После этого он пошел домой, четыре одинаковых вертикально подвешенных струны нагрузил тяжестями, пропорциональными этим числам, и установил, что струна, несшая 12 единиц груза, звучала на одну октаву выше струны с 6 единицами, а струны, нагруженные 9 и 8 единицами, давали с последней интервалы в квинту и кварту. Сделанные им наблюдения он подтвердил опытами на монохордах и других инструментах (флейты, сиринги и т. д.).

Другие источники говорят главным образом о наблюдениях на монохорде. Диоген Лаэций называет Пифагора его изобретателем (кн. VIII, 12). Более подробный отчет имеется у Гауденция: «Он натянул струну на линейку и разделил ее на 12 частей. После этого он заставил звучать сначала всю струну, а затем ее половину, т. е. 6 частей, и нашел, что вся струна была в консонансе со своей половиной, причем музыкальный интервал представлял октаву. После того же как он заставил сначала звучать всю струну, а затем $\frac{3}{4}$ ее, он услышал консонанс кварты, и аналогично для квинты. У Аристиды Квинталиана говорится (Meibom, стр. 116, перев. R. Schäfer, Лейпциг, 1937): «Поэтому, как говорят, Пифагор, готовясь расстаться с этой земной жизнью, постарался внушить своим ученикам, чтобы они играли на монохорде (μονοχορδίῳ)».

В этих последних рассказах, возможно, имеется доля истины*). Рассказанная же первой история вполне вымышлена, так как данные в ней сведения относительно весов молотов и натяжений струн являются физически невозможными. Числа колебаний тонов двух во всех отношениях одинаковых струн пропорциональны не напряжениям, а их квадратам; но, по-видимому, никто из древних этого не знал.

Несколько больше доверия заслуживает рассказ у Теона Смирнского, что Лас из Гермियोны**) и люди из кружка пифаго-

*) Монохорд Пифагора был, вероятно, чем-то вроде гитары (παυδοῦρος или παυδοῦρα), струны которой укорачивались от нажима пальца. Согласно Рейнаку (Rev. ét. gr., 1895, стр. 371) в архаическое время такие инструменты были очень распространены. По Никомаху (Meib., стр. 8) монохорд в просторечии назывался «пандурос», а у пифагорейцев — «канон». По Поллуксу же пандура была трехструнной. Эти противоречия еще раз показывают, что на известия позднейших авторов полагаться никак нельзя. На античных изображениях гитар у Рейнака (в. с.), к сожалению, число струн установить невозможно.

**) Лас из Гермियोны, по «Свиде», первый писатель по теории музыки, учил в Афинах около 500 до н. э. Он принадлежит к числу наиболее знаменитых композиторов: он расширил музыкальную гамму у флейт (auloi) и создал новый аттический дифирамб. Программу его учебного курса мы знаем через Марциана Капеллу (ср. Gevaert, Histoire, 1, стр. 70). Из его теорий сохранилось лишь изречение, что тона обладают шириной (Aristoxenos, Stoiceia, 322).

рейца Гиппаса Метапонтского установили числовые отношения консонансов из наблюдений над звучанием полных и наполовину пустых сосудов. По рассказу Теона (изд. Hiller, стр. 59), они взяли два сосуда: «один пустой, а другой наполовину наполненный», затем ударили по ним и получили консонанс в октаву; аналогично они получили кварту и квинту. Во всяком случае для удара это не подходит: для получения вышеупомянутых консонансов надо заставить звучать находящийся в сосудах воздух. При ударе получаются интервалы гораздо меньше, чем октава, кварта и квинта.

Наконец, совершенно бессмысленным является сообщенный в схолии к «Федону» (Diels, *Vorsokratiker*, Hippasus A12) со ссылкой на Аристоксена и Никокла опыт Гиппаса, который заставил звучать четыре бронзовых диска одинакового диаметра, но разной толщины (второй в $1\frac{1}{3}$ раза толще первого, третий в $1\frac{1}{2}$ и четвертый в 2 раза) и при этом должен был услышать консонансы.

Мы чувствуем более твердую почву под ногами, обращаясь к специальной литературе. Привлечем в первую очередь «Музыкальные проблемы» Аристотеля.

Подлинность этих «проблем» оспаривается, но даже защитники неподлинности держатся мнения, что музыкальные части «вполне достойны великого философа» и что «все проблемы исходят из его учения»^{*)}. Согласно Прантлю^{**)} эти проблемы были собраны поколением перипатетиков, непосредственно следовавшим за Теофрастом. Однако музыкальную терминологию Gevaert—Vollgraff считают принадлежащей доаристоксеновскому периоду. Таким образом, мы совершенно спокойно можем использовать «Проблемы» как источник для теории музыки в исходе 4-го века.

Составитель «Проблем» принадлежит к пифагорейскому направлению; это становится ясным с самого начала сочинения. Для октавы, квинты и кварты он везде кладет в основу числовые отношения 2 : 1, 3 : 2 и 4 : 3 и истолковывает их вместе с Архитом как отношения скоростей^{***)}. Более высокому тону всегда соответствует большее число. Для эмпирического обоснования упомянутых числовых отношений в проблемах 23 и 50 привлекается целый ряд установленных опытом фактов.

Проблема 23. «... Если ущипнуть половину струны, то она будет звучать в октаву со всей струной. Точно так же и у сиринг: через дырочку в середине сиринги получается октава для тона целой сиринги. На флейтах октава получается при помощи удвоения расстояния, и так поступают все делители духо-

^{*)} Jan, *Pseudo-Aristotelis de rebus musicis problemata*, Leipzig, 1895.

^{**)} Prantl, *Abh. Akad. München VI* (1850), стр. 341.

^{***)} См., например, проблему 35b (Gevaert—Vollgraff, стр. 6) и 50 (стр. 10).

вых инструментов... Точно так же квинту они получают, увеличивая расстояние на половину, а кварту — на одну треть. На треугольном струнном инструменте (арфа) одинаково натянутые струны дают октаву, если одна из них вдвое длиннее другой».

Проблема 50 (стр. 10). «Почему звучания двух равных и подобных сосудов, из которых один пуст, а другой наполовину полный, дают консонанс октавы? Потому ли, что тон пустого сосуда находится в двойном отношении к тону наполовину пустого? Не так ли дело обстоит и у сиринг? Следует именно принять, что более быстрое движение всегда соответствует более высокому (тону); в большем же объеме воздух более медленно доходит (до стенок), во вдвое большем — вдвое медленнее*) и соответственно и в других случаях».

Упомянутые здесь наблюдения над музыкальными инструментами доступны каждому музыканту-практику и в полном ходу у изготовителей музыкальных инструментов, как это уже указывается в проблеме 23. Таким образом, без дальнейших колебаний можно принять, что пифагорейцы первоначально пришли к числовым отношениям для октавы, квинты и кварты, исходя из подобных наблюдений. Я полагаю, что в этом заключается зерно истины в первоначально приведенных рассказах о Пифагоре и Гиппасе.

Если это верно, то пифагорейцы исходили первоначально из повседневного опыта. Затем они увидели, что этот опыт дает слишком ненадежную почву для построения точной науки о числах и интервалах. Чтобы получить на флейте октаву для данного тона, нужно примерно удвоить длину звучащего воздушного столба, но не совершенно точно, поскольку необходимы еще небольшие поправки, зависящие от величины дырочек и приспособлений для вдувания. В случае струн трудно сделать одинаковыми толщину и натяжение. Если бы в действительности кто-нибудь попробовал производить точные измерения числовых отношений при помощи подвешивания грузов, как это передается относительно Пифагора, то при этом понадобилось бы учесть новую неудачу, так как грузы для интервала в октаву относятся не как $1 : 2$, но как $1 : \sqrt{2}$. Собственно говоря, точные измерения возможны лишь при помощи «канона»: монохорда, снабженного мерной линейкой и передвижной подставочкой, как он описан у Птолемея в кн. I, 8; но подобное измерительное приспособление, по-видимому, относится к более позднему времени. Уже сами пифагорейцы очень скоро почувствовали необходимость освободиться от данных опыта и, как говорит Птолемей, дать «более теоретическое» (λογικώτερον)

*) К удивительному мнению относительно физической сущности и происхождения тонов, проявляющемуся в последней фразе, мы еще вернемся в разделе 8.

обоснование, именно то, с которым мы познакомились в разделе 2. Это обоснование заимствует из опытных данных только тот факт, что музыкальные тона можно вообще измерять числами; в остальном же это обоснование развивается чисто *спекулятивно*, принимая, что консонантные интервалы могут соответствовать только эпиморфным или кратным отношениям или что октава — самый прекрасный интервал — должна соответствовать простейшему после равенства числовому отношению $2 : 1$. Все остальное выводится из этих немногочисленных основных положений.

Каким образом эмпирически измеряют тона числами — представляет для этих пифагорейцев второстепенный вопрос, насчет которого можно держаться различных мнений. И действительно, у различных авторов мы находим различные формы установления соответствия: у одних более высоким тонам соответствуют и большие числа, у других, — наоборот, меньшие. Платон в «Тимее», по-видимому, считает, что более высоким тонам соответствуют меньшие числа, подобно тому что имеет место для длин струн; Аристотель, напротив, в фрагменте, о котором мы еще будем позднее говорить, для четырех постоянных струн лиры (гипата, меса, парамеса и трита) дал соответствие с числовым рядом 6, 8, 9, 12. Последняя форма соответствия у Никомаха приписывается самому Пифагору, и Никомах, который часто возвращается к древнепифагорейскому преданию, приводит в других местах более высокие тона в соответствие с большими числами. Удивительно колеблющееся положение занимает точка зрения «*Sectio canonis*». В то время как во введении говорится, что два тона находятся между собой в числовом отношении по той причине, что тона представляют некоторые множественности, которые при повышении тона увеличиваются, при понижении уменьшаются, в главной части тона изображаются отрезками и при этом более высокие тона — более короткими отрезками.

То, что числовые отношения консонантных интервалов эмпирически определялись совершенно различными способами, свидетельствует также Теон Смирнский (стр. 59 Hiller): «Одни хотели <числовые отношения> консонансов выражать в грузах, другие — в величинах, третьи — в движениях и, наконец, еще одни — в сосудах». После этого у Теона идет уже цитированный рассказ об опытах Ласа с сосудами, а затем он продолжает так:

«Однако последователи Евдокса и Архита были согласны в том, что гармонические созвучия можно выражать числами, что соответствующие отношения определяются при помощи движений и что более быстрому движению соответствует и более высокий тон, так как оно бьет непрерывно и быстрее толкает воздух, а медленному движению соответствует более низкий тон, ибо оно более инертно».

Это опять совпадает с уже известным нам фрагментом Архита: «Сначала они^{*)} рассудили, что звук не может никак возникнуть, если не имеет места взаимный удар тел. Из поражающих наши чувства ⟨звуков⟩ те, которые приходят к нам от удара быстро и сильно, кажутся высокими, а медленно и слабо — низкими. Ибо если взять прут и двигать его медленно и слабо, то от удара получится низкий звук, если двигать его быстро и сильно, то высокий... Получающийся при сильном выдыхании тон будет звучать сильно и высоко, а при слабом выдыхании, — наоборот, слабо и низко. Мы можем, однако, видеть это на таком сильнейшем примере, что один и тот же человек с громким^{**)} голосом может быть нами услышан даже издали, а с тихим^{**)}, — наоборот, не слышен даже и вблизи. Так же, однако, и у флейты: если воздух, вытолкнутый изо рта, ринется в дырочку, ближе расположенную ко рту, то вследствие сильного давления получится более высокий звук, а если в более удаленную, то, наоборот, более тихий. Отсюда ясно получается, что быстрое движение делает звук высоким, а медленное — низким. То же самое как раз происходит и с колеблемыми во время мистерий трещотками (Waldteufeln): если качать их медленнее, то они издают низкий звук, а если сильно, то высокий. Так же и тростинка будет издавать низкий звук, если закупорить ее нижнее отверстие и дуть в нее; если же производить вдупание в ее половину или какую-нибудь другую часть по желанию, то она будет издавать высокий звук. Ибо тот же самый воздух медленно течет через вытянутый объем и быстро — через более короткий... Таким образом, из многих примеров выясняется, что высокие тона движутся быстрее, а низкие медленнее».

Замечательно, что в этом фрагменте скорость или сила вызывающего звук движения не вполне отчетливо отличается от скорости, с которой звук достигает наших ушей. Ошибочное мнение, что более высокие тона распространяются быстрее, находится не только у Архита, но так же и у Платона («Тимей», 80а), который в своих физических воззрениях в сильной степени зависит от Архита.

Ясно, что те, которые хотели рассматривать числовые отношения как отношения весов или скоростей, должны были более высокий тон приводить в соответствие с большим числом, другие же — наоборот. Для теоретического вывода числовых отношений консонансов безразлично, какую из двух систем соответствия выбрать.

Из вышеприведенного совершенно недвусмысленно получается, что никоим образом не может быть сохранено мнение, встречаю-

^{*)} Ученые: *οἱ περὶ τὰ μαθηματά*.

^{**)} Пожалуй, эти слова следует соответственно понимать как «высокий» и «низкий», в противном случае мы получили бы ничего не доказывающую плоскость.

щееся, например, у Целлера, согласно которому числовые отношения консонансов получены пифагорейцами исключительно из наблюдений с длинами струн. Если бы оно было правильно, то более высокому тону всегда соответствовало бы меньшее число. По мнениям пифагорейцев, числовые отношения иногда являлись отношениями длин струн или духовых инструментов, иногда же отношениями натяжений или скоростей, причем правильные и сложные воззрения перемежались друг с другом. Числовое отношение как $2 : 1$ у пифагорейцев не только результат измерения, но и выражение внутренней сущности интервала в октаву. По их мнению, эта внутренняя сущность будет всегда обнаруживаться, когда мы каким-нибудь образом будем выражать тона при помощи сравнимых чисел, причем совершенно безразлично, будут ли эти числа представлять длины, веса или скорости. И если опыт не будет это подтверждать (как, например, в случае нагрузок), то можно как раз сослаться на несовершенство эмпирии (ср. П т о л е м е й, I, 8: «В случае струн с подвешенными грузами трудно будет удерживать совершенно неизменными их свойства; ведь и так уже трудно найти две совершенно по своей природе одинаковых струны... Даже более того, если бы кто-нибудь счел это возможным и длины струн были одинаковы, то большая нагрузка в результате более сильного напряжения сделала бы более длинной и одновременно более плотной струну, несущую эту нагрузку»).

Эта характерная черта — более доверять теоретическим рассуждениям, чем опыту, — вполне гармонирует со всей сущностью пифагореизма; Аристотель неоднократно упрекает их в том, что они исходят из предвзятых мнений и производят насилие над опытом (например, «О небе», II, 3, 293 а). Совершенно неправильно делать из пифагорейцев экспериментирующих естествоиспытателей в современном смысле слова, как это делает Франк*).

Так как в этом случае дело идет о принципиально важном пункте, то мы приведем еще одно место из Аристоксена, из которого совершенно ясно вытекает, что пифагорейцы не исходили из точных измерений, но отклоняли, как неточные, чувственные восприятия и охотнее доверялись теоретическим рассуждениям. Аристоксен оспаривает пифагорейское учение в следующих словах:

«Мы стараемся давать доказательства в согласии с явлениями, в противоположность предшествовавшим нам теоретикам. Они вносят в рассмотрение вещей совершенно чуждые точки зрения

*) Е. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, стр. 172. Франк в первую очередь ссылается на одно место у Платона, о котором мы еще будем говорить, а затем также и на Аристотеля, у которого Франк вычитывает, «что италики со своими понятиями и теориями относятся только к природе и признают действительным только то, что можно будет воспринять при помощи чувств». Если посмотреть цитируемое место («Метафизика», кн. 1, 8, 989b, 29 и сл.), то там стоит нечто совершенно другое.

и отклоняют чувственные восприятия как неточные; для этого они придумывают чисто умственные причины и утверждают, что высота или низкость тона покоятся на определенных соотношениях между числами и скоростями. Все это рассуждение совершенно чуждо существу дела и совершенно противоположно явлениям! Другие же совершенно отказываются от всяких обоснований и доказательств и возвещают свои утверждения как изречения оракулов, тоже не рассматривая как следует природных явлений».

Только одно место у Платона («Государство», 530 E), которое Франк подверг точному анализу, как будто противоречит на первый взгляд нашему представлению. Там о пифагорейцах говорится: «взаимно измеряющие (*ἀναμετρούμετες*), действительно слышимые консонансы и тона». Во всяком случае в этом месте не стоит, что они взаимно измеряют *длины струн*, но только лишь тона и консонансы. Как же можно взаимно измерять тона и консонансы, т. е. также и интервалы? Ну, хотя бы при помощи операции попеременного вычитания (*ἀνταναίρεσις* или *ἀνθυφαίρεσις*), которая для чисел изложена у Евклида в предложении VII, 1, а для отрезков — в предложении XI*). Будем, например, исходить из двух интервалов октавы и квинты и вычтем меньший интервал из большего, тогда останется кварта, которая меньше квинты. Если мы вычтем и ее из квинты, то в остатке получится целый тон. Его можно вычесть два раза из кварты; то, что останется, представляет «леймму» (256 : 243) — малый полутон. Если мы вычтем леймму из целого тона, то останется «аптома» — большой полутон. Избыток апотомы над лейммой будет так называемая «комма» пифагорейцев. Как раз это попеременное вычитание описано в двух известных фрагментах Филолая**).

Так мы получаем одно из возможных толкований платоновского выражения «измерение интервалов», которое хорошо подходит к более древним пифагорейским представлениям. Возможно также, что под «измерением членов и интервалов» Платон просто подразумевает их представление при помощи чисел и числовых отношений. Во всяком случае это место у Платона не доказывает, что пифагорейцы производили точные измерения длин струн.

*) Ср. об этом O. Becker, *Eudoxos-Studien I*, Quellen u. Studien Gesch. Math., B 2, стр. 311 и сл.

**) Diels, *Vorsokratiker*, *Philolaos* B6 и A26. Ср. Boeckh, *Philolaos*, Berlin, 1819, и, прежде всего, Tanneguy, *Mém. Sc.*, III, 220—224. Относительно мнения Бекха, что «гармония у Филолая представляет не что иное, как октаву», следует заметить, что *ἀρμονία* у Филолая, а также и вообще в греческой теории музыки означает «гамму». Поэтому первая фраза филолаевского фрагмента выражает следующее: «Гамма имеет размер кварты и квинты». Конечно, гамма в таком случае будет совпадать по размеру с октавой, но из этого еще не следует, что слово «гамма» будет синонимом «октавы».

Я не могу сказать, когда именно перешли к таким измерениям на «каноне»; во всяком случае это было после Аристоксена, т. е. самое раннее около 300 года. О таких опытах совершенно молчит богатая литература по теории музыки в 4-м веке; о «каноне» не упоминают ни Архит, и Филолай, ни Платон и Аристотель, ни Гераклид Понтийский и Аристоксен.

В аристотелевых «Проблемах музыки» очень подробно собраны опыты, приводящие к числовым отношениям для консонансов, но слово «канон» ни разу не встречается во всем произведении. В «*Sectio canonis*» как раз даются обоснования для этих числовых отношений, не упоминая при этом о каноне. Только два последних предложения «*Sectio*» говорят о делении канона, но Таннери показал, что оба эти предложения представляют позднейшие добавления. Именно, они противоречат двум непосредственно им предшествующим предложениям; первые касаются энгармонической тональности, а оба последних — диатонической.

Таким образом, история пифагорейской теории музыки вполне соответствует естественному развитию любой науки о природе: она исходит из повседневного *опыта*, устанавливает *теории* для объяснения опыта и, наконец, проверяет эти теории при помощи особых, приспособленных к этому *экспериментов*. Пифагорейская теория музыки, как и все одновременно с ней возникшие физические теории (атомизм представляет типический пример), выросла не на почве точных экспериментов; для этого время еще не созрело. Аристотелевы теории падения и бросания должны были бы сразу отпасть, если бы их попытались проверить при помощи экспериментов с падающими и брошенными телами. Только физик Стратон из Лампсака производил разнообразные физические эксперименты, и к этому времени (начало 3-го века) я мог бы отнести и изобретение «канона» (точнее говоря, усовершенствование старого монохорда до ранга точного измерительного инструмента).

Мне кажется даже, что можно указать повод для этого — критику Аристоксена. Аристоксен упрекал пифагорейцев за «рассуждения, совершенно чуждые существу дела и совершенно противоположные явлениям». Напротив, «идущие от математики люди», как их называет Порфирий*), показали при помощи канона, что сами явления природы ведут к числовым отношениям консонансов. Шкала «каноников» установила точные предписания для деления канона по различным тональностям, которые мы находим у Евклида, Теона Смирнского, Аристида Квинтилиана, Боэция и других**).

*) Порфирий 66₂₃ (Дюринг). Несколько строками ниже он называет их «канониками».

**) Сводка у S. W a n t z l o e b e n, *Das Monochord*, Halle, 1911.

4. Пифагор и тетрада

Традиция, восходящая по крайней мере к 4-му веку, приписывает открытие числовых отношений для октавы, квинты и кварты самому Пифагору*), и в этом случае нет оснований сомневаться в справедливости этого приписывания. Действительно, все теоретические положения, связанные теснейшим образом с этими числами, наверняка являются древнепифагорейскими.

На первом месте следует поставить знаменитую тетраду. Делатт, посвятивший ей исчерпывающее исследование**), удачно определяет ее как «совокупность четырех чисел, отношения которых определяют основные музыкальные интервалы». По большей части это будут числа 1, 2, 3, 4, но иногда также и 6, 8, 9, 12. Древнепифагорейская формула клятвы: «Нет, я клянусь тем, кто доверил нашей душе тетраду, в которой лежит источник и корень вечной природы», показывает, что пифагорейцы почитали тетраду как священное предание самого учителя. Правда, формула клятвы составлена на дорийском диалекте, языке пифагорейских «математиков», и можно было бы с некоторым основанием думать, не принадлежит ли эта тетрада упомянутым математикам, а ее приписывание Пифагору является позднейшей выдумкой. Но среди собранных Аристотелем изречений, восходящих к другой секте, «акусматикам», находится формула***): «Что такое дельфийский оракул? Тетрада! Ведь она — гамма, по которой поют сирены»; эта формула показывает, что акусматики также знали тетраду и ее связь с теорией гармонии.

Таким образом, мы имеем все основания приписать самому Пифагору познание гармонических числовых отношений. Восходит ли это в конечном счете к вавилонским источникам****), я судить не могу, так как я не знаю ни одного относящегося к музыке клинописного текста. Однако это, пожалуй, вполне возможно, ибо в математике и астрономии, для которых клинописные тексты имеются, все более и более становится ясным, как много существенных вещей пифагорейцы узнали от «халдеев».

Тетрада непосредственно показывает, каким образом нужно комбинировать числовые отношения при составлении из этих интервалов более крупных. Именно, $3 : 2$ представляет числовое отношение для квинты, $4 : 3$ — для кварты, а $4 : 2$ — для октавы,

*) Ксенократ у Порфирия (см. Ptolem, *Harmon.*) (ср. раздел 8), Диоген Лаэртский (VIII, 12), Прокл в «Комментарии к Тимею», II, стр. 174.

**) A. Delatte, *Etudes sur la littérature pythagoricienne*, стр. 244.

***) A. Delatte, loc. cit. 259. Буквально: τί ἐστὶ τὸ ἐν Δελφοῖς μαντεῖον; τετραχὺς ὅτι ἐστὶν ἡ ἀρμονία ἐν ἣ αἱ Σειρήνες.

****) Ямвлих в своей «Жизни Пифагора» рассказывает (гл. 4), что Пифагор выучился в Вавилоне у магов теории чисел, теории музыки и другим наукам. См. также подстрочное примечание к пропорции $A : M = M : B$ в разделе 6.

слагающейся из квинты и кварты. В современном обозначении для этого нужно перемножить дроби $1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$, но греки говорили о «сложном» отношении ($\sigmaυχαιμενος λόγος$). Этот способ сложения отношений настолько элементарен и очевиден, что я не могу понять, по какой причине Франк (*Plato und die sogenannten Pythagoreer*, стр. 158—161) не хочет принять ясного суждения об этой связи раньше времени Архита и Евдокса. Пифагорейская арифметика (которую, как мы видели в разделе 2, Архит уже нашел в готовом виде) предполагает само собой разумеющимся понятие о «сложении» числовых отношений (ср. Евклид, *Начала*, кн. VIII, предл. 5, 11, 12, 18, 19). Я не колеблюсь ни минуты приписать знание этого также и самому Пифагору; ведь он, по свидетельствам Аристотеля и Аристоксена (Diels, *Vorsokratiker*, *Pythagoras*, A7 и *Pythagoräische Schule*, B2), должен был серьезно заниматься арифметикой.

Обратная сложению операция будет вычитание интервалов. Если струне *Nutate meson* соответствует число 6, то *Mese* нужно отнести число 8, а *Parameze* — число 9; тогда интервалу в целый тон будет соответствовать отношение 9 : 8. И это соображение, которое даже не предполагает понятия гармонической средней, никак нельзя признать слишком высоким для времени Пифагора, и действительно, как мы видели выше, Никомах приписывает Пифагору отнесение чисел 6, 8, 9 к вышеупомянутым струнам.

Тем самым мы восстановили в основных чертах учение самого Пифагора о гармонических числовых отношениях. Мы не знаем, излагал ли он свои учения только в форме изречений оракула или же указывал при этом также и на опыты со струнными и духовыми инструментами. Изложенное в разделе 2 теоретическое обоснование, которое давали пифагорейцы до Архита, исходящее из разделения отношений на кратные, сверхмерные и эпиморные, пожалуй, развилось постепенно в течение занятий пифагорейской школы: оно уже является частью систематической науки и не очень хорошо подходит к стилю оракула у Пифагора, как мы представляем его на основании современных свидетельств (Гераклит, *Эмпедокл**).

Теперь мы переходим к исследованию дальнейшего развития этой теории после Пифагора.

5. «Математик» Гиппас

Мы знаем, что во времена Аристотеля существовали две пифагорейские секты, которые обе утверждали, что представляют

*) Вместо «Эмпедокла» автор, вероятно, хотел сказать «Ксенофан». (Прим. перев.)

истинное и собственное учение Пифагора*). «Акусматики» видели основу этого учения в «Akusmata» — изречениях, которые они возводили к откровению божественного Пифагора, и точно придерживались в жизни содержащихся в них предписаний. Напротив, «математики» считали важнейшим дальнейшее развитие наук. Они не так строго, как акусматики, придерживались обета молчания и других предписаний, но склонялись к символической интерпретации этих предписаний. Математики признавали акусматиков правоверными пифагорейцами, но акусматики рассматривали математиков как отступников. Это отступничество они возводили к Гиппасу, который первый нарушил обет молчания. Также и математики признавали, что Гиппас принадлежал к их среде и нарушил обет молчания: именно, он выдал способ построения додекаэдра в сфере и поэтому погиб во время кораблекрушения (эта легенда существует во многих вариантах).

Мне кажется, что разделение пифагорейцев после смерти Пифагора обуславливалось внутренней необходимостью. Действительно, если рассматривать божественное откровение Пифагора как источник преподанной Пифагором мудрости относительно чисел, гармонии и звезд, то нет никакого смысла умножать эту мудрость собственными исследованиями. С другой стороны, можно считать вполне серьезным заявление самого Пифагора, что он является не мудрецом, а только искателем мудрости, и посвятил себя также исследовательской работе. Но тогда необходимо прийти к тому, чтобы при помощи собственного мышления выйти за пределы учения наставника и разум как верховного судью в делах науки поставить выше откровения. Наука не может удовольствоваться каким-нибудь $\alpha\upsilon\tau\omicron\varsigma\ \acute{\epsilon}\phi\alpha$ **) в качестве обоснования. И кто серьезно занимается научными исследованиями, неминуемо приходит в конфликт с обетом молчания, ибо он должен завязать сношения с исследователями из других школ, он должен познакомиться с полученными у них результатами и при этом уже не может замалчивать свои собственные.

Для самого Пифагора такой конфликт между верой и философией еще не существовал. Он искал истину «всеми силами своего духа», приближался этим к богам и все им найденное преподавал своим приверженцам в качестве божественного откровения. Но среди его учеников раскол должен был произойти немедленно. По преданиям обеих сект первым настоящим пифагорейским математиком был как раз тот самый Гиппас, который необходимо должен был вступить в конфликт с правоверными традиционалистами, как только он осмелился выйти за пределы учения Пифагора

*) Я м в л и х, *Vita Pythagor.*, XVIII и, прежде всего, A. D'elatte, *Etudes sur la littérature pythagoricienne*, стр. 271—274.

**) «Сам сказал», т. е. учением самого Пифагора. (Прим. перев.)

в геометрии (додекаэдр), арифметике (гармоническая средняя), теории музыки (созвучные интервалы, опыты со звучащими сосудами), космологии (мировые периоды) и метафизике (учение об огне).

Таким образом, личность Гиппаса приобретает для нас ясно различимые черты; все относящиеся к нему рассеянные данные складываются в законченную общую картину. Также не представляет трудностей и определение времени его жизни. Как показание Аристотеля, который в своем перечислении, являющемся в других частях хронологическим, называет его представителем учения об огне, непосредственно предшествовавшим Гераклиту (*Метафизика*, кн. 1, 3, 984a), так и данные Теона об опытах с Ласом над звучащими сосудами относят его к концу 6-го века, и традиция подтверждает эту датировку*). Я никак не могу разделить мнения Франка, по которому приписываемые Гиппасу математические открытия могут быть отнесены самое раннее ко времени, непосредственно предшествовавшему Архиту. Додекаэдр был уже известен италикам еще до 500 до н. э., как показывает известная находка в Верхней Италии додекаэдра из жировика**).

Самым важным нововведением Гиппаса в теории музыки является, пожалуй, употребление гармонической средней***). Мы переходим теперь к изучению роли, которую эта средняя играла в пифагорейской теории музыки.

6. Учение о трех средних и гаммы Архита

Основы античного учения о трех средних следующим образом изложены в известном фрагменте Архита (Diels, *Vorsokrater, Archytas*, B.2):

«В музыке существуют три средних: во-первых, арифметическая, во-вторых, геометрическая, в-третьих, обратная, которую называют гармонической. Арифметическая — когда три члена, находящиеся между собой в отношении, обнаруживают разности такого рода: на сколько первый член превышает второй, на столько же и второй член будет превышать третий. В этой пропорции интервал между большими членами будет меньше, а между меньшими — больше. Геометрическая — когда первый член находится ко второму в том же самом отношении, как второй к третьему. Оба больших члена заключают тот же самый интервал, что и меньшие. Наконец, обратная средняя, которую мы называем гармонической, когда члены находятся в таком отно-

*) См. «Свиду» под заголовком «Гераклит»: Гераклит в 69-й олимпиаде (504-1) слушал пифагорейца Гиппаса и Ксенофана.

**) F. Lindemann, *Zur Geschichte des Polyeders*, S.-B. Bayr. Acad. math. phys., Kl., 1896, стр. 625.

***)) Различные указания Ямвлиха относительно истории учения о средних, собранные в удобообозримом виде у Heath, *Greek Mathematics*, 1, противоречат друг другу и поэтому имеют мало значения, но во многих из них упоминается имя Гиппаса.

шении: первый превосходит второй на такую же свою часть, на какую часть третьего члена будет его превышать средний. В этой пропорции интервал между большими членами будет больше, а между меньшими — меньше».

По мнению филологов, фрагмент этот, несомненно, подлинный. Он представляет древнейший сохранившийся греческий математический текст и как таковой достоин уважения. Но так как недавно Рейдемейстер*) хотел усомниться в его подлинности, то мы используем этот текст не для доказательства, но для введения. То, что выраженные в нем основные понятия и предложения принадлежат Архиту и играют важную роль в его теории музыки, будет показано иным путем, независимо от подлинности фрагмента.

Итак, определения трех классических средних M (арифметической), G (геометрической) и H (гармонической) для членов A и B дают:

$$\begin{aligned} A - M &= M - B, \\ A : G &= G : B, \\ (A - H) : A &= (H - B) : B. \end{aligned}$$

Вопрос о существовании геометрической средней, по существу, сводится к тому, можно ли отношение $A : B$ или — на языке музыки — интервал между A и B «разделить пополам», т. е. разложить на два одинаковых отношения или частных интервала. В разделе 2 мы уже видели (см. теорему III), как важны были эти вопросы для теории музыки Архита. Теперь остается задать вопрос, какое значение в теории музыки имели арифметическая и гармоническая средние. На это вполне достаточные ответы дают нам Платон (в «Тимее»), Аристотель (у Плутарха), Никомах, Боэций и другие поздние авторы; они в один голос утверждают, что арифметическая и, прежде всего, гармоническая средние производят деление интервала на неравные частные интервалы. При этом полученные частные интервалы будут для обеих средних те же самые, но только в обратной последовательности; действительно, имеют место пропорции

$$A : H = M : B \quad \text{и} \quad A : M = H : B^{**}).$$

Классический пример, имеющийся у всех названных авторов, представляет деление октавы. Числа 12 и 6 находятся в отношении 2 : 1, их арифметическая средняя равна 9, а гармоническая 8;

*) K. Reidemeister, *Die Arithmetik der Griechen*, Leipzig, 1940.

**) Ямвлих и Никомах называют эту пропорцию «совершеннейшей». Ямвлих сообщает, что она была открыта вавилонянами и перенесена в Грецию Пифагором. Ее использовали многие пифагорейцы, например Аристей из Кротона, Тимей из Локр [в подлиннике ошибочно «из Локриды (Lokris)». (Прим. перев.)], Филолай и Архит.

обе они производят деление октавы на кварту и квинту, или соответственно на квинту и кварту

$$12:9=8:6=4:3$$

$$12:8=9:6=3:2.$$

Дадим в переводе объясняющий это деление отрывок из Аристотеля*); он дает нам ясное освещение того, каким образом излагалась в 4-м веке пифагорейская теория музыки. Мы оставляем в стороне все пояснения Плутарха, а также испорченное место (240), следующее же за ним предложение (241) ставим после (243) для того, чтобы (242) непосредственно примыкало к (239), как этого требует логика. Тогда весь отрывок в целом приобретает совершенно ясный смысл:

«(227) Гамма (*ἀρμονία*) небесна: она имеет божественную, величавую, чудесную природу. (228) Она складывается из четырех членов и дает две средние: арифметическую и гармоническую. (229) Величины и избытки ее членов являются (определенными одна по отношению к другой) согласно числу и геометрии; (230) ибо она разделяется на два тетрахорда. (231) Это его собственные слова. (232) Затем он излагает, что тело гаммы состоит из неравных, но созвучно один другому определенных членов, и что два средних члена образуют с крайними аккорды (по гармонической и) по арифметической пропорции. (237) Крайние члены гаммы превосходят средние и превышаются ими на одинаковые избытки, будет ли это соответственно числу, или же в геометрической пропорции. (239) С одной стороны, Нета превышает Месу на свою собственную треть, а Гипата на такую же часть превышает Месой**). (242) Это и есть гармоническая пропорция. (243) С другой стороны, избыток Неты над Парамесой по арифметическому отношению равен 3, т. е. избытку Парамесы над Гипатой. (241) Крайние члены превышают Месу и Парамесу и превышаются ими в одинаковых отношениях, именно $1\frac{1}{3}$ и $1\frac{1}{2}$. (246) Вот так образована она (гамма) со всеми своими частями согласно природе, именно из четного, нечетного и четно-нечетного***)».

Деление октавы и числовые значения 6, 8, 9, 12 мы еще раз встретим в «Послесловии к Законам» (см. ниже).

Позднее Эратосфен применил тот же самый принцип деления не только к октаве, но также и к другим интервалам. Так, малый

*) Plutarque, *De la musique*, изд. Weil—Reinach, стр. 92—97.

Этот фрагмент заимствован, по-видимому, из юношеского произведения Аристотеля, может быть (как думают Bussemaker и Rose), из диалога «Евдем, о душе». [Существует русский перевод: Плутарх, *О музыке*, Петроград, 1922. (Прим. перев.)]

**) При этом нужно иметь в виду следующие числовые значения для струн: нета 12, парамеса 9, меса 8, гипата 6.

***) То есть единица. Ср. Аристотель у Теона Смирнского (Hiller, 22); к этому R o s t a g n i, *Il Verbo di Pitagora*, III.

тон $10 : 9$ в хроматической тональности он делит на $20 : 19$ и $19 : 18$, в энгармонической — полутон $20 : 19$ делит на $40 : 39$ и $39 : 38$. Замечательно при этом, что меньший интервал всегда заключается между более низкими тонами.

Если большее из обоих чисел A и B мы приведем в соответствие с более высоким тоном, как это соответствует физическим основным воззрениям Архита и Евдокса, то арифметическая средняя производит такое деление, в котором более высокие тона заключают меньший частный интервал, а более низкие — больший. При гармонической средней получается обратное. Отсюда ясно, почему было необходимо введение гармонической средней. Более простая арифметическая средняя дала бы хотя и те же самые частные интервалы, но только в неподходящей последовательности.

Можно ли доказать, что Архит тоже применял гармоническую среднюю в таком же смысле? Для этого мы должны сначала поближе рассмотреть интервалы гаммы Архита, как нам их передает Птолемей.

Восемь тонов классической гаммы получили названия по именам восьми струн лиры:

Тетрахорд разделенных (diezeugmenon)	{	Нета
		Паранета
		Трита
		Парамеса
Тетрахорд средних (meson)	{	Меса
		Лиханос
		Паргипата
		Гипата

Итак, гамма состоит из двух тетрахордов, обнимающих каждый интервал в одну кварту и разделенных интервалом в целый тон. Таким образом, вся гамма обнимает одну октаву. Всем видам тональностей общи «постоянные тона» гипата, меса, парамеса и нета; им соответствуют уже названные числа 6, 8, 9, 12. Но внутри тетрахорда интервалы будут для каждого вида тональности различными. Существует три вида тональностей: энгармоническая, хроматическая и диатоническая. Их интервалы, по Архиту, будут (в последовательности от высоких к низким):

энгармоническая $5 : 4$, $36 : 35$, $28 : 27$;

хроматическая $32 : 27$, $243 : 224$, $28 : 27$;

диатоническая $9 : 8$, $8 : 7$, $28 : 27$.

В каждом из трех случаев произведения трех числовых отношений равны $4 : 3$, т. е. сумма трех частных интервалов всегда равна одной кварте.

Очень легко определить самые высокие частные интервалы всех трех тональностей: $5 : 4$ соответствует чистой большой терции, $9 : 8$ — целому тону, разности между квинтой и квартой, а $32 : 27$ представляет разность между квартой и целым тоном. Таким образом, если мы в качестве тетра хорда берем тетра хорд средних, то энгармонический лиханос составляет с месой большую терцию, хроматический лиханос с парамесой — чистую кварту, наконец, диатонический лиханос дает чистую квинту с паранетой, а последняя — чистую кварту с месой.

На первый взгляд еще более замечательным кажется общий всем тональностям интервал $28 : 27$. Для объяснения этого представим себе *) под гипатой еще сверхгипату на расстоянии целого тона; она образует с паргипатой «уменьшенную малую терцию»

$$(9 : 8) \cdot (28 : 27) = 7 : 6,$$

которая звучит выразительно, приятно и сравнительно часто встречается в энгармоническом фрагменте Эврипидова «Ореста». Если же мы имеем дело с тетра хордом разделенных, то роль упомянутой выше сверхгипаты выпадает на долю месы, которая с тритой *diezeugmenon* образует тот же самый интервал $7 : 6$.

Тем самым доказывается, что наряду с октавой, квинтой и квартой основными интервалами у Архита будут также большая терция ($5 : 4$) и уменьшенная малая терция ($7 : 6$). Кроме того, можно еще указать дополнительные в некотором смысле интервалы ($6 : 5$) и ($8 : 7$), последний встречается в диатонической тональности, а первый — в энгармонической — от мессы до паранеты.

Таннери**) выставил следующую гипотезу: Архит получил квинту и кварту в результате деления октавы при помощи арифметической или гармонической средней, а интервалы ($4 : 5$), ($5 : 6$), ($6 : 7$) и ($7 : 8$) — в результате деления кварты и квинты по тому же самому рецепту. Если мы, начиная от месы, возьмем вниз квинту, а вверх — кварту, то деление квинты при помощи гармонической средней дает как раз архитов энгармонический лиханос, а такое же деление кварты — общую всем видам членов триту *diezeugmenon*.

Однако, как ни привлекательна эта гипотеза, хорошо совпадающая со всем известным нам относительно Архита и учения о средних, до сих пор она еще не была доказана текстами. Однако в «Послесловии к Законам» имеется место, которое как раз говорит то же самое, если только понимать его буквально. Тем самым гипотеза Таннери является доказанной, и одновременно разъ-

*) Cp. R. P. Winnington-Ingram, *Classical Quarterly* 26 (1932), стр. 195—208, а также Düring, 1934, стр. 251.

**) P. Tannery, *Mém. Scient.*, III, стр. 105.

3. <Сила> же удвоения, <обращающаяся> к середине, <может быть двоякой, или когда> одинаково большее <превосходит> меньшее и <само превосходится как> меньшее большим, <или> же другая, <когда средняя> превосходит и превосходится крайними на ту же самую их часть*) — в середине <отношения> шести к двенадцати получаются <в обоих этих случаях отношения> полуторное и эпитритное ($1\frac{1}{3}$)**) — поворачиваясь в обе стороны от этих самих <отношений***), стоящих> в середине****), она дала людям в удел пользу созвучности и соразмерности, наделив блаженный хоровод Муз красотой игры, ритма и гармонии*****)».

Следуя предложению А.Е. Taylor'a, О. Теплиц истолковал последний пункт так: после того как между 6 и 12 найдены обе средние 8 и 9, между этими последними снова находят арифметическую и гармоническую средние и т. д.; таким образом, получаются все более и более близкие подходящие дроби для $6\sqrt{2}$. В двух последних подстрочных примечаниях я уже указал имеющиеся с точки зрения языка возражения против подобного толко-

*) Это определение двух музыкальных средних — арифметической и гармонической — совершенно точно совпадает с цитированным в начале этого раздела фрагментом Архита.

**) Ср. вышеприведенные числовые примеры, 6, 9, 12 и 6, 8, 12 для арифметической и гармонической средней, содержащие числовые отношения $1\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{3}$ для квинты и кварты.

***)) Фразеологически ясно, что слова «этих самых» относятся не к обоим средним 8 и 9, но к только что найденным отношениям, полуторному и эпитритному.

****)) «В середине (in der Mitte)», но не «к середине (nach der Mitte)», как ошибочно переводит Теплиц.

*****)) Русский перевод несколько приближен к греческому оригиналу. Для сравнения даем это место из «Творений Платона» в переводе А. Н. Егунова в русском издании Петербургского философского общества, т. XIV (изд. Academia, 1923), стр. 268—269:

«Но что удивительно и божественно для вдумчивого наблюдателя, это закон двукратных возрастающих или убывающих отношений чисел, замечавшийся во всех видах и родах вещей. Первое двукратное отношение чисел есть отношение единицы к двойке; результат, в смысле своей значимости, получается вдвое больший. При переходе к телам трех измерений, ощутимых на ощупь, происходит опять-таки удвоение, причем здесь от единицы восходят к числу «восемь». Второе значение числа «два» занимает среднее место между этими двумя пределами, так как оно настолько превосходит себя самого; оно превосходит одну крайность, и в равной мере его превосходит другая крайность. Так, среди чисел, заключающихся в ряду чисел между шестью и двенадцатью, находятся два числа, образованные: первое прибавлением одной половины числа «шесть», второе — прибавлением трети числа «шесть». Значение самих этих чисел, занимающих среднее место между двумя крайностями, научило людей употреблению согласованности и соразмерности, ради ритмических игр и гармонии, и дало это в дар счастливому хороводу Муз».

Этот отрывок является доказательством того, что для перевода греческих философских произведений не всегда достаточно иметь только философское образование и знание греческого языка. (Прим. перев.)

вания. Но также и по существу никак нельзя видеть, каким образом, при помощи такого последовательного приближения можно когда-нибудь получить красоту игры, ритма и гармонии.

Если понимать этот текст буквально, то он говорит, что та самая среднеобразующая сила, которая уже дала отношение $3 : 2$ и $4 : 3$, еще раз прилагается к обоим этим отношениям из середины (или — на языке музыки — разделив сначала гармонически октаву на квинту и кварту, еще раз разделим гармонически эти последние, обращаясь от меры *) в обе стороны по тому же самому способу. Таким образом, действительно получается вся благозвучная связь музыки, именно все основные интервалы трех тональностей Архита Тарентского.

7. Диатоническая гамма

Два предложения «Sectio canonis», которые касаются деления канона и, как показал Таннери, являются позднейшим прибавлением, исходят из следующих делений интервалов тетра хорда:

$$(9 : 8) \cdot (9 : 8) \cdot (256 : 243) = 4 : 3.$$

Оно отличается тем, что оба наивысших интервала представляют точные целые тона в классическом смысле. Действительно, у всех древних писателей целый тон определяется как разность между квинтой и квартой. Подобный строй диатонической гаммы мы будем называть *каноническим*. Он встречается в так называемых филолаевских фрагментах, в платоновском «Тимее», у Эратосфена и Птолемея под именем *Diatonon ditonaion*. О нем Птолемей пишет (*Harmon*, I, 16):

«Наряду с уже рассмотренным *Diatonon syntonon*...**) они (кифарэды) ставят еще другой род тональности, который близок к первому и, кроме того, весьма удобен. Два высших (интервала) они берут равными целым тонам, а последний равняется полутону, как думают они сами, но на самом деле, как показывают теоретические вычисления, равняется леймме. Этот (род тональности) употребляется ими, если отношение $9 : 8$ высшего тона не отличается существенно от $10 : 9$, а также если низший тон, имеющий отношение $16 : 15$, мало отличается от лейммы. Действительно, если взять $10/9$ и $9/8$ от числа 72, то мы получим соответственно

*) Название струны *mese* — μέση по-гречески значит «средняя». Следует, однако, заметить, что «середина» будет τὸ μέσον, как и стоит в тексте Платона. (Прим. перев.)

**) Интервалы $10 : 9$, $9 : 8$, $16 : 15$.

80 и 81, и $\frac{9}{8}$, разделенное на $\frac{10}{9}$, дает $\frac{81}{80}$. Это представляет также отношение интервала в два тона $(9 : 8) \cdot (9 : 8)$, сравнимое с $5 : 4$, наивысшим интервалом и энгармонической тональности... При этом ни в какой из вышеприведенных тональностей не встречается каких-либо заметных диссонансов, если они в Diatonon syntonon берут в качестве наивысшего интервала $9 : 8$ вместо $10 : 9$... Мы также можем допустить такой род тональности, потому что переход от разновидности tonaion к смешанному из вышеуказанного (и tonaion) будет очень легким. Точно так же в противоположность другим отношениям, не являющимся эпиморными, леймма имеет связь с квартой и с целым тоном».

Как видно, Птолемей признает с некоторым колебанием этот строй, интервалы которого не являются эпиморными; при этом он ссылается не на Платона или теоретические соображения, но на практику кифарэдов, для которых этот строй «весьма удобен». Под этими словами, пожалуй, подразумевается то, что этот строй получается очень легко, если произвести чистую настройку всех квинт и кварт, или же, что этот строй очень легко допускает модуляции.

У многих поздних писателей каноническая гамма считается пифагорейской; часто она даже приписывается самому Пифагору*). Однако Франк со ссылкой на Таннери утверждает, что она впервые была введена Платоном. Во всяком случае сам Таннери выражается значительно осторожнее**). Мы же покажем, что каноническая гамма уже давно играла большую роль в музыкальной практике и что она, весьма вероятно, получила числовое оформление от более древних пифагорейцев, а может быть и от самого Пифагора.

Для приведения этого доказательства мы должны исследовать различные оттенки ($\chi\rho\omicron\sigma\iota$) диатонической тональности. Птолемей приводит следующие деления тетрахорда:

- I. Diatonon syntonon: $(10 : 9) \cdot (9 : 8) \cdot (16 : 15) = 4 : 3$,
- II. Diatonon ditonaion: $(9 : 8) \cdot (9 : 8) \cdot (256 : 243) = 4 : 3$,
- III. Diatonon tonaion: $(9 : 8) \cdot (8 : 7) \cdot (28 : 37) = 4 : 3$,
- IV. Diatonon malakon: $(8 : 7) \cdot (10 : 9) \cdot (21 : 20) = 4 : 3$.

*) См., например, Теон Смирнский, изд. Hiller 56₁₀—57₁.

**) T a n n e r y, Mém. Scient., III, 233: «L'habillement mathématique de l'échelle du Timée peut très bien au reste, si les fragments de Plilolaos ne sont pas authentiques, ne pas remonter plus haut que l'époque de Platon... Platon a, très probablement le premier, proposé sous forme mathématique l'échelle en question: il a essayé de justifier a priori cet échelle, dont l'origine véritable est plutôt à chercher dans l'essai d'un acousticien...». Совершенно иначе выражается Франк (стр. 167): «Diese Tonleiter ist aber eine metaphysische Konstruktion, die mit wirklicher Musik nichts zu tun hat und mit bewusster Absicht ihre Töne und Konsonanten ausser acht lässt».

Разновидность I с перестановкой большого и малого тона встречается впервые у Дидима (около 50 н. э.). Разновидность II представляет каноническую гамму Платона, Филолая, Евклида и Эратосфена. Разновидность III есть диатоническая тональность Архита. Разновидности II, III и IV соответствуют следующим делениям в теории Аристоксена:

(2) Diatonon syntonon: $1 + 1 + \frac{1}{2}$.

(3) Без имени (Stoicheia 52₃₀) $1 + 1\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ или $1 + 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

(4) Diatonon malakon $1\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$.

Интервалы разновидности I не имеют места в системе Аристоксена: он назвал бы их «иррациональными».

Из Ptol. II, 16 ясно вытекает, что все строи от I до IV во время Птолемея были в употреблении у кифарэдов. Из согласия с Аристоксеном и Архитом получается, что эти же строи существовали также и в классическую эпоху.

Практически легче всего получить строй II. Сначала надо настроить по квинтам и квартам постоянные струны, ограничивающие тетрахорды: гипату, месу, парамесу, нету. На кварту выше месы получается настройка паренеты, на квинту ниже — лиханос, на кварту выше — трита, на квинту ниже — паргипата. Греки называли это «определение членов при помощи консонансов» (ἡ διὰ συμφωνίας λήψις *).

Gevaert высказывает при этом мнение: A l'origine les Grecs semblent n'avoir pas connu d'autre mode de génération des sons. (По-видимому, греки первоначально не знали другого способа получения звуков.) **) Птолемей выразительно подтверждает нам это (стр. 59): «Кифарэды настраивают так, что как АВ, так и ВГ составляют целый тон». Кроме преимущества удобной и точной настройки, этот оттенок обладает еще более легкой возможностью модулирования (Ptolemaios, стр. 59), так как только в нем Nete synnemenon совпадает с Paranete diezeugmenon, а Paranete synnemenon с Tritе diezeugmenon. Этим и объясняется то, что этот строй был излюбленным у кифарэдов времен Птолемея.

Но если мы этот самый строй диатонического рода тональности находим также у Платона, у Аристоксена, в «Sectio canonis», а у Аристоксена даже в качестве единственного, или хотя бы наи-

*) Ср. А р и с т о к с е н, 55₁₁: «Наиболее надежным способом определения диафонного интервала является определение при помощи консонанса».

**) Gevaert, *Histoire et théorie de la musique de l'antiquité*, I, 309.

более важного оттенка, то становится совершенно ясно, что он был получен не на основании теоретических соображений, которые были свойственны только Платону, но, как говорит Птолемей, на основании музыкальной практики его времени. Опытный музыкант Gevaert неоднократно уверяет нас, что «настройка по консонансу», т. е. по чистым квартам и квинтам, представляет единственный действительно точный способ настройки; еще и в настоящее время таким способом пользуются наши настройки.

Исходя из строя II, можно получить три остальных понижением настройки отдельных струн; например, для I нужно все постоянные тона настроить ниже на комму (81 : 80), для III понизить триты и паргипаты на $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$ тона, а для IV—на столько же понизить паранеты и лиханы*). Наряду со II строй III является излюбленным диатоническим делением тетра хорда от Архита до Птолемея (ср. Ptol., II, 16). Строи III и IV были, по-видимому, новшествами, против которых так сильно восставали писатели комедий в 5-м веке. Действительно, у них в первую очередь порицалось снижение настройки струн и введение все более мягких гамм**). Поэтому если Платон в «Тимее» выступает против Архита защитником гаммы II, то это не простая игра с числами 2 и 3, но все это вполне подходит к его консервативной позиции по отношению к более новой музыке, что он часто выражает и в других местах (прежде всего в «Законах»). Никогда не нужно забывать, что Платон понимает толк не только в числовых спекуляциях, но также и в настоящей музыке: «Ἀρμονία συμφωνία ἐστὶ» (гамма есть созвучие) говорится в «Пире» (187a), а эта фраза на языке чистой музыки выражает то же самое, что и числовые отношения гаммы Тимея.

Еще одну опору для нашего тезиса, что строй II играл в теории и практике более важную роль, чем I, мы получаем косвенно, рассматривая энгармоническую тональность. Здесь сказывается, что Архит совсем одинок со своей чистой большой терцией: все другие авторы 5-го, 4-го и 3-го веков держатся мнения, что наибольшим интервалом энгармонической тональности является дитон (равный двум целым тонам). Это можно видеть уже в гаммах Дамона***), далее у Аристотеля****), который часто называет четверть тона общей мерой всех музыкальных интервалов, затем

*) См. об этом понижении настройки Аристоксеном у Плутарха, гл. 38, а также Тапперу, *Mém. Scientif.*, III, стр. 90с.

**) Ср. Ферекид и Аристофан у Плутарха, *loc. cit.*, 240—243.

***) У Аристода Квинтилиана, изд. Meibom, стр. 22, Ср. R. Schäfke, *Aristeides Quintilianus, Von der Musik*, Berlin, 1934, а также приведенную там литературу.

****) *Aristoteles, Anal. poster.* I, 23; *Metaphys.* XI, 1053a, XIII, 1, 1087b.

у Филолая *), который делит кварту на два целых тона и «Diesis», а последний на две «диасхизмы», очевидно, имея в виду энгармоническую тональность, и, само собой разумеется, у Аристоксена, который, кроме того, уверяет, что все его предшественники были едины в том, что энгармоническая тональность не имеет никаких оттенков **). Как Аристоксен, так и Евклид ***) дают оба то же самое правило для образования энгармонического дитона, именно: от данного тона надо взять квинту ниже, затем кварту выше, затем опять квинту вниз и кварту вверх. Наконец, у Эратосфена большой энгармонический интервал (19 : 15) лишь неощутимо отличается от дитона (81 : 64).

Откуда же происходит то, что все эти авторы предпочитают дитон чистой большой терции? Во всяком случае не из любви к какой-нибудь системе, так как все они ведь приверженцы самых различных систем. Скорее можно сказать, что это из любви к традиции, которая выводит энгармоническую тональность из более древней и считавшейся более естественной диатонической. Согласно этой переданной Аристоксеном традиции большой энгармонический интервал должен был получиться из двух последовательных диатонических интервалов в целый тон в результате опускания среднего тона****). Отсюда снова следует, что для Аристоксена и предшествовавших ему теоретиков музыки интервалы нормальной диатонической тональности были точными целыми тонами.

Из всего этого с полной достоверностью получается заключение, что строй диатонической гаммы по чистым квинтам и квартам не восходит к Платону, но является гораздо более древним. Но мы знаем также, что Пифагор и его непосредственные ученики знали числовые отношения для октавы, квинты и кварты и производили с ними вычисления. Если бы теперь кто-нибудь из них поставил вопрос, при помощи каких числовых отношений можно представить

*) Diels, *Vorsokratiker, Philolaos*, В. 6. Ср. T a n n e r y, *Mém. scient.*, III, 220—243.

**) Плутарх, *De musica*, гл. 34. Однако в другом месте (*Stoicheia* 23₁₃ и 28₁₃) указывает, что энгармонический лиханос иногда настраивался немного выше для получения более приятного интервала. Таким образом, чистая большая терция была известна как практика, так и Архиту, но только не обычным теоретикам.

***) А р и с т о к с е н, *Stoicheia*, стр. 55, Meibom, Евклид, *Sectio canonis*, предл. 17.

****) Аристоксен у Плутарха, гл. 11: «Олимп рассматривается теоретиками музыки как изобретатель энгармонической тональности, ибо до него все было диатоническим и хроматическим. Это изобретение они представляют себе совершившимся так: двигаясь в области диатонического, Олимп часто приводил мелодию прямо к диатонической паргипате, иногда выходя от парамесы, иногда же от месы и перескакивая диатонический лихан. При этом он заметил красоту выражения (ῥῆος), восхитился образованной таким способом гаммой и составил при ее помощи дорическую тональность».

интервалы диатонической гаммы, то на основании содержащихся в ней чистых квинт и кварт он должен был неминуемо прийти к системе II числовых значений. Эти последние еще более рекомендовали себя тем, что все они в конечном счете выводились из тетрады — «корня и источника вечной природы». Поэтому можно вполне доверять традиции, возводившей эти числовые значения к самому Пифагору.

8. Звук как совокупность множества ударов воздуха

Все представители пифагорейской, платоновской и перипатетической школ сходились в том, что звук есть движение воздуха, возникающее в результате соударения тел. Достаточно только сравнить начало цитированного выше фрагмента Архита с тем, что Аристотель (*De anima*, 419b) говорит о возникновении тонов, или с переданным нам Порфирием фрагментом Гераклида Понтийского*).

Этот фрагмент начинается с цитаты из Пифагора: «Как говорит Ксенократ, Пифагор нашел, что музыкальные интервалы возникают не без участия числа, ибо они получаются в результате сравнения различных величин. Он затем исследовал, при каких обстоятельствах интервалы бывают созвучными и несозвучными и как вообще возникает все гармоническое и негармоническое. И, переходя к возникновению звуков, он сказал: „Если кто-нибудь захочет из равенства услышать что-либо созвучное, то должно иметь место некоторое движение“».

Явное созвучие этой фразе Пифагора слышно в начале «*Sectio canonis*»: «Если бы существовали только покой и неподвижность, то была бы тишина. А если бы была тишина и ничто бы не двигалось, то никто также ничего бы и не слышал. Поэтому если кто-нибудь хочет что-то услышать, то прежде должны иметь место удар и движение**).

*) Порфирий в Ptol., *Harm.*, изд. Düring, стр. 30 и сл. Сложная история передачи этого фрагмента была убедительно выяснена Дюрингом (1934, стр. 152 и сл.). Сообщения в начале насчет Пифагора восходят к Ксенократу, но Гераклид, бывший оригинальным мыслителем, вряд ли мог все следующие соображения относительно сущности звука переписать у своего гораздо менее значительного коллеги Ксенократа: все они должны, конечно, восходить к нему самому.

**) Следующее сопоставление показывает, что Евклид пользуется почти теми же словами, что и Пифагор:

Пифагор по Ксенократу

Евклид

ὥστε μέλλει τι ἐκ τῆς ἰσότητος σύμφωνον ἀκούσθῆσθαι, κίνησιν δὲ τινα γενέσθαι

εἰ ἄρα μέλλει τι ἀκούσθῆσθαι, πληγὴν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι.

Шенбергер*) убедительно показал, что движение, о котором говорит здесь Пифагор, уже в классическое время понималось как движение воздуха. Однако первоначально не очень ясно представляли себе характер этого движения воздуха.

Эмпедокл объясняет слух (так же как и зрение) как совпадение со внешним звуком того звука, который вызван внутри человека воздушным ударом: «Слышание совершается при помощи внутреннего звука, когда воздух приводится в движение голосом и звучит внутри. Именно, слух походит на колокол, который издает одинаковые тона, когда его ударяет мясистый сук**). Когда он (колокол) колеблется, то он толкает воздух по направлению к твердым телам и производит звук» ***).

Если здесь речь идет о колебании колокола, то в этом можно было бы заметить первый намек на то, что тон представляет периодический процесс, но к ясному представлению об этом еще не пришли даже во времена Платона и Аристотеля. Аристотель объясняет происхождение звуков таким образом (*De anima*, 419в):

При ударе одного тела о другое приведенный в движение воздух оттолкнется от ударенного тела. Если последнее имеет гладкую поверхность (как, например, металлы) или впадину, то оттолкнутый воздух не разольется в разные стороны, но сохранится в целости и будет отброшен от поверхности «как шарик»; когда он взаимно связанный достигнет органа слуха, то приведет в движение находящийся в ушах воздух и он зазвучит.

Встречающееся здесь мнение, что до уха доходят не удары или колебания воздуха, но сам приведенный в движение воздух, можно также предположить и у более ранних авторов, в особенности у Архита. Действительно, этим совершенно непринужденно объясняется ошибка Архита, что более высокие тона скорее достигают уха. Архит правильно нашел, что более быстрые движения производят более высокие тона. Но более быстрое движение ударяемого предмета производит и более быстрое движение отталкиваемого воздуха. Если бы он вообразил при этом колебательное движение воздуха на том же месте, то не было бы никакого основания для предположения, что более быстрые колебания будут быстрее и распространяться. Если же оттолкнутый воздух двигается сам к уху, то более быстрое движение необходимо обозначает и более быстрое распространение звука.

Аристотель занимает (*De anima*, 420а 31) позицию против воззрений Архита и Платона, что высокие тона распространяются быстро, а низкие — медленно. Высокий тон сам по себе не яв-

*) P. L. Schö n b e r g e r, *Studien z. Harm. Ptol.*, Programm. Augsburg, 1914, стр. 29 и сл.

**) О смысле выражения *σάρκινος ὄχος* см. Schö n b e r g e r, loc. cit., 31.

***) По Теофрасту. Diels, *Vorsokrat.*, *Empedocles* A. 86.

ляется быстрым, но его происхождение обусловлено более быстрым движением. В этом Аристотель, конечно, прав, но его объяснение, что высокий тон действует на ощущения сильнее, хотя и более короткое время (совершенно так же, как острый предмет действует на осязание по меньшей площади, но сильнее, чем тупой), не соответствует сущности высоты тона.

Правильное представление, а именно, что звук состоит из множества отдельных воздушных ударов, мы находим впервые только у Гераклида Понтийского (loc. cit.). Гераклид исходит из того, что единственный удар, сообщаемый струной воздуху, не требует совсем времени. Но так как сам тон продолжается в течение некоторого времени, то он должен состоять из многих отдельных ударов, которые следуют друг за другом через неощутимо малые промежутки времени. Эта аргументация Гераклида была настолько убедительной, что представление о звуке, как о совокупности множества отдельных ударов, несмотря на полемику Теофраста*), быстро распространилось как в перипатетической, так и в пифагорейско-платоновской школе. Совершенно ясное его изложение мы находим в псевдоаристотелевском произведении «De audibilibus» (о том, что возможно услышать), приписываемом физику Стратону**), но то же самое воззрение лежит в основе как «Sectio canonis», так и «Проблем по теории музыки» Аристотеля. В «De audibilibus» говорится с ясным отзвуком Гераклида.

«Удары, сообщаемые струнами воздуху, имеют место в большом числе и раздельно друг от друга. Но так как, вследствие малости промежутков, ухо не может схватить перерывов, то тон представляется в виде одного-единственного связного звука».

Как мы уже говорили, «Sectio canonis» начинается с той же цитаты из Пифагора, что и фрагмент Гераклида, и затем продолжает:

«Так как все тона возникают от удара, а удар невозможен без предшествующего движения, из движений же одни более плотно, а другие реже следуют друг за другом, причем плотнее следующие друг за другом делают тона высокими, а другие, наоборот, низкими, то одни тона будут необходимо более высокими, поскольку они складываются из более часто следующих друг за другом многочисленных движений, а другие, наоборот, более низкими, потому что они состоят из более редких и меньшего числа движений. Если

*) Теофраст у Порфирия в P t o l., *Harm.*, стр. 62 и сл.

**) Порфирий в P t o l., *Harm.*, стр. 67—77. Сочинения Аристотеля (Bekker), 803 и сл. Относительно вопроса об авторстве см. D ü r i n g, *Göteborgs Hb*, Ar., 1934, стр. 169 и цитируемую там литературу, прежде всего Александра Афродизского *De Sensu* 117 A.

тон слишком высок, то его спускают, именно, тон достигает настоящей высоты при помощи отнимания движения. Если он слишком низок, то его напрягают сильнее, т. е. при помощи прибавления движения тон приобретает настоящую высоту. На этом основании можно сказать, что тона состоят из частичек, так как они достигают истинной меры при помощи прибавления и отнятия. Но все, что состоит из частичек, относится друг к другу, как целые числа, поэтому тона тоже необходимо должны относиться, как целые числа».

Таким образом, и в «De audibilibus» и в «Sectio» мы наряду с объяснением, что тон состоит из частичек (воздушных ударов), находим также и другое, а именно, что высота тона обуславливается более или менее частой последовательностью отдельных воздушных ударов. Поэтому вполне естественно приписать и это воззрение тоже Гераклиду Понтийскому. Сам гераклидов фрагмент обрывается прежде, чем заходит речь о высоте тонов. Но из полемики Теофраста *) мы можем видеть, что такое представление высоты тона уже во времена Теофраста было неразрывно соединено с представлением о тоне как о некотором множестве. Теофраст пишет:

«Это ясное действие голосов (а именно, мелодическое движение) некоторые пытались вывести из ритма, утверждая, что точность интервалов основывается на коренящихся в ритмах отношениях **). Ибо одно и то же будет отношение у октавы и двукратного, у квинты и полуторного, у кварты и отношения $4:3$, а также и все остальные интервалы имеют каждый свое собственное отношение, как и остальные числа. Следовательно, количество ($\pi\omicron\sigma\beta\eta\varsigma$) является принципом музыки...»

Если теперь (низкие и высокие тона различаются друг от друга) по количеству и природа высокого тона покоится на том, что приводятся в движение большие числа, а природа низких в том, что для этого нужны меньшие, то в чем же будет тогда заключаться своеобразие голоса?.. Если же более высокие и более низкие тона отличаются друг от друга только как тона, то мы получаем возможность отказаться от количества... Таким образом, ни высокие, ни низкие голоса не состоят из большего количества составных частей и также не требуют больших или меньших чисел».

В первом абзаце Теофраст, очевидно, говорит о пифагорейцах вообще. Затем он обращается против тех в особенности, которые мыслят тон состоящим из большого числа составных частей, т. е. против Гераклида и его последователей. По их мнению, «природа

*) П о р ф и р и й, стр. 61 и сл., перев. Дюринга, 1934, стр. 161 и сл.

**) О связи гармонических интервалов с ритмами по защищаемым Теофрастом воззрениям будет сказано ниже при разборе задачи 39 в.

более высоких тонов» заключается в том, что «приводятся в движение большие числа». Отсюда совершенно ясно, как мне кажется, вытекает, что и по Гераклиду высокие тона состоят из более многочисленных, чаще повторяющихся воздушных ударов.

Рассмотрение тонов как ритмических последовательностей отдельных воздушных ударов позволяет также объяснить и явление созвучия. В довольно неясных словах оно дается в уже цитированном произведении «De audibilibus» (P o r p h., 75, 19 и сл.): τὸ δ' αὐτὸ συμβαίνει τοῦτο καὶ περὶ τὰς συμφωνίας. οἷα γὰρ τὸ περισυγκатаλαμβάνεσθαι τοὺς ἑτέρους ἤχους ὑπὸ τῶν ἑτέρων, κλιγίνεσθαι τὰς καταπαύσεις αὐτῶν ἅμα, λανθάνουσιν ἡμᾶς αἱ μεταξὺ γινόμεναν φωναί. πλεονάκεις μὲν γὰρ ἐν πάσαις ταῖς συμφωνίαις ὑπὸ τῶν ὀξυτέρων φθόγγων αἱ τοῦ ἀέρος γίνονται πληγαὶ διὰ τὸ τάχος τῆς κινήσεως. τὸν δὲ τελευταῖον τῶν ἤχων ἅμα συμβαίνει προσπίπτειν ἡμῖν πρὸς τὴν ἀκοήν καὶ τὸν ἅπλο τῆς βραδυτέρας γινόμενον ὥστε τῆς ἀκοῆς οὐ δυναμένης αἰσθάνεσθαι, καθάπερ εἴρηται, τὰς μεταξὺ φωνάς, ἅμα σκοοῦμεν ἀμφοτέρων τῶν φθόγγων ἀκούειν συνεχῶς *).

Объяснение. В консонансе, например, октавы отдельные удары у более высокого тона происходят в два раза чаще, чем у низких. Таким образом, каждый второй удар достигает нашего уха одновременно с одним ударом более низкого тона и при этом более низкий тон переходит целиком в более высокий и сливается с ним в единое впечатление.

Как раз такое же, и даже еще более ясно выраженное, объяснение консонанса октавы находится в задаче 39 у Аристотеля. Интересующая нас часть текста (как по Gevaert—Vollgraff, так и по Reinach—Eichtal) такова:

... καθάπερ ἐν τοῖς μέτροις οἱ πόδες ἔχουσι πρὸς αὐτοὺς λόγον ἴσον πρὸς ἴσον ἢ οὗο πρὸς ἓν ἢ καὶ τινα ἄλλον, οὕτω καὶ οἱ ἐν τῇ συμφωνίᾳ φθόγγοι λόγον ἔχουσι κινήσεως πρὸς αὐτούς· τῶν μὲν οὖν ἄλλων συμφωνιῶν ἀτελεῖς αἱ θατέρου καταστροφαὶ εἰσιν, εἰς ἡμῖν (ἢ τρίτον) τελευτῶσαι· διὸ τῇ οὐνάμει οὐκ ἴσαι εἰσίν. οὔσαι ο' ἄνισοι, διαφορὰ τῇ αἰσθήσει... ἔτι δὲ (τῇ) ὑπάτῃ συμβαίνει τὴν αὐτὴν (τ, ῃ νήτῃ) τελευτῆν τῶν ἐν τοῖς φθόγγοις περιόδων ἔχειν. ἡ γὰρ ὀυτέρη τῆς νήτης πληγὴ τοῦ ἀέρος ὑπάτῃ ἐστίν· τελευτῶσαις δὲ εἰς ταῦτόν, οὐ ταῦτον ποιούσαις, ἓν καὶ κοινὸν τὸ ἔργον

*) То же самое происходит и относительно созвучия. Ибо вследствие взаимоохватывания друг другом отдельных отзвуков (ἤχους) и происходящих вместе с этим их задержек от нас ускользают производимые в промежутках звуки. Действительно, во всех созвучиях вследствие быстроты движения гораздо чаще производятся воздушные удары от более высоких звуков; оказывается поэтому, что последний из отзвуков достигает нашего слуха одновременно с производимым более медленным движением; таким образом, поскольку согласно сказанному слух не может воспринять промежуточные звуки, то вместе с этим и кажется, что оба звука слышатся связно. (Прим. перев.)

συμβαίνει γίγνεσθαι, καθάπερ τοῖς ὑπὸ τὴν ᾠδὴν κρούουσιν· καὶ γὰρ οὗτοι τὰ ἄλλα οὐ προσαυλοῦντες, εἰς εἰς ταῦτόν καταστρέφουσιν, εὐφραίνουσι μᾶλλον...

Так как относительно толкования этого места ученые придерживаются различных мнений, то мы дадим сначала по возможности буквальный перевод.

«...Так же как в стихотворных метрах стопы стиха имеют друг к другу отношение, как равное к равному, или как 2 к 1, или какое-нибудь другое отношение, то также и в консонансах оба тона имеют между собой отношение движений. В других (отличных от октавы) консонансах круговращения (*καταστροφαί*) одного тона по отношению к другому являются незаконченными, они завершаются лишь наполовину (или треть). Поэтому они не равны и по силе, а так как они не равны, то будет различие и в ощущении... Однако (в случае октавы) как раз оказывается, что гипата в периодическом возвращении тонов имеет тот же самый конец (что и нета). *Ибо второй удар, сообщаемый нетой воздуху, будет гипатой*. Поскольку же оба тона имеют то же самое окончание, не производя, однако, того же самого, то получается единый и общий результат, как у тех, которые аккомпанируют пению на инструменте, когда флейтист, отклонившийся сначала от голоса, затем снова кончает с ним вместе и тем производит более приятное впечатление».

При толковании лучше всего исходить из фразы, напечатанной курсивом. Если понимать ее наиболее естественно, а именно «каждый второй удар неты является ударом гипаты», то мы как раз и придем к данному выше объяснению консонанса октавы. Тогда становится вполне понятным сравнение с метрическими стопами; а также высказывание, что оба тона в периодическом возвращении (своих составных частей) имеют то же самое окончание. Если же мы имеем какой-нибудь другой консонанс, например квинту в отношении 2 : 3, то удары одного тона лишь наполовину покрываются ударами другого, или, как говорит текст, они «завершаются лишь на половину». Так этот текст толкует и Gevaert*).

*) Напротив, Рейнак и Эйхталь замечают (Rev. et. grec., 1900, стр. 30): «Mais, en philologie, il s'agit d'expliquer les textes tels que leurs auteurs les ont conçus et non d'y substituer des théories plus ou moins savantes et voisines de nos connaissances scientifiques actuelles. La décomposition du son en vibrations élémentaires, la comparaison des vitesses vibratoires des sons, sont des notions étrangères à nos problemistes, le mot *καταστροφαί* au début de notre réponse rapproché de εἰς ταῦτόν καταστρέφουσιν à la fin, n'est susceptible que d'une seule traduction».

Пусть читатель рассудит сам, может ли следующий перевод второй фразы текста представлять это «seule traduction»: Or dans les consonances autres que l'octave, les vitesses terminales (!) de l'un des sons, comparé à l'autre, sont toujours fractionnaires, elles ne (в подлиннике «ellent») s'achèvent (qu') à la moitié ou au tiers». Из вышеприведенных наших рассуждений вполне ясно, что Gevaert не втолковал в текст никакой современной теории, а может вполне опираться на доброкачественное античное предание.

9. Общий обзор всего развития

На основании вышеприведенных исследований мы получаем следующую картину развития пифагорейской теории музыки.

1. Исходя из упомянутых в разделе 3 повседневных наблюдений о влиянии на высоту тона натяжения, длины струны или звучащего столба воздуха, а может быть также и под влиянием вавилонских теорий, Пифагор пришел к мысли о сопоставлении тонов с числами, а консонансов — с числовыми отношениями; в частности, октаве, квинте и кварте были приведены в соответствие содержащиеся в тетраде отношения $2:1$, $3:2$, и $4:3$. На основании этого он мог четырем постоянным струнам лиры приписать числа 6, 8, 9, 12 и вычислить интервалы ($9:8$, $9:8$ и $256:243$) диатонической гаммы.

2. Гиппас в числе 8 признал гармоническую среднюю между 6 и 12. К трем консонансам Пифагора он добавил двойную октаву ($4:1$) и дуодециму ($3:1$). Вследствие его научной позиции необходимо возникло противоречие с ортодоксально мыслящими пифагорейцами, которое привело к расколу. В его время с пифагорейцами познакомился знаменитый музыкант Лас и проверил числовые отношения консонансов на опытах с пустыми и наполовину полными сосудами.

3. В школе пифагорейцев, называвших себя «математиками», была продолжена и развита далее обоснованная Пифагором и Гиппасом теория музыки. С точки зрения чистой теории она была обоснована при помощи следующих постулатов: 1. Равновысоким тонам соответствуют равные числа, различным — неравные. 2. Равным интервалам соответствуют равные числовые отношения. 3. Созвучным интервалам должны соответствовать кратные или эпиморные соотношения. 4. Октаве, которая всего ближе подходит к одинаковости тонов, должно соответствовать отношение $2:1$. Интервалы измерялись взаимно при помощи «попеременного вычитания»; таким образом были получены большой и малый полутона и пифагорейская комма. Относительно энгармонической тоналности не было еще ничего готово до Архита, так как не удавалось леймму $\frac{256}{243}$ разделить на две равные части; для этого достаточно лишь обратить внимание на бесплодные попытки в фрагментах Филолая. Приписанные тонам числа с физической стороны толковали иногда как напряжения и более высокому тону относили и большее число (такое соответствие встречается чаще всего,

например, у Аристотеля и Никомаха); иногда же их толковали и как длины струн или духовых инструментов, так что более высокому тону соответствовало меньшее число (Платон, Эратосфен).

4. Архит не удовлетворился таким колеблющимся между грузами и длинами толкованием, поскольку оно не затрагивает сущности тонов; ведь каждый тон может быть получен на струнах различной длины и натяжения. Для него сущность тонов заключается в движении, а высота тона зависит от скорости движения. Он, вероятно, представлял себе это движение как перемещение воздуха от звучащего тела к уху; в связи с этим он принимал, что более высокому тону соответствует и большая скорость распространения. При помощи хитроумных теоретико-числовых заключений он делает попытку вышеприведенный постулат 4 доказать на основании трех первых. Однако это доказательство, изложенное в «*Sectio canonis*», содержит ошибочное заключение. Архит доказал также неделимость целого тона и производил дальнейшее построение теории о трех средних. Разделив квинту при помощи гармонической средней на большую и малую терции, а кварту таким же образом на интервалы $8 : 7$ и $7 : 6$, он получил основные интервалы энгармонической, хроматической и диатонической тональностей. Птолемей с полным правом называет его самым выдающимся из пифагорейских теоретиков музыки.

5. Евдокс развивает дальше теорию Архита. Молодой Аристотель дает популярное изложение основ пифагорейской теории музыки. Платон использует числовые отношения консонансов вместе с арифметической и гармонической средними для построения «гаммы душ» в «Тимее».

6. Гераклид Понтийский, завершитель пифагорейской теории музыки, развивает мысль, что тон представляет совокупность множества отдельных ударов воздуха, которые следуют друг за другом через неощутимо малые промежутки, и что высота тона обуславливается более быстрой последовательностью воздушных ударов. Теофраст и Аристоксен с силой восстают против этого воззрения: для них высота тона определяется не как «сколько», а «как получилось»; однако эту теорию принимают «*Sectio canonis*», «Проблемы теории музыки» и «*De audibilibus*» (все около 300 до н. э.). На основании этой теории ударов вполне удовлетворительно объясняется явление консонанса.

7. Для эмпирической проверки числовых отношений консонансов и опровержения Аристоксена «каноники» производят опыты с монохордом. Они снова отбрасывают «новейшие» гаммы Архита и в согласии с Платоном возвращаются к старой диатонической

гамме с чистыми квинтами и квартами. Один из них добавляет два последних предложения в «*Sectio canonis*».

8. Эратосфен принимает эту диатоническую гамму. Для двух других видов тональностей он вычисляет новые интервалы, в изобии применяя арифметическую и гармоническую средние. Он отказывается от чистой большой терции энгармонической тональности Архита; при этом он вводит в хроматическую тональность чистую малую терцию.

9. Дидим улучшает канон и опять вычисляет новые гаммы. Его диатоническая тональность очень близко подходит к новейшей чистой мажорной гамме.

10. Завершением этого развития является сохранившаяся до нас теория гармонии Птолемея.

B. L. van der Waerden.

[Hermes, 78 (1943), стр. 163—199.]



**НЕКОТОРЫЕ
ЗАМЕЧАНИЯ
ПЕРЕВОДЧИКА**



Теперь мы должны рассмотреть вопросы с авторской, трактовкой которых нельзя согласиться и которые требуют более подробного рассмотрения, чем это можно было бы сделать в подстрочном примечании.

1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ НАШЕЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Вопрос, затронутый автором во второй главе, в настоящее время можно разъяснить почти полностью, и притом в тех же самых пределах, какие берет автор, — от Вавилона до конца средневековья.

При изложении истории вавилонской математики автор во всем основном следует Нейгебауэру. Профессору Нейгебауэру принадлежит громадная заслуга открытия новой области истории математических наук; нельзя упрекать его за то, что он, занятый восстановлением вавилонской математики классической эпохи Гаммураби, не уделил внимания тем процессам, которые происходили в области математики вавилонян до и после этого времени; в результате остались без ответа три вопроса, поставленных автором в начале второй главы.

1. Первый вопрос автор формулирует так: каким образом случилось, что в основание сумерийской системы счисления было положено число 60?

Ответ на этот вопрос записан в сумерийских названиях чисел. Для единицы и двойки существуют особые названия, которые Тюрро-Данжен отождествляет с названием для мужчины и женщины. Название для тройки родственно сумерийскому суффиксу для образования множественного числа. «Четыре» обозначается как $3+1$; для пяти, десяти и двадцати существуют особые названия; остальные числа называются при помощи комбинаций указанных основных терминов: например, шесть обозначается как «пять плюс один», 30 — как «двадцать и десять», 40 — как «дважды двадцать» и 50 — как «дважды двадцать и десять». Все это совершенно ясно показывает, что весь счет шел по пальцевой системе (5, 10, 20). Для 60 употреблялось название *šušī* (аккадское *šuššu*, откуда греческое «сосс»), которое родственно обозначению для пальца (*šu—ši*), что в мерах длины соответствует нашему дюйму (тоже «пальцу»). Значит, и 60 было получено при помощи счета на пальцах.

Можно высказать достаточно правдоподобную догадку относительно того, каким образом это получилось. В римском счете на пальцах единиц обозначались при помощи суставов среднего, безымянного пальцев и мизинца левой руки, а десятки — при помощи изгибаемых особым образом боль-

шого и указательного пальцев левой руки. Сразу видно, что для десятичной системы этот способ неудобен, но три сустава указательного и два видных сустава большого пальца легко могут послужить для обозначения 10, 20, 30, 40 и 50. Таким образом при помощи суставов левой руки можно было вести счет до 59. Далее сумериец говорил «šušī» и переходил к правой руке (римлянин это делал для обозначения сотен и тысяч). На правой руке суставы трех последних пальцев соответствовали «шестидесяткам», а пять суставов большого и указательного — десяткам шестидесятки. Наибольшее число, которое можно было изобразить при помощи пальцев, было:

$$5 \cdot 60 + 9 \cdot 60 + 5 \cdot 10 + 9 = 3559.$$

Следующее за этим число $3600 = 60^2$ считалось самым большим и изображалось кругом — символом бесконечности. В древности счет на этом и заканчивался (это тоже может рассматриваться как подтверждение нашей гипотезы); в дальнейшем развитии сумерийцы сумели выйти за эти границы.

2. Второй вопрос, оставленный автором без ответа, заключается в следующем: каким образом был установлен позиционный принцип вавилонской системы счисления?

Этот вопрос подразумевает еще и другой: *когда* возникла эта позиционность? В хозяйственных текстах 3-го тысячелетия употреблялась шестидесятеричная система, не бывшая позиционной (единицы разрядов для длины, площади, емкости имели особые знаки, которые различались для разных родов величин). Как указывает автор, уже Тюрю-Данжен показал несостоятельность гипотезы Нейгебауэра о происхождении шестидесятеричности из единиц веса: название следующей за шекелем единицы — мины, равной 60 шекелям, писалось не особым знаком, а двумя: «та—на». Это указывает на более позднее происхождение этой единицы. Как говорит Тюрю-Данжен, основной единицей веса был талант (biltu), представлявший максимальную нагрузку, которую мог снести человек. Когда понадобились более мелкие весовые единицы, талант был разделен на 60 мин в соответствии с уже существовавшей системой счисления, а не наоборот.

Появление позиционности относится примерно к 2000 до н. э. — концу 3-й династии Ура или к началу династии Гаммураби. К этому времени относятся первые дошедшие до нас специальные математические тексты.

Ответ на вопрос, *как* возникла позиционность, можно получить, если внимательно рассмотреть обозначения чисел, употребляющиеся в математических текстах. Для записи заданий или ответов, т. е. как раз там, где требуется совершенно точное определение порядка заданного числа, употреблялись или обозначения по старому, описанному выше, непозиционному способу, или же писалось число с прибавлением названия единиц, что тоже не вызвало никаких недоразумений (исключения есть, но они могут быть объяснены или небрежностью записи всего текста, или, наконец, тем, что порядок задаваемого числа был и без того очевиден); для записи же промежуточных вычислений применялась как раз отмеченная автором позиционная система обозначений. Это обстоятельство естественно наводит на мысль, что позиционная система счисления развилась именно в связи с техникой вычислений.

Далее, существенно отметить, что ни в одном математическом тексте (даже в тех, которые не имеют никаких словесных пояснений, т. е. носят черновой характер) нет никаких записей, показывающих, каким образом выполнялись действия умножения или деления. Это обстоятельство (очень печальное, потому что техника вавилонского счета не может быть раскрыта с такой ясностью, как египетская) показывает, что все эти промежуточные умножения и деления делались где-то в стороне. Так как совершенно невероятно, чтобы они делались в уме, то вполне естественно предположить, что они производились на каком-то счетном приборе типа наших счетов или средневекового абака. Гипотеза абака, сразу объясняющая позиционность, отвечает также и на вопрос, почему вавилоняне эпохи Гаммураби не знали нуля: на абаке нуль не нужен, так как соответствующая клеточка просто остается пустой.

Между прочим, гипотеза вавилонского происхождения абака может объяснить одну особенность, которую можно подметить на изображениях саламинского абака (см. рис. 18) или на абаке в изображении спора Пифагора с Бозэцием (см. рис. 27 на стр. 83), а именно деление его линий поперечной чертой на две части. Для русских счетов, возникших на основе десятичной системы, такой поперечной линии не требуется, но она является вполне целесообразной в случае такой системы счисления, когда каждый разряд изображается двузначным числом, как в шестидесятеричной системе.

Таким образом, мы можем представить себе весь процесс вавилонских вычислений в таком виде: автор математического текста выполнял все промежуточные вычисления на абаке и записывал только результаты в том виде, как они получались на счетной доске, читатель же, разбирая математический текст, повторял на абаке все вычисления и сверялся с записью, стоявшей в тексте; при этом отсутствие нуля для него не имело значения.

Дело изменилось во второй половине первого тысячелетия, когда астрономические вычисления потребовали более подробных таблиц для умножения («обратных» чисел); там уже пропуск разряда не мог быть установлен читателем и понадобился знак, равносильный нашему нулю.

3. Последний вопрос автора сводится к следующему: каким образом вавилоняне пришли к введению шестидесятеричных дробей, аналогичных нашим десятичным?

Приводимые автором ответы Нейгебауэра и Тьюро-Данжена нельзя признать удовлетворительными. Правда, в Риме обозначения дробей действительно получились из обозначений для единиц мер, но все же следует отметить, что из римских унций никаких систематических двенадцатеричных дробей не получилось. Если же предположить, что происхождение позиционности связано с техникой счета, то в последней надо искать объяснение и для появления шестидесятеричных дробей.

Тогда следует в первую очередь обратить внимание на специфический способ деления на «правильное» число (не содержащее других множителей, кроме 2, 3 и 5); в этом случае деление сводилось к умножению на «обратное» число, т. е. на число, получающееся от деления какой-нибудь степени 60 на данный делитель (и соответственному делению результата на эту степень 60).

Эту операцию в применении к нашей, системе счисления можно объяснить на следующем примере. Пусть требуется 684 разделить на 250. Так как $250 = 1000 : 4$, то мы можем 684 умножить на 4 (это дает 2736), а затем полученное произведение разделить на 1000; в результате будет 2,736. Поскольку порядок высшей цифры частного может быть определен и до произведения деления, то запись «2736» не приведет к недоразумениям. При таком способе деления шестидесятеричные (в нашем примере — десятичные) дроби получаются совершенно автоматически; кроме того, всякое деление на «правильное» число может быть всегда выполнено без остатка.

Таким образом, автор совершенно напрасно, следуя Датта и Сингху, приписывает индийцам приоритет в изобретении принципа позиционности; как мы видим, этот принцип был в полной мере известен вавилонянам еще за две тысячи лет до начала нашей эры.

Дальнейшая история вавилонского счисления после Гаммураби сводится к постепенному преобразованию шестидесятеричной системы в десятичную.

Начиная с этого времени, когда власть переходит к семитическим народностям, употреблявшим чисто десятичную систему счисления, вавилонское письменное счисление расщепляется: описанная выше система употребляется среди ученых математиков и астрономов (она живет и до сих пор в наших минутах и секундах), в практической жизни система отчасти переделывается в десятичную: кроме обозначений для единицы и десятка, прибавляются еще знаки для обозначения сотни и тысячи (в эпоху Ахеменидов прибавился еще знак для изображения 10 000). Числа до сотни изображались по шестидесятеричной системе, выше сотни — цифрами, показывающими, сколько сотен или тысяч было взято, с обязательным добавлением знака, изображающего слово «сто» (∇) или «тысячу»; например, число 272 записывалось так:

$$\begin{array}{ccc} \nabla \nabla & \nabla & \nabla < \nabla \nabla \\ 2 & 100 & 1, 12 \end{array}$$

Подобный способ обозначения употреблялся уже в хозяйственных текстах конца династии Гаммураби; таким образом получается еще один довод против гипотезы Нейгебауэра: «возникшее из системы мер» счисление не употреблялось как раз в хозяйственных расчетах.

Эта особенность — прибавление названий «сто» и «тысяча» — настолько характерна для поздних стадий развития вавилонской математики, что наличие ее в числовых записях народа какой-либо страны сразу говорит о том, что эта страна, так или иначе находилась под — хотя бы отдаленным — вавилонским влиянием. Это можно сказать о персидской империи времен Ахеменидов; наличие указанных обозначений в числовых знаках кхарошти показывает, что вавилонская система счисления проникла и в Индию. Правда, в это время она, во-первых, делается десятичной и, во-вторых, в ней начинают появляться уже первые знаки для цифр.

Первая стадия отображена в так называемых арамейских папирусах из Элефантины (примерно 5-го века до н. э.), изданных Захау. В изображе-

ниях числа единиц сохраняется имевшаяся уже в классический период группировка по три палочки; знак для десяти при переходе на папирус теряет свою угловатость и изображается дугой (); соединение двух дуг дает знак для двадцати (); шестидесятеричность полностью теряется, обозна-

чения для сотни и тысячи сохраняются; таким образом, появляется система письменного счисления, распространенная у сирийцев, в Иране эпохи Ахеменидов и в Парфии. Позиционность тоже теряется, но зато начинают появляться первые цифровые знаки.

Вторую стадию — появление цифровых знаков — приходится восстанавливать по надписям, главным образом из «Corpus inscriptionum semiticarum». Здесь дело обстоит совсем не так просто, как рисует автор. Несомненным является только индийское происхождение восточноарабских цифр.

Они появились в Багдаде около 775 н. э., как об этом говорит автор, в 9-м веке получили распространение в Иране, в 11-м (а может быть, уже и в 10-м) веке перешли в Византию (византийские схолии к Евклиду). Отличительным признаком этих цифр является изображение нуля в виде точки и его название «пустота» (индийское *sūnya*, арабское *sifr*, откуда латинское *cifra*). В Западной Европе это название для нуля появляется только в 12-м веке.

Что касается западноарабских цифр (Гобар), из которых развились наши современные западноевропейские цифры, то их индийское происхождение (как утверждает автор вместе с Меннингером) является более чем сомнительным. Особенность этих цифр заключается в следующем: ноль или совсем не имеет особого знака, или изображается в виде кружка; этот кружок-ноль носил название *sipos* (искаженное *ṣṭṭos* — счетный жетон), или *thesa* (греческое *θήσα* — вместилище, пустая коробка счетной доски, в которую не надо было класть жетона), или, наконец, *gota* (латинское «круг»); кроме того, название *ghūbar* (по-арабски «пыль», связано с еврейским *abaq* — пыль) показывает, что цифры Гобар были первоначально знаками на жетонах абака. Эти цифры были известны в магометанской северо-западной Африке уже в 10-м веке, и никто из современников не называл их ни индийскими, ни арабскими; писатель 12-го века, известный еврейский философ Маймонид, называет их «римскими узлами» (см. Solomon Gandz, *The knot in the Hebrew Literature*, Isis, XIV, 1930, стр. 189).

Индийское происхождение современных западноевропейских цифр отвергал профессор киевского университета историк Н. М. Бубнов. В своей книге «Происхождение наших цифр» он следующим образом толкует возникновение наших цифровых знаков. Цифры 1, 2 и 3 представляют соответственно одну, две и три палочки, написанные горизонтально, как в наших, или вертикально, как в восточноарабских цифрах; четверка произошла из знака креста (X), пятерка — от изображения руки с отодвинутым большим пальцем (V). Толкование знаков для первых трех цифр является в настоящее время общепризнанным. Знак + или X для четверки обнаружен на почве Бактрии в 3-м веке до н. э., в надписях иранских Сассанидов и в Хорезме

(С. П. Толстов); имеется он также в набатейских надписях (1-й век до н. э.) и в цифровых знаках кхарошти в Индии. Знак для пяти впервые встречается в ассирийской надписи 7-го века до н. э. (и, вероятно, представляет заимствование из Малой Азии, откуда произошел и аналогичный знак для римской пятерки); он имеется в палмирских надписях 2—3-го веков н. э. и в набатейских надписях 1-го века н. э. Что касается остальных цифр, то можно сказать только, что они возникли после 2-го века н. э.; относительно их происхождения можно лишь строить гипотезы. Знак для восьми естественно получается из комбинации двух четверок ($\times \times = \infty$, счетный жетон на абаке можно было перевертывать как угодно). Для остальных знаков наиболее вероятным (с точки зрения пишущего эти строки) является их происхождение от соответствующих алфавитных греческих цифровых знаков: для шестерки

Ϛ, для семерки дзета Z или 7, для девятки тэта θ. Рассмотрение

цифровых знаков на таблицах автора (см. стр. 72 и 73) показывает, что отмеченные выше знаки для 4 и 5 попали и в Индию.

Нужно, впрочем, сказать, что все вышеизложенное касается происхождения только *начертаний* цифровых знаков. Индийцы сделали больше: они так или иначе восстановили уже утерянный принцип позиционности и сознательно использовали его для *письменного* счисления (на абаке он появляется совершенно автоматически, когда записывается готовый результат, в то время как в индийской системе счисления письменно проводятся и самые вычисления). Таким образом, окончательное суждение автора о вкладе Индии в современную арифметику безусловно является правильным.

В заключение надо несколько уточнить сведения, сообщаемые автором о Герберте. В Испании Герберт был только в так называемой Испанской марке — принадлежавшей христианам северо-восточной части Каталонии. Абак, меченые жетоны и цифры Гобар были известны ему еще до испанского путешествия. «Arices» не жетоны, но лишь изображения на них; ниоткуда не видно, что они являются собственным изобретением Герберта; о нем самое большее можно сказать, что он не чертил цифровых знаков на жетонах, а вырезывал их из рога или чего-либо подобного.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТАБЛИЧКА 015189 ЛЕНИНГРАДСКОГО ЭРМИТАЖА

Формула для определения средней линии трапеции

$$l = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

связана с интересной математической табличкой 015189, опубликованной в №10 «Эпиграфики Востока» (1955 год) А. А. Вайманом (см. таблицу на стр. 443). Содержащиеся в этой табличке ряды чисел составляют некоторую параллель к знаменитому тексту Plimpton 322.

В горизонтальных рядах (1) — (5) отмечены высоты трапеций, в вертикальных рядах — длины верхних и нижних оснований; площади трапеций

равны соответственно 6 и 30. Отношения высот в каждом горизонтальном ряду равны $4 : 2 : 6 : 4$, а отношения оснований равны $1 : 5 : 7 : 13 : 17$. Основания, соответствующие нечетным номерам, дают длины оснований в узком смысле этого слова, а соответствующие четным номерам дают длины линий, делящих площадь трапеции пополам, как это показывают величины площадей соответствующих частей 6,6 и 30,30.

Recto					Verso				
(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
2,16	15	22,30	7,30	15	68	30	45	15	30
	30	1,44	56	40		52	28	20	4
			6	6		30	30	6	6
1,45	20	30	10	20	2,7,30	16	24	8	16
	30	1,18	42	30		1,37,30	52,30	37,30	7,30
			6	6		30	30	6	6
2,43,12	12,30	18,45	6,15	12,30	2,2,24	16,40	25	8,20	16,40
	30	2,4,48	1,7,12	43		1,33,34	50,24	36	7,12
			6	6		30	30	6	6
1,53,20	18	27	9	18	2,50	12	18	6	12
	30	1,26,40	46,40	33,20		2,10	1,10	50	10
			6	6		30	30	6	6
56,40	36	54	18	36	1,25	24	36	12	24
	30	43,20	33,20	16,40		4,5	35	25	5
			6	6		30	30	6	6

Если основания мы обозначим через x и z , а среднюю линию через y , то для определения этих величин в целых числах на основании приведенной выше формулы будем иметь уравнение

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 0,$$

что можно представить в виде

$$(x+z)^2 + (x-z)^2 = (2y)^2.$$

Таким образом, задача оказалась приведенной к пифагорейским тройкам

$$(x+z) : (x-z) : 2y = (2nm) : (n^2 - m^2) : (n^2 + m^2),$$

откуда

$$x : y : z = [(m+n)^2 - 2m^2] : (m^2 + n^2) : [(m+n)^2 - 2n^2],$$

где m и n —любые числа, дающие для x и z положительные величины. Давая

m и n последовательные значения 1,2; 2,3; 3,4 и т. д., получим следующую таблицу:

m	n	x	y	z
1	2	7	5	1
2	3	17	13	7
3	4	31	25	17
4	5	49	41	31
5	6	71	61	49

Эти значения составляют последовательность 1, 5, 7, 13, 17, 25, 31, 41, 49, 61, 71,...

Первые пять членов этой последовательности как раз употреблены в разбираемой таблице. В тексте АО 17264 (МКТ I, стр. 123—133), где дело тоже идет о делении трапеции на попарно равновеликие части, составитель воспользовался для оснований и средних линий числами 51, 75, 93, 123, 147, 183, 213, сократив которые на 3, получаем 17, 25, 31, 41, 49, 61, 71. Таким образом, вавилоняне знали 11 чисел вышеуказанной последовательности.

Что касается рассматриваемой таблицы, то, по всей видимости, она (так же как и Plimpton 322) применялась в школьном обиходе для составления таких геометрических задач, в которых элементы рассматриваемых фигур выражались бы рациональными числами.

III. ИОНИЙСКАЯ И ПИФАГОРЕЙСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Автор дал очень интересную характеристику Фалеса, с которой, безусловно, можно согласиться; удивительно только, что автор ничего не говорит о дальнейшем развитии геометрии Фалеса, хотя последний, несомненно, имел продолжателей. Одного из них мы можем назвать: это был Энопид Хиосский, которого автор почему-то считает пифагорейцем.

О начальных стадиях развития греческой геометрии мы можем составить представление, если воспользуемся тем же самым методом анализа «Начал» Евклида, который дал такие важные результаты для истории греческой математики 5-го и 4-го веков до н. э.

Внимательное чтение первой книги «Начал» показывает, что в ней употребляются два различных понятия о равенстве: в первой половине (приблизительно до теории параллельных прямых) равными называются фигуры, которые при наложении совмещаются, а во второй половине — фигуры, имеющие одинаковую площадь. Чувствуется, что в первой книге мы имеем механическое соединение результатов, полученных двумя различными школами. Какие это были школы, мы можем установить по написанному Проклом комментарию к первой книге «Начал»: все исторические ссылки для первой половины книги ведут к Фалесу и Энопиду, т. е. к ионийцам, а для второй половины — к пифагорейцам.

Кроме первой половины первой книги «Начал», плодом деятельности ионийской школы является и посвященная окружности третья книга, содержащая теорему Фалеса о прямом угле в полуокружности. Характер построений Энопида (при помощи циркуля и линейки) показывает, что в противоположность пифагорейцам ионийская школа большое значение придавала построениям с окружностью *).

Что касается пифагорейской школы, плоды деятельности которой мы имеем во второй половине первой книги, во второй и в четвертой книгах «Начал», то для нее характерным является именно представление о фигурах, как о некоторых величинах; фигуры считались составленными из точек, как числа из единиц (характерно пифагорейское определение точки как монады, имеющей положение).

Если при исследовании ионийской геометрии мы можем думать об определенной связи с Вавилонией, где построения при помощи циркуля и круговые орнаменты встречаются и в математических текстах и в произведениях искусства (так, теорему Фалеса знают и вавилонские математические тексты), то для пифагорейцев гораздо более вероятными являются связи с Египтом, по крайней мере на первых стадиях развития. Может быть, даже отсутствие упоминания об окружности в пифагорейской геометрии связано с тем, что в Египте циркуль был неизвестен до эллинистической эпохи (когда надо было нарисовать круг, египтянин сначала рисовал квадрат, а затем вписывал в него от руки круг).

История Самоса—родины Пифагора — в течение 6-го века до н. э. нам достаточно хорошо известна по Геродоту. Две особенности характерны для этой истории: во-первых, Самос в эпоху Пифагора при тиране Поликрате Самосском находился в очень тесной связи с Египтом, во-вторых, Самос был крупным инженерным и архитектурным центром тогдашней Греции (кроме туннеля Евпалина, Геродот описывает и другие сооружения самосцев). Самос обладал и скульптурной школой: два его скульптора, Феодор и Ройк, изваяли человеческую статую, разделив работу пополам — один сделал верхнюю, а другой нижнюю половину статуи. «Это показалось очень удивительным для современников, — говорит по этому поводу Диодор Сицилийский в своей „Исторической библиотеке“, — но у египтян это является обычным: два скульптора, согласившись в длине основной единицы, могут совершенно отдельно друг от друга приготовить статую, зная пропорции человеческого тела». Конечно, изготовленные таким образом статуи скорее должны были походить на массовые изделия серийного производства, но тем не менее это обстоятельство объясняет нам одновременно и модулярную теорию греческой архитектуры, и смысл основного положения пифагорейской философии: «все есть число». Сущность каждого здания и вообще каждого предмета заключается в его пропорциях; характерны не столько величина или материал,

*) Впрочем, последняя теорема третьей книги (о произведении отрезков секущей) вряд ли принадлежит ионийцам: различение (вообще говоря, ненужное) случаев прямого, острого и тупого угла напоминает Гиппократу Хиосского.

из которого сделан данный предмет, сколько числовые отношения между его частями: если указать эти соотношения, то предмет будет вполне определен. Это равносильно тому, как мы, например, определяем воду химической формулой H_2O ; такого рода «формулы», явно пифагорейского происхождения, действительно имеются у философа Эмпедокла; составными элементами являются четыре стихии, из которых, по Эмпедоклу, образуются в определенных соотношениях мясо и кости.

Принцип «все есть число» привел в области геометрии к своеобразному математическому атомизму и сделал существенно важным исследование целочисленных отношений. В конкретном выборе этих отношений Пифагор руководился музыкальными гармониями; выяснение этого факта является большой заслугой ван дер Вардена. Он также прав в своих предположениях о вавилонском происхождении теории соотношений между длиной струны и высотой тона: искать следы этой теории нужно в устройстве музыкальных струнных инструментов Вавилонии, которые в эпоху Нового царства проникли в быт Египта вместе с вавилонской клинописью, бывшей официальным языком в сношениях с Сирией. Это, между прочим, делает излишним предположение о путешествиях Пифагора в Вавилонию.

Сказанное никоим образом не касается теории автора, который вместе с Нейгебауэром находит вавилонские истоки для греческой геометрической алгебры: все дело зависит только от времени проникновения этих знаний из Вавилона в Грецию. Для установления этого обстоятельства следует несколько детальнее разобраться в структуре второй книги «Начал» Евклида. В последней можно выделить следующие основные части:

1°. Предложения 1—4 и 7—8, заканчивающиеся выводом квадратов суммы и разности. Предложения 5 и 6 разрывают связь между 4 и 7. В начале 7-го предложения говорится « $\kappa\alpha\tau\alpha\gamma\epsilon\gamma\rho\alpha\phi\theta\omega\ \tau\acute{o}\ \sigma\chi\eta\mu\alpha$ » — «вычертим (определенную) фигуру (квадрат с гномоном)». Фигура, на основании которой доказывается II, 7, та же самая, что фигура II, 4, и не совпадает с фигурами II, 5—6. Важно отметить в этой связи, что Евклид всегда полностью описывает построение нужного ему чертежа; поэтому указанные слова должны принадлежать тому источнику, из которого черпает Евклид.

2°. Предложения 5—6 о прямой, разделенной на равные и неравные части, представляющие геометрическую интерпретацию вавилонских нормальных уравнений второй степени. В дальнейшем эти предложения применяются для доказательства II, 11 и II, 14. Затем они применяются в шестой книге для доказательства VI, 28, 29 (приложения с избытком и недостатком); характерно, что в этих предложениях употребляется то же выражение $\kappa\alpha\tau\alpha\gamma\epsilon\gamma\rho\alpha\phi\theta\omega\ \tau\acute{o}\ \sigma\chi\eta\mu\alpha$.

3°. Предложения 9—10, дающие геометрическую интерпретацию второго типа вавилонских нормальных уравнений второй степени.

4°. Предложения 12—13, представляющие обобщения теоремы Пифагора на косоугольные треугольники.

В дальнейшем нас будут интересовать только предложения, упомянутые в двух первых пунктах.

Та же самая формула $\kappa\alpha\tau\epsilon\gamma\gamma\rho\acute{\alpha}\phi\theta\omega\ \tau\acute{o}\ \sigma\chi\eta\mu\alpha$ встречается в описаниях построений первых пяти предложений XIII книги; следовательно, можно предположить, что и эти пять предложений относятся к источнику, упомянутому в 1°.

Таким образом, нам придется рассмотреть две гипотезы: либо теоремы II, 1—8 и XIII, 1—5 принадлежат одному источнику, либо двум разным, но достаточно близким друг к другу.

Поскольку вся принадлежащая Теэтету книга XIII представляет резко выраженное единство и целеустремленность, а упомянутые предложения II, 1—8 и VI, 27—29 не имеют отношения к разбираемой Теэтетом теме, то верным должно быть, конечно, второе предположение. Тогда естественно думать, что предложения II, 1—8 и VI, 27—29 взяты Евклидом из употреблявшегося в платоновской Академии учебника геометрии (может быть, составленного Февдием из Магнезии), и краткое упоминание Теэтета о « $\tau\acute{o}\ \sigma\chi\eta\mu\alpha$ » объясняется тем, что эта $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ была настолько распространенной в школе Платона, что не требовала специальных разъяснений.

Это обстоятельство говорит в пользу сравнительно позднего появления вавилонской алгебры в греческой математике. Относить ее к Пифагору не приходится уже на том основании, что по существу геометрическая алгебра могла появиться только после кризиса пифагореизма, когда вавилонскую алгебру вычислений пришлось перерабатывать в греческую геометрию построений.

Но заполненная греко-персидскими войнами первая половина 5-го века вряд ли была особенно удобной для тесных сношений между Грецией и Вавилонией; подходящая эпоха могла сложиться только во второй половине 5-го и в начале 4-го века.

В пользу сравнительно позднего распространения вавилонской математики можно привести еще одно соображение. Общеизвестно, что современные названия планет происходят от греческих, а последние в свою очередь представляют переделку вавилонских: Меркурий — Набу, Венера — Иштар, Марс — Нергал, Юпитер — Мардук, Сатурн — Нинурта (раньше читали «Ниниб»). В Греции соответствующие названия появились только в эпоху Платона; пифагорейцы же для обозначения планет пользовались другими названиями: Сатурн — $\Phi\alpha\iota\nu\omicron\nu$ (говорящий), Меркурий — $\Sigma\tau\acute{\iota}\lambda\beta\omicron\nu$ (мерцающий), Венера — $\Phi\acute{\omega}\varsigma\phi\omicron\rho\omicron\varsigma$ (утренняя) и $\text{''}\text{Εσπε\rho\varsigma$ (вечерняя) и т. д. Таким образом, более вероятно, что геометрическая алгебра появилась в Греции около 400 до н. э.

IV. АРХИМЕД

Блестящая характеристика Архимеда, данная Плутархом в «Жизни Марцелла», соблазнила многих историков математики; к их числу, по-видимому, следует отнести и автора данной книги, поскольку он не дает другой, отличной от плутарховой, характеристики Архимеда. Однако не так уж трудно, анализируя более близкие к Архимеду источники, восстановить истинный облик Архимеда.

Среди этих источников на первом месте следует поставить описание осады Сиракуз, данное Полибием в восьмой книге его «Истории». Внимательное чтение этого описания показывает, что римляне хотели взять Сиракузы сразу же после своего прихода, но после неудачного приступа новых попыток не делали. Это обстоятельство в полной мере исключает версию об «импровизации» защиты Сиракуз Архимедом, которого опасность, грозящая родному городу, будто бы оторвала от его «отвлеченных» математических занятий. Наоборот, все данные указывают, что приготовления к обороне Сиракуз были сделаны Архимедом заблаговременно и еще при жизни царя Гиерона, который дал необходимые для этого средства. Таким образом, Архимед был главным военным инженером царя Гиерона и, по-видимому, служил немалое время в этой должности.

На это указывает, между прочим, и хронология сохранившихся его произведений.

Совершенно точно из собственных слов Архимеда в его введениях к сочинениям устанавливается хронологическая последовательность основных произведений Архимеда, так называемых «посланий к Досифею», именно:

1. Квадратура параболы.
2. Две книги о шаре и цилиндре.
3. О спиралях.
4. О коноидах и сфероидах.

Мы даже знаем, что «Коноиды» по первоначальному плану должны были выйти в свет ранее трактата о спиралях, но Архимеда задержала точная разработка доказательства.

Из остальных произведений Архимеда «Равновесие плоских фигур» (которое многие авторы без достаточных оснований разделяют на два сочинения) было написано несомненно после «Квадратуры параболы», и, вероятно, после «Коноидов». Затем после «Коноидов» был написан «Метод», если судить по его содержанию и по собственным словам Архимеда в предисловии (хотя в предисловии «Коноиды» специально Архимедом не упоминаются). Наконец, трактат «О плавании» был написан после «Метода» (центр тяжести сегмента параболоида, данный в «Метод» уже предполагается известным). Поскольку вторая книга этого сочинения является определенно незаконченной (характер изложения ее конца и отсутствие разбора равновесия плавающего вершиной вверх сегмента в последнем рассматриваемом случае плавания), то весьма возможно, что это произведение было самым последним в ряду сочинений Архимеда.

Наконец, «Исчисление песка» было написано после «Измерения круга». Что касается последнего сочинения, дошедшего до нас в испорченном виде, то примененная в нем форма метода исчерпывания одинакова с той, которая имеется в трактатах о спиралях и о коноидах. Это позволяет думать, что и рассматриваемое сочинение, во всяком случае, написано не раньше упомянутых двух трактатов и позже «Шара и цилиндра» и второго математического доказательства для квадратуры параболы (в нем применяется метод Евдокса в чистом виде, т. е. с подходом к измеряемой величине только с одной стороны, а именно снизу). Таким образом, с вероятностью, близкой к достоверности,

можно утверждать, что самым ранним из всех дошедших до нас произведений Архимеда была «Квадратура параболы». Это утверждение обладало бы полной достоверностью, если бы в механическом доказательстве Архимед не заключал определяемой площади между двумя границами сверху и снизу, как он делал это во всех остальных произведениях (впрочем, эти две границы для площади параболы получаются не при помощи вписанных и описанных фигур, как во всех позднейших произведениях).

Мы знаем, что «Квадратура параболы» была написана после смерти Конона. Теперь, если верить византийскому писателю 12-го века Иоанну Цеци, в год взятия Сиракуз римлянами (212 до н. э.). Архимеду было 75 лет; этим определяется год рождения Архимеда — 287 до н. э. Далее, мы знаем, что Конон был еще жив в 246 до н. э. — начало третьей сирийской (Лаодикийной) войны и похода Птолемея III Эвергета в Сирию (с которым связан анекдот о волосах Вереники). Таким образом, при самом осторожном подходе можно заключить, что первое дошедшее до нас полностью сочинение Архимеда было написано им уже на пятом десятке лет.

Мы можем еще более уточнить эту дату, если учтем то обстоятельство, что Архимед был главным военным инженером царя Гиерона. Почти невозможно, чтобы он мог уехать из Сиракуз ранее окончания первой Пунической войны (241 до н. э.), когда Сиракузы находились между двух огней — Римом и Карфагеном. Таким образом, поездка Архимеда в Александрию могла иметь место не ранее 240 до н. э. В Александрии Архимед был знаком с Кононом и Эратосфеном. С первым он мог познакомиться еще в Сицилии, где Конон, как мы знаем, производил астрономические наблюдения, но для Эратосфена это исключается; появление же Эратосфена в Египте относится ко времени около 240 года, после смерти Каллимаха, придворного поэта и первого директора Александрийской библиотеки.

Все эти соображения делают почти несомненным тот факт, что отвлеченные математические занятия Архимеда начались, когда ему было уже около пятидесяти лет. До этого, как вполне естественно предполагать, Архимед занимался главным образом механикой. Отрывки из его более ранних механических произведений имеются в сравнительно недавно найденной «Механике» Герона. Свои механические познания (в частности, установление понятия о центре тяжести — определение Архимеда сохранилось в восьмой книге «Собрания» Паппа) Архимед перенес и в математику. Таким образом, легенду об Архимеде как кабинетном ученом следует оставить на совести Плутарха, тем более, что она противоречит сведениям об Архимеде, находящимся у других писателей (см. сводку характеристик Архимеда Ver Eecke в предисловии к его переводу сочинений Архимеда).

V. ГЕРОН

Несомненно принадлежат Герону следующие произведения: «Определения», три книги недавно открытой в арабском переводе «Механики», в которой, между прочим, содержатся отрывки из ранних механических произведений Архимеда, две книги «Пневматики», во введении к которым, как по-

казал Дильс, Герон использовал теории Стратона Лампсакского, а в самом тексте—вероятно, соответствующий отдел не дошедшей до нас целиком большой «Механики» Филона Византийского, затем «Автоматы», часть которой тоже явно списана у Филона, уже знакомая нам «Диоптра», затем книга о построении метательных машин («*Belopoika*»), в которой имеется имя Ктезибия (александрийского механика 2-го века до н. э., учеником которого некоторые историки считали Герона, — на самом деле он, по-видимому, был просто его компилятором), и, наконец, недавно открытая «Метрика», на которую имеются ссылки у других античных писателей (в частности, у Евтокия в комментарии к Архимедову «Измерению круга»); она, по-видимому, и была действительно «самой популярной математической» книгой Герона, как сказано у ван дер Вардена в голландском издании 1950 года и в английском переводе. Значение «Метрики» заключается в том, что она представила документальное доказательство употреблявшегося у греков, восходящего еще к вавилонянам способа извлечения квадратного корня, который настолько прост, что заслуживает введения в наши технические школы. Способ этот позволяет, зная приближенное значение квадратного корня, получить ряд дальнейших приближенных его значений с какой угодно степенью точности. Он заключается в следующем. Пусть, например, требуется найти $\sqrt{30}$. Ближайший квадрат будет 25 и первое значение корня 5. Это будет значением корня из 30 с недостатком. Если мы разделим подкоренное выражение 30 на 5, то получим приближенное значение $\sqrt{30}$ с избытком, а именно 6. Возьмем среднее арифметическое $\frac{5+6}{2} = 5,5$: это будет дальнейшее приближенное значение корня (тоже с избытком). Если разделим подкоренное выражение на это значение, то получим его значение с недостатком. Взяв опять среднее арифметическое, получим еще более близкое значение корня и т. д. Интересна связь этого метода со средними пропорциональными. Пусть подкоренное выражение представлено в виде произведения двух множителей a и b , достаточно близких друг к другу. Тогда истинное значение корня $\sqrt{ab}$ будет средним геометрическим между a и b , первое приближение с избытком $\frac{a+b}{2} = x_1$ будет их средним арифметическим, а соответствующее приближение с недостатком $\frac{ab}{x_1} = x_2$ будет средним гармоническим для a и b , как не-

трудно проверить: $\frac{1}{x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ Кроме этих произведений, существует довольно большое число произведений, носящих имя Герона, некоторые из которых относятся даже к византийской эпохе. К числу этих произведений, как согласен и сам автор, принадлежит и разбираемая им «*Geometrica*».

VI. УПАДОК ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Соображения, высказанные автором по вопросу об упадке греческой математики, очень интересны, но, по существу, не решают проблемы; более того, приводимые автором данные ставят под вопрос самый факт упадка.

Автор совершенно правильно указывает, что в области астрономии мы имеем непрерывное развитие от Аполлония и Гиппарха до Коперника и Кеплера. Если так, то надо было бы поставить вопрос в другой форме: почему около 200 до н. э. так изменился характер греческой математики, что вместо геометрии доминирующую роль стала играть астрономия? К слову сказать, гегемония астрономии в области математики сохранялась примерно до начала 19-го века: до этого времени и математика и механика были «служанками астрономии».

Большой заслугой автора является то, что он показал влияние вавилонской математики на греческую; но, к сожалению, вопрос о влиянии вавилонской астрономии на греческую науку остался совершенно неосвещенным. Правда, история развития вавилонской астрономии недостаточно хорошо известна даже специалистам; для большинства историков неспециалистов остается неизвестным даже тот факт, что в течение 6—2 веков до н. э. имели место огромные достижения вавилонских астрономов-вычислителей. Поэтому не будет излишним осветить здесь этот вопрос хотя бы в самых кратких чертах.

Шестой век до н. э. — век рождения греческой науки — был переломным не только в истории Греции, но и в истории всего восточного Средиземноморья. Политические перевороты, связанные с образованием ассирийской, нововавилонской, мидийской и персидской монархий, привели к полному крушению местных религий, когда каждый народец или город имел своего собственного бога-покровителя. Так как эти божества не смогли защитить своих подопечных, то прежняя слепая вера в могущество богов пропала. Религия уже перестала играть доминирующую роль в объяснении явлений природы. Если когда-то в вавилонской легенде сотворение мира считалось делом бога, то около 300 до н. э. вавилонский историк, жрец Берос, считает эту легенду простой аллегорией, а в 1-м веке до н. э. Диодор Сицилийский пишет, что вавилоняне просто отвергали всякое божественное вмешательство при образовании мира. Они думали, что судьбы народов определяются не отдельными богами-мироправителями, а вечным мировым законом — фатумом или роком, направляющим ход событий по строго определенным путям. Выразителями этого неумолимого рока сделались небесные явления, а прежние боги-мироправители стали лишь богами планет, возвещающими и проводящими в жизнь предначертания рока; с земли они перенеслись на небо и стали богами-правителями отдельных планет. (Дошедшие до нас через римлян и греков названия планет происходят, как мы уже говорили, от вавилонских.)

Мы можем довольно точно определить эпоху, когда произошли эти изменения в мировоззрении древних вавилонян. От 8—7-го веков до нас дошло большое количество донесений придворных гадателей ассирийским царям. В этих донесениях большое место занимали небесные знамения; мы узнаем, что вавилонские астрономы производили наблюдения ожидавшихся солнечных и лунных затмений (к этого рода предсказаниям автор совершенно правильно относит и предсказание солнечного затмения Фалесом), записывали положения различных планет и на основании расположения планет делали предсказания и давали советы относительно грядущих событий в жизни государства.

В связи с более детальным исследованием движений планет были установлены двенадцать зодиакальных созвездий. Эпоху их появления можно определить с достаточной точностью: в донесениях придворных астрологов 8—7-го веков они еще не играют роли, но в конце 6-го века их уже знает греческий астроном Клеострат Тенедосский, а в вавилонских астрономических текстах несколько более поздней эпохи они являются основой для исследования планетных движений. Кроме того, в донесениях ассирийских астрологов планеты носят еще старые «небожественные» названия. Таким образом, за исключением отождествления планеты Венеры с богиней Иштар, которое относится к более отдаленной эпохе [троица Шамаш (Солнце), Син (Луна), Иштар (Венера)], остальные переименования были произведены в 7-м или 6-м веке, на что указывает посвящение Юпитера, самой яркой планеты после Венеры, городскому богу столицы Вавилона Мардуку. Что касается Набу и Нергала, то они были городскими богами Борсиппы (предмесье Вавилона) и Куты-Сиппара (библейские *Sepharvaim* = два Сиппара), центров двух астрономических школ; Иштар была божеством Урука, третьего астрономического центра, а аналогичный Сатурну бог осеннего солнца Нинурта (библейский дикий охотник Немврод) принадлежал к сонму богов Ниппура, религиозной столицы древних шумерийцев, и почитался также и у ассирийцев.

Регулярные астрономические наблюдения в древнем Вавилоне велись с 747 до н. э. (так называемая эра Набонассара); на основании этих наблюдений были установлены достаточно точные величины продолжительности солнечного года и различных лунных месяцев и можно было, начиная с 6-го века, попытаться установить правила чередования лет со вставочными месяцами (вавилонский календарь был основан на лунных месяцах в $29\frac{1}{2}$ суток; так как $12 \times 29\frac{1}{2} = 354$, то двенадцать лунных месяцев на 11 дней отличаются от солнечного года в $365\frac{1}{4}$ суток; поэтому для согласования календаря с солнечным годом, управляющим всеми сельскохозяйственными работами, приходилось иногда вставлять тринадцатый месяц). Эти попытки привели к установлению в начале 4-го века до н. э. девятнадцатилетнего цикла, в котором было точно определено, в каких по порядку годах должны вставляться дополнительные месяцы. (Вавилонский календарь с 19-летним циклом до сих пор существует в еврейском летосчислении и отчасти в христианском церковном календаре при определении времени переходящих праздников).

После этого вавилоняне перешли к определению планетных движений; в 3-м веке они уже могли предвычислять движения планет и затмения Солнца и Луны; на основании полученных ими наблюдений оказалось возможным внести некоторые исправления в астрономические таблицы затмений 19-го века: вавилонские астрономы обладали почти 500-летними непрерывными наблюдениями, тогда как в Западной Европе непрерывные наблюдения стали вести лишь с начала 18-го века (впервые — в Гринвиче).

Факт создания вавилонской вычислительной астрономии имеет громадное значение не только для истории древней науки, но и для истории науки вообще. Современное естествознание, по существу, основывается на трех принципах: экспериментальное установление фактов, рациональное логи-

ческое построение создаваемых теорий и установление их соответствия с действительностью, наконец, возможность математического представления процессов природы. Первый принцип был введен в жизнь западноевропейской наукой 17-го века, необходимость логических доказательств была признана учеными классической Греции, что же касается идеи математической представимости процессов природы, то она принадлежит вавилонской математике. Греческая геометрия, по существу, носила статический характер и не имела отношения к представлению естественных процессов, физика рассматривалась как часть философии и отделялась от математики (единственное исключение представляет Архимед), причем это отделение долго имело место даже в западноевропейской науке; идея вычисления и предвычисления явлений природы впервые ясно проявилась только в астрономии и на вавилонской почве, почти одновременно с возникновением греческой натурфилософии и геометрии. Наибольшего успеха вавилонская вычислительная астрономия достигла примерно в 3-м веке до н. э., и с этого времени вычислительные методы вавилонской астрономии начинают проникать в Грецию. С греками у вавилонян установились отношения лучшие, чем у других народов, населявших Переднюю Азию: эллинистические монархи династии Селевкидов покровительствовали вавилонской религии и культуре, видя в народах Двуречья некоторую опору против племен Ирана, постепенное высвобождение которых от власти греков началось уже менее чем через сто лет после завоевания Александра.

Вавилонская астрономия достигла наибольших успехов в то время, когда самостоятельное политическое существование Вавилонии было закончено; последнее обстоятельство не могло не наложить тяжелого пессимистического оттенка на мышление древневавилонских ученых; в этом отношении очень характерен зародившийся на востоке стоицизм, имевший в основе ясно видные материалистические черты, но признававший фатум, веления которого можно разгадать по различным знамениям, в первую очередь по небесным явлениям. Для стоицизма астрономия играла приблизительно такую же роль, как геометрия для философии Платона; она давала ему научное обоснование и позволяла предвидеть будущее при помощи предвычисления положений планет для любого момента времени.

Стоическая философия, содержащая элементы примирения с действительностью, нашла для себя благодатную почву среди греков, живших под властью эллинистических монархов. Но эти монархи были очень кроткими и милостивыми по сравнению с тем новым претендентом на мировое владычество, который в лице римского государства появился на мировой арене.

Первая половина 2-го века до н. э. была временем, когда римляне по окончании второй Пунической войны в течение каких-нибудь пятидесяти лет подчинили своему владычеству почти все государства Средиземноморья. Тяжелая финансовая эксплуатация, которой римские откупщики подвергли покоренные государства, еще более способствовала росту пессимистических настроений в среде греческого общества, а затем и общества эпохи Римской империи. Вплоть до конца 2-го века н. э. стоицизм оставался наиболее излюбленной философией высших слоев римского общества; вместе со стоицизмом

развивалась и астрономия как научная основа тех астрологических учений, которые заполнили умы римлян эпохи поздней империи, а это наложило отпечаток и на характер математики, которая сделалась как бы «служанкой астрономии», недаром для императора Юстиниана математик был синонимом астролога.

Дальнейшие изменения в истории математики уже тесно связаны с общим передвижением культурных центров при смене рабовладельческой формации на феодальную и уже выходят за пределы времени, описываемого в переводимой книге.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	5
Предисловие автора к английскому изданию 1954 года	7
Предисловие автора к немецкому изданию 1956 года	8
От автора	8
Несколько слов к читателю	9

ЕГИПЕТСКАЯ И ВАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА

Глава I. Египтяне	18
Хронологический обзор	18
Египтяне как «изобретатели геометрии»	18
Папирус Ринда	19
Для кого был написан папирус Ринда?	19
Сословие царских писцов	20
Техника счета	22
Умножение	22
Деление	24
• Натуральные и основные дроби	24
Вычисления с натуральными дробями	26
Дальнейшие соотношения между дробями	28
Удвоение основных дробей	28
Еще раз деление	29
Таблица (2 : n)	30
Красные вспомогательные числа	33
Дополнение суммы дробей до 1	34
Деление $37 : (1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7})$	35
Вычисления «аха»	37
Прикладные вычисления	39
Развитие техники счета	40
Гипотеза о высшей науке	41
Геометрия египтян	41
Подъем наклонных плоскостей	42
Площади	42
Поверхность полушара	44
Объемы	45
Чему греки могли научиться у египтян?	48
Глава II. Системы счисления, цифры и техника счета	50
Шестидесятеричная система	51
Как возникла шестидесятеричная система?	54

Сумерийская техника вычислений	57
Нормальная таблица обратных величин	58
Квадраты, квадратные и кубические корни	59
Греческие обозначения чисел	62
Счетная доска и счетные камни	64
Вычисления с дробями	66
Шестидесятеричные дроби	70
Индийские цифры	71
Цифровые знаки: кхарошти и брахми	73
Изобретение позиционной системы	73
Время изобретения	74
Числа поэтов	75
Ариабхата и его числа-слоги	76
Где появился ноль?	77
Победное шествие индийских цифр	78
Счетная доска (абак) Герберта	80
 Глава III. Вавилонская математика	84
Хронологический обзор	84
Вавилонская алгебра	85
Квадратные уравнения	94
Геометрическое доказательство алгебраических формул?	97
Учебный текст	100
Вавилонская геометрия	102
Площади и объемы	102
Усеченные конусы и пирамиды	102
Теорема Пифагора	103
Вавилонская арифметика	105
Ряды	105
«Plimpton 322»: Прямоугольные треугольники с рациональ- ными сторонами	106
Прикладная математика	109
Заключение	109

ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Глава IV. Век Фалеса и Пифагора	113
Хронологический обзор	113
Эллада и Восток	114
Фалес Милетский	119
Предсказание солнечного затмения	121
Фалес как геометр	121
От Фалеса до Евклида	125
Пифагор Самосский	127
Путешествия Пифагора	129
Пифагор и учение о гармонии	132
Пифагор и учение о числах	133
Совершенные числа	135
Дружественные числа	136
Фигурные числа	136
Пифагор и геометрия	138
Астрономия Пифагора	140
Заключение	141
Самосский туннель	141
Античные измерительные инструменты	145

Глава V. Золотой век	148
Гиппас	149
«Mathemata» пифагорейцев	151
Теория чисел	151
Учение о четном и нечетном	152
Числовые отношения и делимость целых чисел	155
Решение систем уравнений первой степени	162
Геометрия	163
«Геометрическая алгебра»	165
Почему появилась геометрическая формулировка?	173
Боковые и диагональные числа	175
Анаксагор из Клазомен	177
Демокрит из Абдеры	180
Энопид Хиосский	181
Квадратура круга	182
Антифон	182
Гиппократ Хиосский	183
Стереометрия 5-го века и перспектива	190
Демокрит	192
Конус и пирамида	192
Платон о стереометрии	193
Удвоение куба	194
Феодор из Кирены	197
Феодор и Теэтет	197
Феодор о высших кривых и «соединениях»	202
Гипсий и его квадратриса	203
Основные линии развития	203
Глава VI. Век Платона	205
Архит Тарентский	208
Удвоение куба	209
Стиль Архита	212
Восьмая книга «Начал»	213
«Mathemata» в «Послесловии к Законам»	215
Удвоение куба	221
Согласно Менехму	223
Теэтет	227
Анализ X книги «Начал»	230
Теория правильных многогранников	236
Учение о пропорциональности у Теэтета	239
Евдокс Книдский	243
Евдокс как астроном	245
Математические работы Евдокса	253
Метод исчерпывания	254
Учение о пропорциональности	258
Теэтет и Евдокс	261
Менехм	262
Динострат	263
Автолик из Питаны	265
О вращающейся сфере	267
О восходе и заходе звезд	268
Евклид	268
«Начала»	269
«Data»	271
О делении фигур	273
Утерянные геометрические произведения	273
Сочинения Евклида по прикладной математике	275

Глава VII. Александрийская эпоха (330—200 до н. э.)	276
Аристарх Самосский	280
«Измерение круга» Архимеда	283
Таблицы хорд	285
Архимед	287
Рассказы об Архимеде	288
Архимед как астроном	293
Произведения Архимеда	294
«Метод»	295
Квадратура параболы	299
О шаре и цилиндре, I	304
О шаре и цилиндре, II	306
О спиралях	307
О коноидах и сфероидах	308
Понятие об интеграле у Архимеда	309
Книга Лемм	310
Построение правильного семиугольника	311
Остальные произведения Архимеда	313
Эратосфен Киренский	314
Биография	315
Хронография и градусное измерение	316
Удвоение куба	317
Теория чисел	318
Средние	318
Никомед	322
Трисекция угла	323
Удвоение куба по Никомеду	324
Аполлоний Пергский	325
Теория эпициклов и эксцентров	326
«Konika»	329
Конические сечения до Аполлония	330
Эллипс как сечение конуса по Архимеду	332
Как были первоначально выведены симптомы?	335
Вопрос и ответ	335
Вывод симптомов по Аполлонию	336
Сопряженные диаметры и сопряженные гиперболы	339
Касательные	341
Уравнение, отнесенное к центру	342
Теорема о двух касательных и преобразование к новым осям	344
Конус вращения, проходящий через данное коническое сечение	349
Вторая книга	350
Третья книга	351
Геометрические места к трем или четырем прямым	352
Пятая книга	353
Шестая, седьмая и восьмая книги	354
Другие произведения Аполлония	355
Глава VIII. Упадок греческой математики	357
Внешние причины упадка	357
Внутренние причины упадка	359
1. Трудность геометрической алгебры	359
2. Трудность письменной передачи	360
Комментарии Паппа Александрийского	361

Эпигоны великих математиков	362
1. Диокл	362
2. Зенодор	363
3. Гипсикл	364
История тригонометрии	366
Плоская тригонометрия	366
Сферическая тригонометрия	369
Менелай	369
Теорема о трансверсалиях	369
Герон Александрийский	372
«Geometrika»	372
Диофант Александрийский	374
«Arithmetika»	374
Диофантовы уравнения	375
Предшественники Диофанта	376
Связь с вавилонской и арабской алгеброй	376
Алгебраические обозначения	378
Папп Александрийский	385
«Поризмы» Евклида	386
Теорема Дезарга	387
Теорема о полном четырехугольнике	387
Теорема Паппа	389
Теон Александрийский (380 до н. э.)	390
Ипатия	390
Афинская школа. Прокл Диадок	391
Исидор Милетский и Антемий Тралльский	392
 Б. Л. ван дер Варден. Пифагорейское учение о гармонии	 393
Некоторые замечания переводчика	435

Б. Л. ван дер Варден

Пробуждающаяся наука

Редактор В. А. Солодков
Художник В. А. Селенгинский }
Тех. редактор Н. Я. Мурашова
Корректор С. Н. Емельянова

Сдано в набор 26/IX 1958 г.
Подписано к печати 24/XI 1958 г.
Бумага 60×92/16.
Физ. печ. л. 28,75.
Условн. печ. л. 28,75.
Уч.-изд. л. 27,76. Тираж 6000 экз.
Т-11552. Цена книги 15 р. 90 к.
Заказ № 538

Государственное издательство
физико-математической
литературы

Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15

16-я типография Московского
городского Совнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9

